Übungsblatt 7

Adrian Schollmeyer

Aufgabe 1

(a)

Aussage stimmt für $c \geq 2^{64}$ und beliebiges n.

(b)

$$n \cdot \log n \in \Omega(n) \iff \liminf_{n\to\infty} \left| \frac{n \cdot \log n}{n} \right| > 0 \tag{1}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \left| \frac{n \cdot \log n}{n} \right| = \liminf_{n\to\infty} \frac{n \cdot \log n}{n} \tag{2}$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \log n \tag{3}$$

$$= \infty > 0 \tag{4}$$

$$\implies n \cdot \log n \in \Omega(n) \tag{5}$$

(c)

$$2^5 n^5 + 2^3 n^3 + 2^1 n \in O\left(n^5\right) \iff \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{2^5 n^5 + 2^3 n^3 + 2^1 n}{n^5} \right| \in \mathbb{R} \tag{6}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{2^5 n^5 + 2^3 n^3 + 2^1 n}{n^5} \right| = \limsup_{n\to\infty} \frac{2^5 n^5 + 2^3 n^3 + 2^1 n}{n^5} \tag{7}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{n^5 \left(2^5 + \frac{2^3}{n^2} + \frac{2^1}{n^4}\right)}{n^5} \tag{8}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{\left(2^3 + \frac{2^3}{n^2} + \frac{2^1}{n^4}\right)}{1} \tag{9}$$

$$= 2^3 \in \mathbb{R} \tag{10}$$

$$\implies 2^5 n^5 + 2^3 n^3 + 2^1 n \in O\left(n^5\right) \tag{11}$$

(d)

$$\frac{n^2}{n \cdot \log n} \in O(n) \iff \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n^2}{n \cdot \log n}}{n} \right| \in \mathbb{R} \tag{12}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n^2}{n \cdot \log n}}{n} \right| = \limsup_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 \cdot \log n} \tag{13}$$

$$= 0 \in \mathbb{R} \tag{14}$$

$$\implies \frac{n^2}{n \cdot \log n} \in O(n) \tag{15}$$

(e)

$$2^{\log_2 2n} \in \Theta(n) \iff 0 < \liminf_{n\to\infty} \left| \frac{2^{\log_2 2n}}{n} \right| \leq \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{2^{\log_2 2n}}{n} \right| < \infty \tag{16}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \left| \frac{2^{\log_2 2n}}{n} \right| = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{2^{\log_2 2n}}{n} \right| \tag{17}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\log_2 2n}}{n} \tag{18}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} \tag{19}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 \tag{20}$$

$$= 2 \in (0, \infty) \tag{21}$$

$$\implies 2^{\log_2 2n} \in \Theta(n) \tag{22}$$

(f)

TBD

Aufgabe 2

TBD

Aufgabe 3

(a)

Induktionsanfang:

$$\sum_{i=0}^{1-1} 2^i = 2^0 = 2^1 - 1 \quad \checkmark \tag{1}$$

Induktionsvorraussetzung:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1 \tag{2}$$

Induktionsbehauptung:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 \tag{3}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} 2^i &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 2^n && (4)\\ &= 2^n - 1 + 2^n && (5)\\ &= 2 \cdot 2^n - 1 && (6)\\ &= 2^{n+1} - 1 \quad \square && (7) \end{aligned}$$

(b)

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2 \cdot 1 &= 3 && (8)\\ 3 \mid 3 \quad \checkmark && (9) \end{aligned}$$

Induktionsvorraussetzung:

$$3 \mid n^3 + 2n \tag{10}$$

Induktionsbehauptung:

$$3 \mid (n+1)^3 + 2(n+1) \tag{11}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 && (12)\\ &= n^3 + 2n + 3n^2 + 3n + 3 && (13) \end{aligned}$$

Da $3 \mid n^3 + 2n$ und alle übrigen Terme auch durch 3 teilbar (trivial):

$$3 \mid n^3 + 2n + 3n^2 + 3n + 3 \quad \square \tag{14}$$