TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, Faried Abu Zaid

Vorbereitungsblatt zur Klausur
Automaten, Sprachen und Komplexität

Aufgabe 1 [8 - 10 Punkte]

Stellen Sie sicher, dass Sie die Definition auf den Folien 1 - 387 korrekt wiedergeben können.

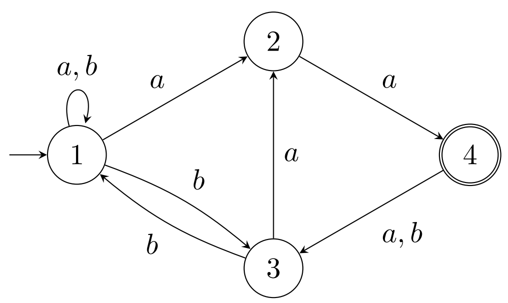
Aufgabe 2 [8 - 10 Punkte]

Sellen Sie sicher, dass Sie die Aussagen der Theoreme auf den Folien 1 - 387 verstanden haben und diese in den Kontext einordnen können.

Aufgabe 3 [10 + 10 = 20 Punkte]

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Bestimmen Sie mithilfe der Konstruktionen aus der Vorlesung den minimalen DFA der vom folgenden NFA über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ akzeptierten Sprache. Geben Sie auch die dabei auftretenden Zwischenergebnisse an.



(b) Entwerfen Sie ein Verfahren, welches in der Lage ist, das folgende Problem zu entscheiden. Sie müssen dabei *keine* Details der verwendeten Konstruktionen erläutern.

Eingabe: Zwei rechtslineare Grammatiken G_1 und G_2 über demselben Alphabet Σ.

Frage: Gibt es unendlich viele Wörter $w \in \Sigma^*$, die von G_1 erzeugt werden, von G_2 aber nicht?

Aufgabe 4 [6 + 4 = 10 Punkte]

Es seien Σ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und $u \in \Sigma^*$ ein Wort. Betrachten Sie außerdem die Sprache $u^{-1}L = \{w \in \Sigma^* \mid uw \in L\}$.

(a) Beweisen Sie, dass $u^{-1}L$ regulär ist, sobald L regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung der Aussage aus (a) nicht gilt. Geben Sie dazu ein Alphabet Σ, eine nicht-reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und ein Wort u an, so dass $u^{-1}L$ regulär ist.

Aufgabe 5 [4 + 4 + 2 = 10 Punkte]

Betrachten Sie die Sprache $L = \{a^m b^{m+n} c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

(b) Konstruieren Sie einen PDA, der L akzeptiert und stellen Sie ihn tabellarisch *oder* graphisch dar.

(c) Zeigen Sie, dass sich Ihr PDA aus (b) auf den Eingaben *abbbcc* und *aabbc* richtig verhält.

Aufgabe 6 [6 + 4 = 10 Punkte]

Betrachten Sie die nachstehende Grammatik G in Chomsky-Normalform über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und mit Startsymbol S:

$$S \to AA \qquad A \to BS \mid a \qquad B \to b$$

(a) Entscheiden Sie mithilfe des CYK-Algorithmus, welche der Wörter *abaa* und *bbaa* von G erzeugt werden.

(b) Geben Sie für diejenigen Wörter aus (a), die von G erzeugt werden, jeweils einen Ableitungsbaum und die zugehörige Linksableitung an.

Aufgabe 7 [8 - 10 Punkte]

Stellen Sie sicher, dass Sie die Definition auf den Folien 388 - 759 korrekt wiedergeben können.

Aufgabe 8 [8 - 10 Punkte]

Sellen Sie sicher, dass Sie die Aussagen der Theoreme auf den Folien 388 - 759 verstanden haben und diese in den Kontext einordnen können.

Aufgabe 9 [10 + 10 = 20 Punkte]

(a) Beweisen Sie, dass das spezielle Halteproblem K unentscheidbar ist.

(b) Wir erweitern Loop-Programme um einen Operator für die Ackermann-Funktion:

$$x_i := \mathrm{ack}(x_j, x_\ell).$$

Die Semantik der Operation ist gegeben durch

$$[x_i := \mathrm{ack}(x_j, x_\ell)]_n(a_0, \ldots, a_{n-1}) = (b_0, \ldots, b_{n-1})$$

genau dann, wenn $b_i = \mathrm{ack}(a_j, a_\ell)$ und $b_k = a_k$ für alle $k \neq i$.

Zeigen Sie, dass es totale berechenbare Funktionen gibt, die nicht durch ein solches erweitertes Loop-Programm berechenbar ist. Es genügt die wesentlichen Schritte des Beweises zu skizzieren.

Aufgabe 10 [10 + 3 = 13 Punkte]

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie eine nichtdeterministische Turingmaschine M als Tupel an, die die Sprache $\{w \in \Sigma^* \mid \text{ es gibt } x \in \Sigma^+ \text{ und } y \in \Sigma^* \text{ mit } w = xyx \}$ akzeptiert. Erklären Sie, wie Ihre Turingmaschine arbeitet.

(b) Geben Sie jeweils eine erfolgreiche Berechnung (Folge von Konfigurationen) Ihrer Turingmaschine M auf den Eingaben aa und $ababab$ an.

Aufgabe 11 [5 + 5 = 10 Punkte]

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Seien Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie: Sind sowohl L als auch $\overline{L}$ semi-entscheidbar, so ist L entscheidbar.

(b) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Seien $L \subseteq \Sigma^*$ und $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ total und berechenbar. Wenn L semi-entscheidbar ist, so ist $\{f(w) \mid w \in L\}$ semi-entscheidbar.

Aufgabe 12 [2 + 5 = 7 Punkte]

Sei $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen. G' ist ein *Teilgraph* von G falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Zwei Graphen G und G' sind *isomorph* falls eine bijektive Funktion $f : V \to V'$ existiert mit $(u, v) \in E \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E'$ für alle $u, v \in V$.

Betrachten Sie das folgende Problem:

TEILGRAPH

Eingabe:	G_1, G_2 endliche Graphen
Frage:	Ist G_2 isomporph zu einem Teilgraphen von G_1?

(a) Zeigen Sie TEILGRAPH $\in$ NP.

(b) Beweisen Sie, dass TEILGRAPH NP-vollständig ist. Sie können hierzu die in der Vorlesung und den Übungen behandelten NP-vollständigen Probleme verwenden.