

Übungsblatt 3

Adrian Schollmeyer

Aufgabe 1

Vss: G Baum, $|E(G)| \geq 1$.

Wähle $G = T$.

Betrachte $f: V(G) \rightarrow E(G)$ so, dass $\forall s \in V(G) : s \in f(s)$, $X_s = \{s, x\}$ so, dass $sx \in E(G)$. (also jede Kante wird zu einer Tasche in der Baumzerlegung). Zusätzlich noch die letzte Ecke in eine eigene Tasche packen. Dann ist z eine BZ.

Beweis. Bed. (i) gilt offensichtlich, Bed. (ii) auch gemäß Konstruktion der Taschen (da f surjektiv).

Bed (iii) gilt auch: Seien $p, q, r \in V(G)$, q liegt auf p, r -Weg. Dann $X_p \cap X_r = \{q\} \subseteq X_q$ oder $X_p \cap X_r = \emptyset \subseteq X_q$. Also ist z BZ mit Weite $w(z) = 1$ (alle Taschen sind max. 2 groß).

Ang. $\exists \hat{z}$ mit $w(\hat{z}) = 0$. Dann $\forall s \in V(G) : |X_s| \leq 1$. Das verletzt aber Bedingung (ii), da $|E(G)| \geq 1$, also $\exists xy \in E(G)$, diese zwei Ecken also in einer Tasche sein müssen. ζ

Also ist $w(G) = 1$. \square

Aufgabe 2

\mathbb{Z} : Kreise haben BW 2.

Beweis. Sei $K = (\{v_1, \dots, v_n\}, \{e_1, \dots, e_n\})$ Kreis, $e_n = v_1 v_n$, $e_i = v_i v_{i+1} \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$.

$w(K) \neq 0$ analog zu Aufgabe 1.

$w(K) \neq 1$: Ang. $w(K) = 1$. Dann $\exists z = (T, (X_s)_{s \in V(T)})$ BZ so, dass $\max\{|X_s| \mid s \in V(T)\} \leq 2$, also $\forall X_s, s \in V(T) : |X_s| \leq 2$.

Da (ii) gilt, ist $E(K) \subseteq \{X_s \mid s \in V(T)\}$.

o. B. d. A. $V(T) \subseteq \mathbb{N}$, $e_i = X_i$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Betrachte $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Sei p auf $i, i+1$ -Weg in T . Dann

$$X_i \cap X_{i+1} = e_i \cap e_{i+1} = \{v_{i+1}\} \stackrel{(iii)}{\subseteq} X_p. \quad (1)$$

Für $p \in \{1, \dots, n-1\}$, $p \neq i, p \neq i+1$ gilt aber

$$\{v_{i+1}\} \not\subseteq \{v_p, v_{p+1}\} = e_p = X_p. \quad (2)$$

Also Ecken $1, \dots, n$ in T geordnet. Nun ist 2 auf dem $1, n$ -Weg in T (da geordnet), somit

ist $X_1 \cap X_n = \{v_1\} \stackrel{!}{\subseteq} X_2 = \{v_2, v_3\}$. ζ

Also $w(K) \geq 2$.

Betrachte BZ

$$z := \left((\{1, \dots, n\}, \{12, 23, \dots, (n-1)n\}), (e_i \cup \{v_1\})_{i \in \{1, \dots, n\}} \right) \quad (3)$$

Man nehme also immer zu jeder Kante die erste mit in die Tasche auf.

z ist BZ: (i), (ii) gelten offensichtlich. (iii) gilt auch: Seien $p, q, s \in \{1, \dots, n\}$, $p \leq q \leq s$. Ist $p = 1$, $s = n$, so ist $X_p \cap X_s = \{1\} \subseteq X_q \forall q$ (nach Konstruktion). Ansonsten: ist $q = p + 1$, $X_p \cap X_s \subseteq \{v_{p+1}, v_1\} \subseteq X_q$, analog für $q = s - 1$. Bei Gleichheit gilt:

$$X_p \cap X_s = X_q \cap X_s \subseteq X_q \quad (4)$$

$$X_p \cap X_s = X_p \cap X_q \subseteq X_q \quad (5)$$

Ansonsten $p < q < s$, dann $X_p \cap X_s = \{v_1\} \stackrel{\text{Konstr.}}{\subseteq} X_q$.

Also ist z BZ. Gemäß Konstruktion ist die größte Tasche von der Mächtigkeit 3, also $w(z) = 2$. Damit $w(K) = 2$. \square

Aufgabe 3

Aufspannender Kreis = HAMILTON-Kreis.

$$\exists x, y, z (x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge xz \in E \wedge zy \in E \wedge \exists Y (z \in Y \wedge \text{conn}(Y) \wedge (\forall v : (v = z \vee v \in Y)))) \quad (6)$$

Aufgabe 4

Aufgabe 5

Aufgabe 6