Übungsblatt 3

Adrian Schollmeyer

Aufgabe 1

Vss: G Baum, $|E(G)| \geq 1$.

Wähle $G = T$.

Betrachte $f : V(G) \to E(G)$ so, dass $\forall s \in V(G) : s \in f(s)$, $X_s = \{s, x\}$ so, dass $sx \in E(G)$. (also jede Kante wird zu einer Tasche in der Baumzerlegung). Zusätzlich noch die letzte Ecke in eine eigene Tasche packen. Dann ist z eine BZ.

Beweis. Bed. (i) gilt offensichtlich, Bed. (ii) auch gemäß Konstruktion der Taschen (da f surjektiv).

Bed (iii) gilt auch: Seien $p, q, r \in V(G)$, q liegt auf p, r-Weg. Dann $X_p \cap X_r = \{q\} \subseteq X_q$ oder $X_p \cap X_r = \varnothing \subseteq X_q$. Also ist z BZ mit Weite $w(z) = 1$ (alle Taschen sind max. 2 groß).

Ang. $\exists \hat{z}$ mit $w(\hat{z}) = 0$. Dann $\forall s \in V(G) : |X_s| \leq 1$. Das verletzt aber Bedingung (ii), da $|E(G)| \geq 1$, also $\exists xy \in E(G)$, diese zwei Ecken also in einer Tasche sein müssen. $\lightning$

Also ist $w(G) = 1$. $\square$

Aufgabe 2

$\cancel{z}$: Kreise haben BW 2.

Beweis. Sei $K = (\{v_1, \ldots, v_n\}, \{e_1, \ldots, e_n\})$ Kreis, $e_n = v_1 v_n$, $e_i = v_i v_{i+1} \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

$w(K) \neq 0$ analog zu Aufgabe 1.

$w(K) \neq 1$: Ang. $w(K) = 1$. Dann $\exists z = \left(T, (X_s)_{s \in V(T)}\right)$ BZ so, dass $\max\{\,|X_s| \mid s \in V(T)\} \leq 2$, also $\forall X_s, s \in V(T) : |X_s| \leq 2$.

Da (ii) gilt, ist $E(K) \subseteq \{X_s \mid s \in V(T)\}$.

o. B. d. A. $V(T) \subseteq \mathbb{N}$, $e_i = X_i$ für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Betrachte $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Sei p auf $i, i+1$-Weg in T. Dann

$$X_i \cap X_{i+1} = e_i \cap e_{i+1} = \{v_{i+1}\} \overset{(iii)}{\subseteq} X_p. \tag{1}$$

Für $p \in \{1, \ldots, n-1\}, p \neq i, p \neq i+1$ gilt aber

$$\{v_{i+1}\} \nsubseteq \{v_p, v_{p+1}\} = e_p = X_p. \tag{2}$$

Also Ecken $1, \ldots, n$ in T geordnet. Nun ist 2 auf dem $1, n$-Weg in T (da geordnet), somit ist $X_1 \cap X_n = \{v_1\} \overset{!}{\subseteq} X_2 = \{v_2, v_3\}$. $\lightning$

Also $w(K) \geq 2$.

Betrachte BZ

$$z := \Big(\left(\{1, \ldots, n\}, \{12, 23, \ldots, (n-1)n\} \right), \left(e_i \cup \{v_1\} \right)_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Big) \tag{3}$$

Man nehme also immer zu jeder Kante die erste mit in die Tasche auf.

z ist BZ: (i), (ii) gelten offensichtlich. (iii) gilt auch: Seien $p, q, s \in \{1, \ldots, n\}$, $p \leq q \leq s$. Ist $p = 1$, $s = n$, so ist $X_p \cap X_s = \{1\} \subseteq X_q \forall q$ (nach Konstruktion). Ansonsten: ist $q = p + 1$, $X_p \cap X_s \subseteq \{v_{p+1}, v_1\} \subseteq X_q$, analog für $q = s - 1$. Bei Gleichheit gilt:

$$X_p \cap X_s = X_q \cap X_s \subseteq X_q \tag{4}$$

$$X_p \cap X_s = X_p \cap X_q \subseteq X_q \tag{5}$$

Ansonsten $p < q < s$, dann $X_p \cap X_s = \{v_1\} \overset{\text{Konstr.}}{\subseteq} X_q$.

Also ist z BZ. Gemäß Konstruktion ist die größte Tasche von der Mächtigkeit 3, also $w(z) = 2$. Damit $w(K) = 2$. □

Aufgabe 3

Aufspannender Kreis = Hamilton-Kreis.

Variante 1:

$$\forall z \exists x, y \left(x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \wedge xz \in E \wedge zy \in E \wedge \exists Y (z \notin Y \wedge conn(Y) \wedge \forall v (v = z \vee v \in Y)) \right) \tag{6}$$

Musterlösung:

Sei $G = (V, E)$. Für $C \subseteq E$ gelte:

$$tworeg(c) := \forall x \in V \exists e \in E \exists f \in E : x \in e \wedge x \in f \wedge e \notin f \wedge e \in C \wedge f \in C \wedge (\forall g \in E : (x \in g \wedge g \in c) \implies (\tag{7}$$

$$hamilton(G) := \exists C \subseteq E : tworeg(C) \wedge conn(C) \tag{8}$$

Aufgabe 4

$$anticlique(A) := \forall x, y \in V : (x \in A \wedge y \in A) \implies xy \notin E \tag{9}$$

$$disjoint(A, B) := \forall x \in V : x \notin A \vee x \notin B pwd(A_1, \ldots, A_n) \tag{10}$$

wobei $\binom{k}{2}$ Prädikate $disjoint(A_i, A_j)$ für $i < j$ in der Konjunktion vorkommen müssen (und keine weiteren)

$$cover(A_1, \ldots, A_k) := \forall x \in V : x \in A_1 \vee \ldots \vee x \in A_k \tag{11}$$

$$colorable(G) := \exists A_k \subseteq V : cover(A_1, \ldots, A_k) \wedge pwd(A_1, \ldots, A_k) \wedge anticlique(A_1) \wedge \ldots \wedge anticlique(A \tag{12}$$

Aufgabe 5

Ƶ: G Graph, bipartit, zsh. $\implies$ es gibt genau eine 2-Färbung.

Beweis. Seien A, B Anticliquen.

$$\nvDash_A := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \tag{13}$$

Da G zsh., $\exists$ Weg $P = \underbrace{x_0}_{=x}, \dots, \underbrace{x_k}_{=y}$ xy-Weg und o. B. d. A. sei $x \in A$. Dann $x \in A$ für gerade $i \in \{1, \dots, k\}$ und $x \in B$ für ungerade $i \in \{1, \dots, B\}$. Für Kreise $K = x_0, \dots, x_k, x_0$ gilt $x \in A \implies y \in B$, da G bipartit.

Problem: Zeigt noch nicht, dass das die einzige Färbung ist!

Ang. wir hätte noch ne andere Färbung.

Sei $f : V \to \{0, 1\}$ eine weitere Färbung. Nehme $x, y \in A$. $\exists Q = x = x_0, \dots x_k = y$ Weg. Die x_i sind, weil bipartit, abwechselnd in A und B. Der Weg ist gerader Länge, also müssen, weil Färbung, x und y die gleiche Farbe haben. Also gibt es nur genau eine 2-Färbung. □

Aufgabe 6

Ƶ: Existiert kein Kreis C mit $|C| \equiv 1 \, (mod k)$, dann ist G k-färbbar.

Beweis. Sei $G = (V, E)$ Graph ohne Kreis der Länge $|C| \equiv 1 \, (mod k)$.

Angenommen G wäre nicht k-färbbar. Dann gibt es $x, y \in V : xy \in E, f(x) = f(y)$. Wähle nun x als Wurzel eines Tiefensuchbaums T und wähle T so, dass $xy \notin E(T)$ Dieser Baum existiert, da sonst $f(y) \notin f(x)$ gewählt werden könnte. Setze $f(v) = d_T(x, v) \mod k$. Dann $f(x) = 0 = f(y)$. Also $d_T(x, y) \equiv 0 \mod k$, also $\exists$ Weg der Länge $\equiv 0 \mod k$ in T, damit auch in G. Sei der Weg $P = x = x_0, \dots, x_l = 0$ dieser Weg, $l \equiv 0 \mod k$. Dann ist $C = x_0, \dots, x_l, x_0$ ein Kreis der Länge $l + 1$, also Länge $\equiv 1 \mod k$. ↯
Also ist G k-färbbar. □

Die Rückrichtung gilt nicht allgemein. Bspw. ein Graph, der nur aus einem Kreis der Länge 4 besteht, ist 3-färbbar.