Übungsblatt 4

Adrian Schollmeyer

Aufgabe 1

Algorithmus:

(1) Initialisiere Menge $S := \{z \in V(M) \mid xz \in E(G)\}$, $R = \varnothing$.

(2) Solange $S \neq \varnothing$, nimm Knoten $s \in S$ und seinen Matchingpartner $t \in V(M)$ mit $st \in E(M)$.

- Falls t existiert:
  - Füge s, t in Ergebnismenge ein. $R := R \cup \{s, t\}$
  - $S := (S \setminus \{s, t\}) \cup \{z \in V(G) \mid tz \notin E(M) \wedge z \notin R\}$
- Falls t nicht existiert:
  - $S := S \setminus \{s\}$
  - $R := R \cup \{s\}$

(3) Falls $y \in K$ mit $y \notin V(M)$, existiert ein Verbesserungsweg von x nach y.

Aufgabe 2

VSS: G k-regulär, bipartiter Graph, $d_G(k) \, \forall x \in V(G)$.
BEH: Für $k \geq 1$ besitzt G ein perfektes Matching M (d. h. $V(M) = V(G)$).

Beweis. G besteht aus m Komponenten $K_1, \ldots, K_m$. Wenn jedes K_i ein perfektes Matching M_i besitzt, dann ist $M = \Cup_{i=1}^{m} M_i$ ein perfektes Matching von G.

o. B. d. A. sei G zusammenhängend. Nun existiert eine Partition von genau zwei Anticliquen A, B, sodass $|A| = |B|$.

Nun gilt: finden wir ein Matching von A (d. h. $V(A) \subseteq V(M)$), so ist das ein perfektes Matching, d. h. aufgrund der HALL-Bedingung für A.

z.z.: $|N_G(X)| \geq |X| \forall X \subseteq A$.

Fall 1 $|X| \leq k$. Dann $|N_G(X)| \geq k \geq |X|$.

Fall 2 $|X| = |A|$ Dann $X = A$. $N_G(X) = B \implies |B| = |A|$.

Fall 3 $k < |X| < |A|$ Wegen der k-Regularität von $x \in X$ müssen $k \cdot |X|$ Kanten aus X herausgehen und in $N_G(X)$ landen. Aus $N_G(X)$ gehen $k \cdot |N_G(X)|$ Kanten heraus, die nicht unbedingt in X landen müssen

Also $k \cdot |N_G(X)| \geq k \cdot |X|$, also $|N_G(X)| \geq |X|$, d. h. $V(A) \subseteq V(M)$.

Aufgrund der Hall-Bedingung existiert ein Matching M von G mit $V(A) \subseteq V(M)$, wegen $|B| = |A|$ und A Anticlique muss also $V(A \cup B) = V(G) = V(M)$. Also besitzt G ein perfektes Matching. $\square$

Aufgabe 3

$$f\colon \mathfrak{P}_k(N) \to \mathfrak{P}_{k-1}(N) \tag{1}$$

injektiv, extensiv.

Setze für jedes $X \in \mathfrak{P}_k(N)$: $f(X) = X'$, sodass $X \subset X'$. Das ist möglich, weil $\mathfrak{P}_{k+1}(N)$ aller $k+1$-elementigen Teilmengen enthält. Es gibt also $n-k$ Mengen X', für die das gilt. Dann ist f extensiv injektiv.