Übungsblatt 4

Adrian Schollmeyer

Aufgabe 1

Algorithmus:

(1) Initialisiere Menge $S := \{z \in V(M) \mid xz \in E(G)\}$, $R = \varnothing$.

(2) Solange $S \neq \varnothing$, nimm Knoten $s \in S$ und seinen Matchingpartner $t \in V(M)$ mit $st \in E(M)$.

- Falls t existiert:
  - Füge s, t in Ergebnismenge ein. $R := R \cup \{s, t\}$
  - $S := (S \setminus \{s, t\}) \cup \{z \in V(G) \mid tz \notin E(M) \wedge z \notin R\}$
- Falls t nicht existiert:
  - $S := S \setminus \{s\}$
  - $R := R \cup \{s\}$

(3) Falls $y \in K$ mit $y \notin V(M)$, existiert ein Verbesserungsweg von x nach y.

Überarbeiteter Algorithmus:
Sei x_0 eine Ecke des zusammenhängenden Graphen G mit $x_0 \notin V(M)$, Level $f_l(0) := 0$ und Vorgänger $f(0) = -1$.
($*$) Wenn es unter den bereits gewählten Ecken $x_0, \ldots, x_s$ eine Ecke x_t gibt mit Level $f_l(t) = l$:

(1) Falls l ungerade ist: Wähle einen Nachbarn y in $V(G) \setminus \{x_0, \ldots, x_s\}$ mit $x_t y \in M$.

(2) Falls l gerade ist: Wähle einen Nachbarn y in $V(G) \setminus \{x_0, \ldots, x_s\}$ mit $x_t y \notin M$.

Setze $x_{l+1} = y$, $f_l(s+1) = l + 1$ und $f(s+1) = t$; iteriere ($*$).
$R := \{x_0, \ldots, x_l\}$.

Beweis. Nach Satz 1.1.1 (Spannbaum) wird ein Spannbaum gebildet. Zeige induktiv über s, dass es jeweils einen x_0, x_s M-alternierenden Weg gibt $\forall x_s$ im Spannbaum.

IA: $s = 1$: Es wurde x_1 gefunden mit $x_0 x_1 \in E(G)$ und $x_0 x_1 \notin M$, da $f(0) = 0$ gerade ist. Also ist der Weg M-alternierend. ✓

IV: Es gibt für jedes bereits gefundene x_t einen M-alternierenden x_0, x_t-Weg für alle $x_1, \ldots, x_s$.

IS: Ein neuer Knoten x_{s+1} wird gefunden mit dem Nachbarn x_t. Der x_0, x_t-Weg endet entweder mit:

(1) Kante $x_i x_t \in M$, falls $f_l(i)$ ungerade. Dann gilt nach dem Algorithmus $f_l(t) = f_l(i)+1$ gerade ist und zwischen den neuen Knoten x_{s+1} und x_t muss eine Kante existieren, die nicht im Matching ist. Aufgrund der IV ist der x_0, x_{s+1}-Weg M-alternierend.

(2) Kante $x_i x_t \notin M$, falls $f_l(i)$ gerade. Dann gilt nach dem Algorithmus $f_l(t) = f_l(i) + 1$ ungerade ist und zwischen den neuen Knoten x_{s+1} und x_t muss eine Kante existieren, die im Matching ist. Aufgrund der IV ist der x_0, x_{s+1}-Weg M-alternierend.

□

Falls $x_s \in R$ existiert mit $x_s \notin V(M)$, dann gebe Pfad aus mit:

- Solange $s \neq -1$, gebe x_s aus. Setze $s := f(s)$.
- Sonst gib nichts aus.

Aufgabe 2

Vss: G k-regulär, bipartiter Graph, $d_G(k)\,\forall x \in V(G)$.
Beh: Für $k \geq 1$ besitzt G ein perfektes Matching M (d. h. $V(M) = V(G)$).

Beweis. G besteht aus m Komponenten $K_1, \ldots, K_m$. Wenn jedes K_i ein perfektes Matching M_i besitzt, dann ist $M = \biguplus_{i=1}^{m} M_i$ ein perfektes Matching von G.

o. B. d. A. sei G zusammenhängend. Nun existiert eine Partition von genau zwei Anticliquen A, B, sodass $|A| = |B|$.

Nun gilt: finden wir ein Matching von A (d. h. $V(A) \subseteq V(M)$), so ist das ein perfektes Matching, d. h. aufgrund der Hall-Bedingung für A.

Z: $|N_G(X)| \geq |X| \forall X \subseteq A$.

Fall 1 $|X| \leq k$. Dann $|N_G(X)| \geq k \geq |X|$.

Fall 2 $|X| = |A|$ Dann $X = A$. $N_G(X) = B \implies |B| = |A|$.

Fall 3 $k < |X| < |A|$ Wegen der k-Regularität von $x \in X$ müssen $k \cdot |X|$ Kanten aus X herausgehen und in $N_G(X)$ landen. Aus $N_G(X)$ gehen $k \cdot |N_G(X)|$ Kanten heraus, die nicht unbedingt in X landen müssen

Also $k \cdot |N_G(X)| \geq k \cdot |X|$, also $|N_G(X)| \geq |X|$, d. h. $V(A) \subseteq V(M)$.

Aufgrund der Hall-Bedingung existiert ein Matching M von G mit $V(A) \subseteq V(M)$, wegen $|B| = |A|$ und A Anticlique muss also $V(A \cup B) = V(G) = V(M)$. Also besitzt G ein perfektes Matching. □

Aufgabe 3

f extensiv, wenn $X \subseteq f(X)$ für alle $X \in \mathfrak{M}$, k, n mit $0 \leq k < \frac{n}{2}$.
N Menge mit $|N| = n$, $\mathfrak{P}_k(N) =$ Menge aller k-elementigen Teilmengen von N.
Beh: es gibt eine extensive Injektion von $\mathfrak{P}(N)$ nach $\mathfrak{P}_{k+1}(N)$.

Beweis. Betrachte bipartiten Graphen G mit den Farbklassen $A := \mathfrak{P}_k(N)$ und $B := \mathfrak{P}_{k+1}(N)$ in dem $a \in A$ und $b \in B$ genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn $a \subseteq b$ gilt. Jedes $a \in A$ hat genau $n-k$ viele $(k-1)$-elementige Obermengen in $\mathfrak{P}(N)$. Jedes $b \in B$ hat genau $k+1$ viele k-elementige Teilmengen in $\mathfrak{P}(N)$.

Folglich: Einerseits hat $X \subseteq A$ genau $(n-k)\ |X|$ viele Kanten mit einem Endpunkt in X und dem anderen in $N_G(X)$. Andererseits hat $X \subseteq A$ aber auch nur höchstens $(k+1)\ |N_G(X)|$ viele solche Kanten.

$$(n-k)\ |X| \leq (k+1)\ |N_G(X)| \tag{1}$$

$$\iff \ |N_G(X)| \geq \frac{n-k}{k+1}\ |X| \tag{2}$$

$$\frac{n-k}{k+1} \geq 1 \iff n \geq 2k+1 \tag{3}$$

$$\implies k < \frac{n}{2} \text{ (nach Voraussetzung)} \tag{4}$$

Also ist die Hall-Bedingung für G erfüllt und damit existiert ein Matching von A. Es gibt also ein Matching M von A nach B. Durch $f(a) := b$, falls $ab \in M$, $a \in A$, $b \in B$ wird die gewünschte extensive Injektion von A definiert. ☐

Unter welchen Voraussetzungen gibt es l viele extensive Injektionen?

Wir definieren $C := A \times \{1, \ldots, l\}$ und betrachten den bipartiten Graphen G mit Farbklassen C und B, in dem $(a, i) \in C$ und $b \in B$ genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn $a \leq b$ gilt. Jede Ecke $x \in C$ hat dann (abermals) $n-k$ Nachbarn in B, jede Ecke in B jedoch $l \cdot (k+1)$ viele Nachbarn in C, sodass es zu $X \subseteq C$ einerseits genau $(n-k)\ |X|$ viele Kanten mit einem Endpunkt in X und dem anderen in $N_G(X)$ gibt, andererseits aber auch nur höchstens $l \cdot (k+1)\ |N_G(X)|$ viele solche Kanten.

$$(n-k)\ |X| \leq l(k+1)\ |N_G(X)| \tag{5}$$

$$\iff \ |N_G(X)| \geq \frac{n-k}{l\cdot(k+1)}\ |X| \frac{n-k}{l\cdot(k+1)} \geq 1 \qquad \iff n \geq lk+k-l \tag{6}$$

In diesem Fall ist die Hall-Bedingung erfüllt. Also gibt es ein Matching M von C nach B und für $i \subset \{1, \ldots, l\}$ wird durch $f_i(a) := b$, falls $(a, i)\, b \in M$, eine extensive Injektion f_i von A nach B definiert, so dass die Bildmengen disjunkt sind.

Aufgabe 4