Übungsblatt 5

Adrian Schollmeyer

Aufgabe 1

G hat perf. Matching, dann gewinnt Spieler 2.

Strategie: Spieler 2 wählt bei jedem Zug Kante $e \in M$, für die gilt, dass Spieler 1 Wahl $v \in e$.

Beh: Wenn G perf. Matching besitzt, Spieler 2 verfährt nach Strategie und gewinnt.

Beweis. Angenommen Spieler 1 initial Knoten v_1. Da G perf. Matching, muss v_1 von Kante $e = \{v_1, v_2\} \in M$ gemacht sein. Spieler 2 wählt also v_2, bzw. e.

Fall 1: $\nexists$ Kante zwischen v_2 und ungewähltem Knoten. Dann gewinnt Spieler 2 gem. Spielregeln.

Fall 2: Spieler 1 wählt $e' = \{v_2, v_3\} \notin M$, weiterhin $e' \neq e$, da v_1 bereits gewählt wurde.

Also Spieler 2 wieder an der Reihe, $e' \notin M$. Also folgt Spieler 2 Strategie und wähl $e'' \in M$ mit $v_3 \in e''$. Kante e'' muss existieren, da v_3 zuvor nie gewählt wurde und G ein perfektes Matching besitzt.

Damit kann Spieler 2 immer gewinnen. $\square$

G hat kein perfektes Matching, dann gewinnt Spieler 1.

Strategie: Spieler 1 sucht größtes Matching M und wählt einen beliebigen ungematchten Knoten $v_1 \notin V(M)$. Bei jedem weiteren Zug: davor wählte Spieler 2 Knoten $v_2 \in V$, dann wählt Spieler 1 Kante $e \in M$, wobei $v_2 \in e$.

Beweis. S1 wählt $v \in V$ mit $v \notin V(M)$ (ex., da G mein perf. Matching hat).

Fall 1: $\nexists$ Kante e zw. v und ungewählten Kanten, dann gewinnt Spieler 1.

Fall 2: Spieler 2 wählt Kante $e = \{v_1, v_2\}$, da $v_1 \notin V(M) \implies e \notin M$. Dann Beh: $v_2 \in V(M)$.

Angenommen $v_2 \notin V(M)$. Dann sind v_1 und v_2 beide nicht in M gematcht und $M \cup \{e\}$ ein Matching. Dann $|M \cup \{e\}| > |M|$. ↯

Also $v_2 \in V(M)$, jedoch $e \notin M$. Damit wählt Spieler 1 jetzt Kante $e' \in M$, sodass $v_2 \in e'$.

Argument kann nch jedem Zug von S2 behauptet werden, also kann S1 die Strategie spielen.

Angenommen S2 würde gewinnen. Dann wählt S2 erste und letzte Kante, also $|B| = |A| + 1$ $\forall e \in B \implies e \notin M$ und $\forall e \in A \implies e \in M \implies B \cap M = \varnothing$, $A \cap M = A$.

Spiel startete bei ungematchten Knoten, Spiel muss bei ungematchten Knoten enden, da (1) letzten Knoten mit ungewählten Knoten vermatcht, so S1 wählt weiteren Knoten, also ist das Spiel nicht vorbei, (2) letzter Knoten auch nicht mit bes. Knoten gematcht, da bereits durch zuvor im Spiel gewählte Knoten gematct.

Pfad der S1 und S2 erzeugen wäre Verbesserungsweg für M. ↯ $\square$

Aufgabe 2

Vss: G bipart. Graph.
Beh: Ist M größtes Matching von G und U kleinste Überdeckung, dann gilt $|M| = |U|$.

Beweis. o. B. d. A. sei G zusammenhängend.
Sei M Matching von G und U eine Überdeckung von G. $\forall e, f \in M : e \neq f \implies e \cap f = \varnothing$. $\forall e \in E(G) \exists x \in U : x \in e$. Definiere $F : M \to U : F(e) = x \in e$.
Dann gilt $F(e) = F(f) \implies x \in e \wedge x \in f$. Also $e \cap f \neq 0$, also $e = f$. Also F injektiv. Also $|M| \leq |U|$.
Seien A, B Farbklassen und U kleinste Überdeckung von G. Bilde Matching N_1 von $A \cap U$ nach $B \setminus U$. Zeige Hall-Bedingung, um zu zeigen, dass das Matching existiert:
Ang. $|X| > |N_G(X)|$ für ein $X \subseteq A \cap U$. Betrachte $U' = (U \setminus X) \cup (N_G(X) \setminus U)$. Für $e \in E(G)$, $e = ab$ gilt:

- $a \in X \implies b \in N_G(X)$ und damit
- $e \cap U' = e \cap ((U \cup N_G(X)) \setminus X) \neq \varnothing$
- $a \in A \setminus X \implies a \in U \vee b \in U$.

Also $e \cap U' = e \cap ((U \cup N_G(X)) \setminus X) \neq \varnothing$
Damit ist U' Überdeckung von G mit $|U'| = \left|(U \setminus X) \dot\cup (N_G(X) \setminus U)\right| = |U \setminus X| + |N_G(X) \setminus U| < |U \setminus X| + |X| = |U \setminus X \cup X| = |U|$. Also $|U'| < |U|$ ↯
Analog existiert Matching N_2 von $B \cup U$ nach $A \setminus U$. $M = N_1 \dot\cup N_2$ ist Matching von G. Es gilt

$$
\begin{aligned}
|M| &= |N_1 \cup N_2| && (1)\\
&= |N_1| + |N_2| && (2)\\
&= |A \cup U| + |B \cap U| && (3)\\
&= |(A \cap U) \cup (B \cap U)| && (4)\\
&= |(A \cup B) \cap B| && (5)\\
&= |U| && (6)
\end{aligned}
$$

Für jedes weitere Matching M' von G dann gilt $|M'| \leq |U| = |M|$, also ist $|M'| \leq |M|$. Also ist M ein größtes Matching von G mit $|M| = |U|$. □