Adrian
Schollmeyer
WS23/24

Prüfungsaufgaben Graphen und Algorithmen

1|

Sei G Graph, $xy \in E(G)$, $B = (T_G, (X_s)_{s \in V(T_G)})$ minimale Baumzerlegung von G. Dann gilt für alle Minoren H von G: $\omega(H) \leq \omega(G)$, wobei $\omega(G)$ die Baumweite des Graphen G ist.

<u>Beweis.</u> Entstehe der Minor H aus dem Graphen G durch Ausführung einer der in der Definition genannten Operationen.

„Kontraktion": Sei $H = G/xy$ durch Kontraktion der Kante $xy \in E(G)$ aus G entstanden. Dabei sei z die Ecke, die anstelle von xy in G/xy eingefügt wurde. B sei die o.g. Baumzerlegung (BZ) von G.

Bilde Baumzerlegung $B' = (T_H, (X'_s)_{s \in V(T_H)})$ wie folgt aus B:

Für alle $s \in V(T_G)$:

(1) Ist $x, y \notin X_s$, so nimm $X'_s := X_s$ in B' auf.

(2) Ist $x \in X_s$ oder $y \in X_s$, so bilde $X'_s := (X_s \setminus \{x,y\}) \cup \{z\}$ und nimm X'_s in B' auf.

Dann gilt:

„(i)": Offensichtlich ist gem. Konstruktion $\bigcup_{s \in V(T_H)} X'_s = \left(\left(\bigcup_{s \in V(T_G)} X_s\right) \setminus \{x,y\}\right) \cup \{z\}$

$$\overset{B\ BZ}{=} (V(G) \setminus \{x,y\}) \cup \{z\} \underset{H}{\overset{\text{Konstr.}}{=}} V(H). \quad ✓$$

„(ii)": $\forall e \in E(H)\, \exists s \in V(T_H): V(e) \subseteq X'_s$. Denn:

Ist $z \notin V(e)$, ist $X'_s = X_s$, also $V(e) \subseteq X_s$, da B Baumzerlegung ist. Ist wiederum $z \in V(e)$, etwa $e = zv$, gibt es in B ein $s \in V(T_G)$ mit $\{xv\} \subseteq X_s$ oder $\{yv\} \subseteq X_s$. Gemäß Konstruktion gibt es dann X'_s in B' mit $\{zv\} \subseteq X'_s$. Also auch $V(e) \subseteq X'_s$. ✓

Prüfungsaufgaben Graphen und Algorithmen

„(iii)": $\forall p,q,s \in V(T_G)$: Komme q im p,s-Weg in T_G vor. Dann gilt $X_q \supseteq X_p \cap X_s$, da B BZ ist. Sei nun $x \in X_q$ oder $y \in X_q$. Dann ist $X_q' = (X_q \setminus \{x,y\}) \cup \{z\}$.

War zuvor $\{x\} \subseteq X_p \cap X_s$, so ist $\{z\} \subseteq X_p' \cap X_s'$ gem. Konstr. Analog für y statt x. Also gilt $X_q' \supseteq X_p' \cap X_s'$. ✓

Also ist B' BZ von H. Es gilt $\forall s \in V(T_G)$: $|X_s| \geq |X_s'|$. Somit gilt auch $\omega(H) \leq \omega(B') = \max\{|X_s'| \mid s \in V(T_G)\} - 1$
$\leq \max\{|X_s| \mid s \in V(T_G)\} - 1 = \omega(B) \overset{\min}{\underset{BZ}{=}} \omega(G)$. ✓

„Kante löschen": Sei H aus G durch Löschung von $xy \in E(G)$ entstanden, also $H = G - xy$. Da $V(H) = V(G)$ und keine Kanten hinzugekommen sind, ist B offensichtlich auch BZ von H. Also
$\omega(H) \leq \omega(B) = \omega(G)$. ✓

„Ecke löschen": Sei $x \in V(G)$, $H = G - x$. Konstruiere $B' = (T_H, (X_s')_{s \in V(T_H)})$ wie folgt: $\forall s \in V(T_G)$, setze $X_s' = X_s \setminus \{x\}$ und nimm X_s' in B' auf. Dann ist B' BZ, denn:

~~Dann gilt~~

„(i)": $\bigcup_{s \in V(T_G)} X_s' = \bigcup_{s \in V(T_G)} (X_s \setminus \{x\}) \overset{B\,BZ}{=} V(G) \setminus \{x\} = V(H)$ ✓

„(ii)": Sei $e \in E(H) \subseteq E(G)$. Dann $x \notin V(e)$ gem. Konstr. von H. Da B BZ ist, gibt es ein $s \in V(T_G)$: $V(e) \subseteq X_s$. Gemäß Konstr. von B' gibt es auch X_s' mit $X_s' = X_s \setminus \{x\} \supseteq V(e)$ (da $x \notin V(e)$). ✓

„(iii)": Seien $p,q,s \in V(T_G)$. Dann gibt es X_p, X_q, X_s aus B mit X_p', X_q', X_s' aus B' (gem. Konstr.) mit $X_p' = X_p \setminus \{x\}$, $X_q' = X_q \setminus \{x\}$, $X_s' = X_s \setminus \{x\}$.
Komme q im p,s-Weg in T_G vor. Dann
$X_q' = X_q \setminus \{x\} \supseteq X_p' \cap X_s' = (X_p \setminus \{x\}) \cap (X_s \setminus \{x\}) = (X_p \cap X_s) \setminus \{x\}$
$\Leftrightarrow X_q \supseteq X_p \cap X_s$. ✓

Also ist B' BZ von H.

Daher gilt $\omega(H) \leq \omega(B') = \max\{|K_s'| \mid s \in V(T_G)\} - 1$

$\leq \max\{|K_s| \mid s \in V(T_G)\} - 1 = \omega(B) = \omega(G)$.

2) Sei G Graph, 2-kantenzusammenhängend und 3-regulär. Dann besitzt G ein perfektes Matching.

Beweis.

Angenommen G besitzt kein perfektes Matching. Dann gilt nach dem Satz von Tutte $\exists S \subseteq V(G): q(G-S) > |S|$, wobei q die Anzahl ungerader Komponenten eines Graphen ist.

Zeige induktiv: $\forall S \subseteq V(G): q(G-S) \leq |S|$

IA: $S = \emptyset$.

Dann $G-S = G$, also $q(G-S) \overset{!}{=} 0$.

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)| \overset{3\text{-reg.}}{=} 3|V|$$

$$\Leftrightarrow |V(G)| = 2\frac{|E|}{3}$$

diese Zahl ist entweder nicht ganzzahlig oder gerade. Da $|V(G)| \in \mathbb{Z}$, muss sie gerade sein, also $q(G) = 0$. ✓

IS: Sei $S = S' \dot\cup \{x\}$, $x \in V(G)$ und gelte IV für S'.

Fall 1 Durch Aufnahme von x zu S wird $G-S$ in keine zusätzlichen Komponenten aufgespalten. Dann $q(G-S) = q(G-S') \overset{IV}{\leq} |S'| = |S| - 1$.

Fall 2 Durch Aufnahme von x zu S zerfällt $G-S$ in weitere Komponenten. Dann hat es aufgrund des 2-Kantenzusammenhangs zuvor eine $y \in S'$ gegeben, was in S' aufgenommen wurde, ohne den Graphen in weitere Komponenten zerfallen zu lassen (Fall 1). Dann gilt $q(G-S') < |S'|$, also auch $q(G-S) \leq q(G-S') + 1 \leq |S'| + 1 = |S|$.

Somit gilt in beiden Fällen $q(G-S) \leq |S|$. ✓

Also gilt gem. dem Satz von Tutte, dass G ein perfektes Matching besitzt. ∎

LS

3) Sei G Graph, $A, B \subseteq V(G)$, $\mathcal{F}$ die Menge aller Teilmengen $F \subseteq B$, für die es $|F|$ disjunkte a,b-Wege mit $a \in A$ und $b \in F$ ohne innere Ecken aus $A \cup B$ gibt. Dann ist $\mathcal{F}$ ein Matroid auf B.

<u>Beweis</u>

„(i)": $\emptyset \in \mathcal{F}$ trivial ✓

„(ii)": z.z.: $F \subseteq F' \in \mathcal{F} \Rightarrow F \in \mathcal{F}$.

„(iii)": z.z.: $\forall F, F' \in \mathcal{F}$ mit $|F| < |F'|$ $\exists e \in F' \setminus F$: $F \cup \{e\} \in \mathcal{F}$".

Induktiv über $|V(G)|$

IA: $V(G) = \emptyset$ trivial. ✓

IS: Sei $x \in V(G)$ und gelte (ii), (iii) für $G - x$. Dann gilt für $F \subseteq F'$ mit $x \in F'$: es gibt gem. IV $|F|$ viele offen disjunkte a,b-Wege mit $a \in A$ und $b \in F$ ohne innere Ecken aus $A \cup B$. Für $x \in F$ gibt es gem. IV $|F|-1$ solche Wege. Insbesondere gilt gem. IV $\forall v \in F' \setminus \{x\}$: $\{v\} \in \mathcal{F}$. Somit gibt es für jedes solche v einen offen disjunkten a,v-Weg ohne innere Ecken aus $A \cup F'$. Somit muss x einen offen disjunkten a,b-Weg mit $a \in A, b \in F'$ ohne innere Ecken aus $A \cup F'$ haben (denn sonst hätte F' nur $< |F'|$ solche Wege). Somit gilt (ii). ✓

Zeige (iii): Gilt für $x \notin F, F'$. Sei nun $x \in F'$. Da x bereits einen offen disjunkten a,b-Weg ohne innere Ecken aus $A \cup F'$ hat, hat auch $F \cup \{x\}$ $|F|+1$ viele offen disjunkte a,b-Wege ohne innere Ecken aus $A \cup F \cup \{x\}$. Also $F \cup \{x\} \in \mathcal{F}$ ✓

Also ist $\mathcal{F}$ ein Matroid.

13

4) Sei G ein Graph und $k \geq 1$. Dann ist

$$a \sim b :\Longleftrightarrow a = b \lor \text{es gibt } k \text{ kantendisjunkte } a,b\text{-Wege}$$

eine Äquivalenzrelation auf $V(G)$

__Beweis.__

„refl.": trivial ✓

„sym.": Da G ungerichtet, ist jeder a,b-Weg auch ein b,a-Weg. ✓

„trans.": z.z.: $a \sim b \land b \sim c \Rightarrow a \sim c \quad \forall a,b,c \in V(G)$

Sei $a \sim b$, $b \sim c$ für $a,b,c \in V(G)$. Dann $a=b$ oder es gibt k kantendisjunkte a,b-Wege und $b=c$ oder es gibt k kantendisjunkte b,c-Wege.

__Fall 1:__ $a=b$ oder $b=c$: trivial.

__Fall 2:__ $a \neq b$ und $b \neq c$.

Dann gibt es k kantendisjunkte a,b-Wege $P_1, \dots, P_k$ und k kantendisjunkte b,c-Wege $Q_1, \dots, Q_k$. Erzeuge die a,c-Wege $R_1, \dots, R_k$ wie folgt:

(*) Wähle einen zuvor noch nicht gewählten a,b-Weg $P_i = a, x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, b$. Für das kleinste $m \in \{0, \dots, \ell\}$, für das es einen zuvor noch nicht genutzten b,c-Weg $Q_j = b, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots, c$ gibt mit $x_m = y_n$, bilde den Weg $R_i = a, x_1, x_2, \dots, x_m, y_{n+1}, \dots, c$. Wiederhole (*).

Dieses Verfahren findet k viele kantendisjunkte a,c-Wege:

(1) Der Knoten $x_m = y_n$ existiert immer, da sich alle Wege spätestens bei Knoten b treffen. Daher können k Wege gebildet werden.

(2) Bis zum Knoten x_m sind die a,c-Wege jeweils kantendisjunkt, da sie auf kantendisjunkten a,b-Wegen liegen. Dahinter sind die Wege kantendisjunkt, weil sie auf kantendisjunkten b,c-Wegen liegen. Durch die Wahl von x_m wird nur der Teil des b,c-Weges benutzt, der sich nicht mit einem a,b-Weg überlagert (d.h. der keine Kante mit einem a,b-Weg gemeinsam hat). Somit sind die gebildeten a,c-Wege kantendisjunkt. $\lightning$

Also gibt es k kantendisjunkte a,c-Wege und $a \sim c$. ✓

Damit ist ~ eine Äquivalenzrelation auf G. ∎

Für gerichtete Graphen kann die Symmetrieeigenschaft von ~ verletzt werden (Beispiel: a hat nur ausgehende Kanten). ~~Also~~ Für den Fall offen disjunkter Wege lässt sich mit o.g. Verfahren im schlechtesten Fall höchstens ein a,c-Weg finden (nämlich dann, wenn alle a,c-Wege auch b enthalten oder irgendein anderer Artikulationspunkt existiert).
Somit ist ~ für den Fall offen disjunkte Wege nicht transitiv.
Also ist ~ in beiden Fällen keine Äquivalenzrelation.

5) Sei Q_d ein d-dimensionaler Hyperwürfel mit Ecken $x=(x_1,\dots,x_d)$ und $d\geq 1$. Dann ist Q_d d-zusammenhängend.

<u>Beweis.</u>

Nach dem Satz von Menger ist Q_d genau dann d-zusammenhängend, wenn es zwischen je zwei Ecken d offen disjunkte Wege gibt.

Zeige induktiv: Zwischen je zwei Ecke des Q_d gibt es d offen disjunkte Wege.

IA: $d=1$. Dann $Q_1=(\{(0),(1)\},\{\{(0),(1)\}\}$ trivial. ✓

IS: $d\to d+1$

Für Q_d existieren gem. IV d offen disjunkte s,t_1-Wege für alle $s\neq t\in V(Q_d)$.

Für Q_{d+1} lassen sich $d+1$ offen disjunkte Wege wie folgt finden:

Für jedes $s=(s_1,\dots,s_{d+1})\in V(Q_{d+1})$, $t=(t_1,\dots,t_{d+1})\in V(Q_{d+1}), s\neq t$

betrachte zunächst den Teilgraphen $Q'=Q_{d+1}[U]$ mit $U=\{u\in V(Q_{d+1})\mid u_{d+1}=s_{d+1}\}$ für ein $i\in\{1,\dots,d+1\}$, $b\in\{0,1\}$. Dies ist ein d-dimensionaler Hyperwürfel.

<u>Fall 1:</u> $s_{d+1}=t_{d+1}$. Dann sind s und t in Q' enthalten und es gibt d offen disjunkte s,t-Wege in Q'_{d+1}.

Ein solcher Weg sei $P=s,x_1,\dots,x_{\ell-1},t$. Bilde den Weg $P'=s,s',x_1',x_2',\dots,x_{\ell-1}',t',t$ aus P, indem hinter s der Nachbar $s'=(s_1,s_2,\dots,s_d,1-s_{d+1})$ und vor t der Nachbar $t'=(t_1,t_2,\dots,t_d,1-t_{d+1})$ eingefügt, sowie die Ecken $x_1,\dots,x_{\ell-1}$ durch Ecken $x_i'=(x_{i,1},x_{i,2},\dots,x_{i,d},1-x_{i,d+1})$, $i\in\{1,\dots,\ell-1\}$ ersetzt werden. Dieser Weg ist gemäß Konstruktion offen disjunkt zu den anderen s,t-Wegen, da er keine inneren Ecken aus Q' enthält. Somit existieren $d+1$ offen disjunkte s,t-Wege.

2

Fall 2 $s_{d+1} \neq t_{d+1}$

Q' sei wie zuvor definiert.
Sei $t' = (t_1, t_2, \dots, t_d, 1-t_{d+1})$. Dann liegt t' in Q und es gibt d viele offen disjunkte s,t'-Wege $P_i = s, x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,\ell-1}, t'$, $i \in \{1,\dots,d\}$. Bilde $d-1$ s,t-Wege $P_j' = s, x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,\ell-1}, x'_{j,\ell-1}, t$, wobei $x'_{j,\ell-1} = (x_{j,\ell-1,1}, x_{j,\ell-1,2}, \dots, 1-x_{j,\ell-1,d})$ und $j \in \{2,\dots,d\}$. Konstruiere $P_1' = s, x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,\ell-1}, t', t$. Auch dieser ist offen disjunkt zu den anderen $d-1$ s,t-Wegen.

Bilde $P_{d+1} = s, s', x'_{1,1}, x'_{1,2}, \dots, x'_{1,\ell-1}, t$. Dieser ist offen disjunkt zu den s,t-Wegen $P_2, \dots, P_d$, da diese gem. Konstruktion sich immer an mind. einem x_i unterscheiden (Unterschied für $i \in \{1,\dots,d\}$ aufgrund IV, für x_{d+1} aufgrund dessen, dass der Weg P_1, bei den $x_1, \dots, x_d$ gleich sind, an x_{d+1} einen anderen Wert für alle inneren Knoten hat). Somit gibt es $d+1$ offen disjunkte s,t-Wege. ✓

Also ist Q_{d+1} $d+1$-zusammenhängend. ∎

6/ Sei $G=(V,E)$ unvollständiger k-färbbarer Graph, $k \geq 2$ und $|E| < (k-1)|V| - \binom{k}{2}$. Dann besitzt G wenigstens zwei k-Färbungen.

Beweis.

Fall 1: $\chi(G) < k$. Dann sei $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_{k-1}\}$ eine $(k-1)$-Färbung. Bilde $\mathcal{C}' = \{C_1, \dots, C_{k-2}, C_{k-1} \setminus \{x\}, \{x\}\}$ für $x \in V(G)$. Dann ist $\mathcal{C}'$ eine k-Färbung von G. Wiederhole diesen Vorgang für $y \in V(G)$, $y \neq x$ analog, so erhält man eine weitere, von $\mathcal{C}'$ verschiedene k-Färbung von G. ✓

Fall 2: $\chi(G) = k$.

Angenommen G habe nur eine k-Färbung $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$.
Sei $x \in C_1$. Dann enthält für $i \in \{2, \dots, k\}$ die C_1, C_i-Kempe-Kette, die x enthält, auch alle $v \in C_1 \cup C_i$, denn sonst ließe sich durch Kempe-Tausch eine weitere k-Färbung finden. Damit ist auch jede Kante von G in genau einer Kempe-Kette enthalten und die Anzahl Kanten im Graphen ist durch die Summe der Kanten von Spannbäumen der Kempe-Kette nach unten beschränkt, d.h. $|V(G[C_i \cup C_j])| \geq |C_i \dot{\cup} C_j| - 1$, $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$:

$$|E| \geq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} (|C_i \dot{\cup} C_j| - 1) = \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} |C_i| + |C_j| \right) - \binom{k}{2}$$

$$= (k-1) \sum_{i=1}^{k} |C_i| - \binom{k}{2} = (k-1)|V| - \binom{k}{2}$$

$$> |E| \qquad \lightning$$

Also besitzt G wenigstens zwei k-Färbungen. ■

7) Sei G kritisch k-chromatisch, $k \geq 2$. Dann ist G $(k-1)$-kantenzusammenhängend.

Beweis:

Angenommen G sei nicht $(k-1)$-kantenzusammenhängend. Dann gibt es einen Schnitt $S=(X, V(G)\setminus X)$ mit $|E(S)| < k-1$, wobei

$E(S) := \{xy \in E(G) \mid x \in X, y \in V(G)\setminus X\}$ und $G-S := G - E(S)$.

Da $G-S$ Teilgraph von G und $G-S \neq G$ und G kritisch k-chromatisch, gibt es eine $(k-1)$-Färbung $\mathcal{C}$ von $G-S$. Seien $x_1, \dots, x_{|E(S)|} \in X$ und $y_1, \dots, y_{|E(S)|} \in V(G)\setminus X$ genau die Ecken mit $x_i y_i \in E(S)$, $i \in \{1, \dots, |E(S)|\}$. Dann sind $x_1, \dots, x_{|E(S)|}$ und $y_1, \dots, y_{|E(S)|}$ jeweils in maximal $k-2$ Farbklassen.

Verändere die Färbung von $G-S$ wie folgt iterativ:

(*) Betrachte $x \in X$ mit $xy \in E(S)$.

Fall 1 x, y sind in verschiedenen Farbklassen. Dann setze $E(S) := E(S) \setminus \{x, y\}$.

Fall 2 x, y sind in Farbklasse A und es gibt $B \in \mathcal{C}$, sodass x, y in versch. A,B-Kempe-Ketten von $G-S$ liegen. Dann wende Kempe-Tausch auf der A,B-Kempe-Kette an, die y enthält. Setze $E(S) := E(S) \setminus \{xy\}$.

Fall 3 x, y sind in Farbklasse A und für alle Farbklassen $B \in \mathcal{C}$ mit $N_G(\{x\}) \cap B \neq \emptyset$ liegen x und y in derselben A,B-Kempe-Kette. Da es höchstens $k-2$ solcher Farbklassen geben kann, jedoch $|\mathcal{C}| = k-1$, wähle ein $C \in \mathcal{C} \setminus \{B \in \mathcal{C} \mid N_G(\{x\}) \cap B \neq \emptyset\}$. Setze $C := C \,\dot\cup\, \{x\}$, $A := A \setminus \{x\}$, $E(S) := E(S) \setminus \{x, y\}$.

Iteriere (*), solange $E(S) \neq \emptyset$.

Gemäß Konstruktion entsteht hierbei eine $(k-1)$-Färbung von G, also $\chi(G) \leq k-1$. ↯

Somit ist G $(k-1)$-kantenzusammenhängend. ■

17