

Vorlesung

# Graphen und Algorithmen

Prof. Dr. Matthias Kriesell

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Bäume</b>	<b>3</b>
1.1. Breiten- und Tiefensuchbäume . . . . .	3
1.1.1. Breitensuche . . . . .	7
1.1.2. Tiefensuche . . . . .	9
1.2. Bäume kleinsten Gewichtes und Matroide . . . . .	11
<b>2. Matchings</b>	<b>14</b>
2.1. Matchings in bipartiten Graphen . . . . .	14
<b>A. Lektüre</b>	<b>17</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>18</b>

# 1. Bäume

## 1.1. Breiten- und Tiefensuchbäume

**1.1.** Ein (einfacher, ungerichteter) **Graph** ist ein paar  $G = (V, E)$ , bestehend aus einer Menge  $V$  von **Ecken** (engl. *vertices*) und einer Menge  $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x \neq y \text{ aus } V\}$  von **Kanten** (engl. *edge*).

$$V(G) := V \quad (1.1)$$

$$E(G) := E \quad (1.2)$$

Für Kanten wird auch üblicherweise die Schreibweise  $xy$  anstelle von  $\{x, y\}$  benutzt. Also ist auch  $xy = yx$ . In alter Literatur wurde teilweise auch  $x \in G$  und  $e \in G$  anstelle von  $x \in V$  und  $e \in E$  benutzt. Diese Schreibweise wird nicht mehr benutzt!

In dieser Definition wurden nur einfache ungerichtete Graphen definiert. Es gibt jedoch auch Definitionen für gerichtete Graphen (also  $xy \neq yx$ ) und Graphen mit Mehrfachkanten (Graphen mit mehreren unterschiedlichen Kanten  $xy$ ). Es kommt bei einfachen, ungerichteten Graphen also nur darauf an, wie die Knoten miteinander verbunden sind, nicht wie häufig oder in welche Richtung! Insbesondere ist es auch egal, wie man einen Graphen zeichnet, solange die Anzahl Knoten und die Verbindungen zwischen den Knoten passen. Als Beispiel seien hier zwei Zeichnungen des PETERSEN-Graphs in [Abbildung 1.1](#) gezeigt.

Zeichnung  
1.1

Abbildung 1.1.: Zwei Varianten des gleichen Graphen (PETERSEN-Graph)

**1.2.** Für  $xy \in E$  sind  $x, y \in V$  **benachbart** bzw.  $x$  ist **Nachbar** von  $y$ .

Alle benachbarten Graphen seien **endlich** ( $G$  endlich  $\iff V$  (und  $E$ ) sind endlich).

**1.3.** Ein Graph  $H$  heißt **Teilgraph** des Graphen  $G$  (in Zeichen:  $H \leq G$ ), falls  $V(H) \subseteq V(G)$  und  $E(H) \subseteq E(G)$ .

Für Teilgraphen ist zu beachten, dass nicht jede Kombination aus  $V' \subseteq V(G)$  und  $E' \subseteq E(G)$  ein Graph ist. Werden beispielsweise Kanten in  $E'$  aufgenommen, die Knoten enthalten, welche nicht in  $V'$  enthalten sind, ist das resultierende Paar  $H = (V', E')$  *kein*

Graph und damit auch kein Teilgraph von  $G$ . Man kann jedoch Teilgraphen basierend auf einer Teilmenge von  $V(G)$  konstruieren.

**1.4.** Für  $X \subseteq V(G)$  sei

$$G[X] := (X, \{xy \in E(G) \mid x, y \in X\}) \quad (1.3)$$

Ein solcher Graph  $G[X]$  heißt dann der von  $X$  **induzierte** Teilgraph.  
Für  $F \subseteq E(G)$  sei

$$G[F] := (V(G), F) \quad (1.4)$$

der von  $F$  **induzierte** Teilgraph.  
Es gilt  $G[X] \leq G$  und  $G[F] \leq G$ .

bild 1.2a  
und 1.2b

Abbildung 1.2.: Induzierter Teilgraph

**1.5.** Für  $X \subseteq V(G)$  entsteht

$$G - X := (V(G) \setminus X, \{xy \in E \mid x, y \in V(G) \setminus X\}) \quad (1.5)$$

$$= G[V(G) \setminus X] \quad (1.6)$$

durch **Löschung** der Ecken in  $X$  aus  $G$ .

Für  $F \subseteq E(G)$  entsteht

$$G - F := (V(G), E(G) \setminus F) \quad (1.7)$$

$$= G[E(G) \setminus F] \quad (1.8)$$

durch **Löschung** der Kanten in  $F$  aus  $G$ .

Besteht  $X$  aus nur einer Ecke  $x$ , so wird auch die Notation  $G - x := G - \{x\}$  benutzt. Analog wird  $G - e := G - \{e\}$  für  $F = \{e\}$  benutzt. Es gilt wieder  $G - X \leq G$  und  $G - F \leq G$ , also auch  $G - x \leq G$  und  $G - e \leq G$ .

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Definition von Zusammenhang.

**1.6.** Für zwei Ecken  $a, b \in E(G)$  heißt eine nichtleere Folge  $P = x_0, \dots, x_l$  von paarweise verschiedenen Ecken  $x_j$  mit

$$x_0 = a \quad (1.9)$$

$$x_l = b \quad (1.10)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, l\} : x_{i-1}x_i \in E(G) \quad (1.11)$$

ein **Weg** von  $a$  nach  $B$  der **Länge**  $l$ , auch  $a, b$ -**Weg** genannt.

Die Ecken  $a, b$  dieses Weges heißen **Endecken**, alle anderen sind **innere Ecken**.

Besonders zu beachten ist hierbei, dass die Länge des Weges 1 kleiner ist als die Anzahl Knoten in  $P$ ! Für den Weg können auch Kanten- und Knotenmengen definiert werden:

**1.7.**

$$V(P) := \{x_0, \dots, x_l\} \quad (1.12)$$

$$E(P) := \{x_{i-1}x_i : i \in \{1, \dots, l\}\} \quad (1.13)$$

$(V(P), E(P))$  ist auch wieder ein Teilgraph und wird manchmal auch  $a, b$ -Weg (also wie oben) genannt. Diese Teilgraphen sind immer kreisfrei, da gemäß Definition die Ecken  $x_j \in V(P)$  paarweise verschieden sind. Insbesondere sind auch einzelne Kanten oder auch einzelne Knoten Wege.

Aus der Teilgraphendarstellung eines Weges lässt sich die Folgendarstellung (bis auf die Durchlaufrihtung) zurückgewinnen.

**1.8.** Mit  $a \sim_G b \iff \exists a, b$ -Weg in  $G$  wird eine Äquivalenzrelation auf  $V(G)$  definiert. Die Äquivalenzklassen heißen **Zusammenhangskomponenten** oder **Komponenten**. Auch die von den Komponenten induzierten Teilgraphen heißen **Komponenten**.

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, da sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Die Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich erfüllt, da der Graph ungerichtet ist und für jeden  $a, b$ -Weg auch immer ein  $b, a$ -Weg existiert. Für die Transitivität kann man einen  $a, b$ -Weg und  $b, c$ -Weg im Graphen betrachten. Um einen  $a, c$ -Weg zu finden, verfolge man den  $a, b$ -Weg, bis man auf einen Knoten stößt, der auf dem  $b, c$ -Weg liegt. Verfolgt man ab hier den  $b, c$ -Weg, hat man einen  $a, c$ -Weg gefunden.

bild 1.3

Abbildung 1.3.:  $a, b$ -Weg und  $b, c$ -Weg in einem Graphen

**1.9.** Ein Graph mit höchstens einer Komponente heißt **zusammenhängend**. Ist ein Graph nicht zusammenhängend, so heißt er **unzusammenhängend**.

Als abkürzende Schreibweisen werden in dieser Vorlesung auch *zshgd* und *zh* für „zusammenhängend“ benutzt.

**1.10.** Ein Graph  $T$  heißt **Baum**, falls  $T$  zusammenhängend ist und  $T - e \forall e \in E(T)$  unzusammenhängend ist.  $T$  ist also **minimal zusammenhängend**.

**1.11.** Ein **Wald** ist ein Graph, dessen Komponenten Bäume sind. Ein zusammenhängender Wald ist ein Baum.

**Verfahren 1.1:** Sei  $x_0 \in V(G)$ . (\*) Wenn es unter den bereits gewählten Ecken  $x_0, x_1, \dots, x_l$  eine Ecke  $x_t$  gibt, die einen Nachbarn  $y \in V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_l\}$  besitzt, dann setze  $x_{l+1} = y$  und  $f(l+1) := t$  und iteriere (\*).

**Satz 1.1.** *Verfahren 1.1 endet mit einem Teilbaum.*

$$T := (\{x_0, \dots, x_l\}, \{x_t x_{f(t)} \mid t \in \{1, \dots, l\}\}). \quad (1.14)$$

Dabei ist  $\{x_0, \dots, x_l\} = V(T)$  die Komponente von  $G$ , die  $x_0$  enthält.

Ein Beispiel dafür ist [Abbildung 1.4](#). Das Verfahren ist nicht deterministisch, da in jedem Schritt ein Nachbar eines beliebigen Knotens aus der Menge gewählt werden kann.

Abbildung 1.4.: Erzeugung eines Baums aus einem PETERSEN-Graph

Bemerkung: Für  $t \in \{0, \dots, l\}$  liefert  $x_t, x_{f(t)}, x_{f(f(t))}, \dots, x_0$  den  $x_t, x_0$ -Weg in  $T$ .

**Beweis.** Das Verfahren endet, weil in jedem Schritt die Folge  $x_0, \dots, x_n$  um eine noch nicht dort enthaltene Ecke  $x_{l-1}$  vergrößert wird und  $V(G)$  endlich ist.

Sei  $T_s = (\{x_0, \dots, x_s\}, \{x_t x_{f(t)} \mid t \in \{1, \dots, s\}\})$ . Zeige induktiv über  $s$ , dass  $T_s$  ein Teilbaum von  $G$  ist.

Für  $s = 0$ :  $T_0 = (\{x_0\}, \emptyset)$  ist Teilbaum. ✓

Sei nun  $T_0, \dots, T_s$  Teilbaum von  $G$ . **z:** Auch  $T_{s+1}$  ist ein Teilbaum von  $G$ .

Nach IV gibt es in  $T_j$  für jedes  $j \in \{0, \dots, s\}$  einen  $x_j, x_0$ -Weg, also gilt  $x_j \sim_G$  Wegen lücke

$x_{s+1}x_{f(s+1)} \in E(T_{s+1})$  gilt auch  $x_{s+1} \sim x_{f(s+1)}$ , also

$$\forall j \in \{0, \dots, s\} : x_{s+1} \sim_{T_{s+1}} x_0 \quad (1.15)$$

$$\iff \forall i, j \in \{0, \dots, s+1\} : x_i \sim_{T_{s+1}} x_j \quad (1.16)$$

$$\implies T_{s+1} \text{ zusammenhängend} \quad (1.17)$$

$$\mathfrak{z} : T_{s+1} - e \text{ unzusammenhängend } \forall e \in E(T_{s+1}) \quad (1.18)$$

Für  $e = x_{s+1}x_{f(s+1)}$  ist  $x_{s+1}$  zu keiner Kante in  $T_{s+1} - e$  inzident; insbesondere gibt es keinen  $x_{s+1}, x_0$ -Weg in  $T_{s+1} - e$ . Für  $e \in E(T_{s+1}) \setminus \{x_{s+1}x_{f(s+1)}\} = E(T_s)$  ist nach IV zumindest  $T_s - e$  unzusammenhängend. Daher existieren  $a, b \in V(T_s - e) = V(T_s)$  so, dass kein  $a, b$ -Weg in  $T_s$  existiert.

Gäbe es einen  $a, b$ -Weg  $P$  in  $T_{s+1} - e$ , so enthält  $P$  die Kante  $x_{s+1}x_{f(s+1)}$  oder die Ecke  $x_{s+1}$ . In beiden Fällen enthält  $P$  die Ecke  $x_{s+1}$  und zwar als *innere Ecke*. Aber  $x_{s+1}$  ist in  $T_{s+1}$  mit nur einer Kante inzident (nämlich  $x_{s+1}x_{f(s+1)}$ ) und kann daher nicht innere Ecke eines Weges in  $T_{s+1}$  sein.  $\nexists$

Folglich gibt es keinen solchen  $a, b$ -Weg in  $T_{s+1}$ . Entsprechend ist  $T_{s+1} - e$  unzusammenhängend. Somit ist  $T_{s+1}$  ein Baum.

Sei  $H$  (bzw.  $V(H)$ ) die Komponente von  $G$ , die  $x_0$  enthält.  $\mathfrak{z} : V(T) = V(H)$ .

$T$  ist zusammenhängender Teilgraph von  $G$ , der  $x_0$  enthält. Daher  $V(T) \subseteq V(H)$ .

$\mathfrak{z} : V(T) \not\subseteq V(H)$ .

Andernfalls gäbe es ein  $z \in V(H) \setminus V(T)$ . Da  $H$  zusammenhängend ist und  $x_0 \in V(H)$  existiert ein  $z, x_0$ -Weg  $Q$  in  $H$ .

$$Q = \underbrace{y_0, y_1, \dots, y_k}_{=z} \quad (1.19)$$

Daher existiert  $j \in \{0, \dots, k\}$  mit  $y_j \in V(T)$  und  $y_{j+1} \notin V(T)$ . Also ist  $y_{j+1} = x_t$  für  $t \in \{0, \dots, l\}$ . Also existiert nach Abbruch der Iteration von [Verfahren 1.1](#) mit  $x_0, \dots, x_l$  eine Ecke  $y = y_{j+1} \in V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_l\}$  mit einem Nachbarn  $x_t, t \in \{0, \dots, l\}$ .  $\nexists$

Somit ist  $V(H) = V(T)$ .  $\square$

**1.12.** Ein Teilgraph  $H$  von  $G$  heißt **aufspannend**, falls  $V(H) = V(G)$ . Ein Teilbaum von  $G$  heißt **Spannbaum**, falls er aufspannend ist.

[Verfahren 1.1](#) liefert also einen Spannbaum derjenigen Komponente von  $G$ , die  $x_0$  enthält. Die gezielte Auswahl des ältesten oder jüngsten gesehenen Nachbarn in [Verfahren 1.1](#) führt zu **Breitensuche** bzw. **Tiefensuche**.

### 1.1.1. Breitensuche

**1.13.** Die Länge eines kürzesten  $a, b$ -Weges im Graphen  $G$  heißt **Abstand** von  $a, b$ . Bezeichnung:  $d_G(a, b)$ .

Gibt es keinen solchen Weg, so setze  $d_G(a, b) = \infty$ .

Also  $\min \{ |E(P)| : P \text{ ein } a, b\text{-Weg} \} \cup \{ \infty \} = d_G(a, b)$ . Als Beispiel sei hier [Abbildung 1.5](#) gezeigt. Indem man irgendeinen Pfad im Graphen sucht, kann man zwischen zwei Ecken  $a, b$  immer eine obere Schranke für  $d_G(a, b)$  finden. Durch systematisches Aufspannen des Graphen mit Breitensuche kann man den Abstand aller Ecken zu  $a$  im Graphen und damit auch  $d_G(a, b)$  bestimmen.

Abbildung 1.5.: Weg und Abstände zwischen zwei Punkten in einem Dodekaeder

zeichnung  
1.5

**Satz 1.2.**  $d_G : V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  ist für zusammenhängende  $G$  eine **Metrik**, also

- (1)  $d_G(a, b) \geq 0$  und  $d_G(a, b) = 0 \iff a = b$
- (2)  $d_G(a, b) = d_G(b, a) \forall a, b \in V(G)$
- (3)  $d_G(a, b) + d_G(b, c) \leq d_G(a, c) \forall a, b, c \in V(G)$

**Beweis.** Siehe Übung. □

**1.14.** Sei  $G$  zusammenhängend und  $x_0$  eine Ecke von  $G$ . Ein Spannbaum  $T$  von  $G$  heißt **Breitensuchbaum** (BFS-Tree, Breadth-First-Search-Tree) bei  $x_0$ , falls  $d_T(z, x_0) = d_G(z, x_0) \forall z \in V(G)$ .

**Verfahren 1.2** (Breitensuche): (\*) Wenn es unter den bereits gewählten Ecken  $x_0, \dots, x_l$  eine Ecke  $x_t$  gibt, die einen Nachbarn  $y \in V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_l\}$  hat, wähle  $x_t$  so, dass  $t$  kleinstmöglich ist. Iteriere (\*).

[Verfahren 1.2](#) erzwingt, dass wir immer die Nachbarn in den Baum aufnehmen, die wir schon am längsten kennen.

**Satz 1.3** (Breitensuche). [Verfahren 1.2](#) endet mit einem Breitensuchbaum

$$T = (\{x_0, \dots, x_l\}, \{x_t x_{f(t)} \mid t \in \{1, \dots, l\}\}) \quad (1.20)$$

von  $G$  bei der Ecke  $x_0$ .

**Beweis.** Nach [Satz 1.1](#) endet das Verfahren mit einem Spannbaum  $T$  von  $G$ . Offenbar gilt:  $d_G(x_0, x_0) = d_T(x_0, x_0)$ .

$\mathbb{Z}$ : Induktiv über  $s$ :

$$d_G(x_s, x_0) = d_T(x_s, x_0) \geq d_T(x_{s-1}, x_0) \text{ für } s > 0. \quad (1.21)$$

Die Behauptung [\(1.21\)](#) gilt für  $s = 0$ . Sei nun die Behauptung „bis“  $s$  bewiesen (IV).

$\mathbb{Z}$ : [\(1.21\)](#) gilt für  $s + 1$  anstelle von  $s$ .



Sei  $P$  ein kürzester  $x_{s+1}, x_0$ -Weg in  $G$  und sei  $x_j$  die erste Ecke in der Folgenderstellung von  $P$  mit  $j \leq s$ . Nach Wahl von  $f(s+1)$  gibt es kein  $x_t$  mit  $t < f(s+1)$ , die einen Nachbarn außerhalb in  $V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_s\}$ . Daher ist  $j \geq f(s+1)$ . Daher gilt:

$$d_T(x_{s+1}, x_0) \stackrel{T \leq G}{\geq} d_G(x_{s+1}, x_0) \quad (1.22)$$

$$\geq 1 + d_G(x_j, x_0) \quad \text{da } x_j \text{ nicht die erste Ecke auf } P \quad (1.23)$$

$$\geq 1 + d_G(x_{f(s+1)}, x_0) \quad \text{Monotonie von } (d_G(x_0, x_0), d_G(x_1, x_0), \dots) \quad (1.24)$$

$$\stackrel{\text{(IV)}}{=} 1 + d_T(x_{f(s+1)}, x_0) \quad (1.25)$$

$$= d_T(x_{s+1}, x_0) \quad (1.26)$$

Also gilt überall Gleichheit, insbesondere:

$$d_T(x_{s+1}, x_0) = d_G(x_{s+1}, x_0) \quad (1.27)$$

Für  $s = 0$  gilt sowieso:

$$d_T(x_{s+1}, x_0) \geq 0 = d_T(x_s, x_0) \quad (1.28)$$

Für  $s > 0$ : Nach Wahl von  $f(s)$  gibt es kein  $x_t$  mit  $t < f(s)$ , das einen Nachbarn außerhalb von  $x_0, \dots, x_{s-1}$  hat. Daher gilt  $f(s+1) \geq f(s)$ . Die Monotonieeigenschaft in der Induktionsvoraussetzung zeigt:

$$d_T(x_{s+1}, x_0) = d_T(x_{f(s+1)}, x_0) + 1 \quad (1.29)$$

$$\geq d_T(x_{f(s)}, x_0) + 1 \quad \text{da } f(s+1) \geq f(s) \wedge f(s+1) < s+1 \quad (1.30)$$

$$= d_T(x_s, x_0). \quad (1.31)$$

Dies zeigt (1.21). Also ist  $T$  Breitensuchbaum.  $\square$

### 1.1.2. Tiefensuche

**1.15.** Ein Spannbaum  $T$  eines zusammenhängenden Graphen  $G$  heißt ein **Tiefensuchbaum** bei  $x_0$  ( $x_0 \in V(G)$ ), auch **DFS-Tree** (Depth-First-Search), falls für jedes  $xy \in E(G)$  die Ecke  $y$  in dem  $x, x_0$ -Weg von  $T$  vorkommt oder die Ecke  $x$  in dem  $y, x_0$ -Weg von  $T$  vorkommt.

**Verfahren 1.3** (Tiefensuche): Sei  $x_0$  Ecke des zusammenhängenden Graphen  $G$ .

(\*) Wenn es unter den bereits gewählten Ecken  $x_0, \dots, x_l$  eine Ecke  $x_t$  gibt, die einen Nachbarn  $y \in V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_l\}$  hat, wähle  $x_t$  so, dass  $t$  größtmöglich ist. Iteriere (\*).

Das Verfahren wählt zunächst immer den längstmöglichen Weg. Am Anfang wird ein sehr langer Weg durch den Graphen gewählt, bis man sich nicht mehr weiter von der Wurzel entfernen kann. Im Beispiel des PETERSEN-Graph (Abbildung 1.6) reicht dies sogar so weit, ein Tiefensuchbaum völlig unverzweigt ist.

Abbildung 1.6.: Tiefensuche in einem PETERSEN-Graph

Ist dies nicht der Fall, geht man zunächst so weit wie möglich. Danach geht man so wenig wie möglich wieder zurück, bis man eine Ecke findet, die noch nicht in  $V(T)$  ist. Jeden dieser Pfade, die sich ohne Backtracking finden lassen, können als Segmente im Baum betrachtet werden. Sobald man in einem solchen Segment einmal Backtracking gemacht hat, kann man keine Ecken mehr finden, die tiefer in diesem Segment Anschluss haben. Dies wird später im Beweis gezeigt.

**Satz 1.4** (Tiefensuche). *Das Verfahren endet mit einem Tiefensuchbaum*

$$T = (\{x_0, \dots, x_l\}, \{x_t x_{f(t)} \mid t \in \{1, \dots, l\}\}) \quad (1.32)$$

von  $G$  bei der Ecke  $x_0$ .

**Beweis.** Durch [Satz 1.1](#) endet das Verfahren mit einem Spannbaum  $T$  von  $G$ .

$\mathbb{Z}$ : Induktiv über  $s$ :

- (a) Unter den Ecken  $x_0, \dots, x_s$  haben nur die Ecken des  $x_s, x_0$ -Weges in  $T$  Nachbarn in  $V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_s\}$ .
- (b) Für  $s > 0$  sind unter den Ecken  $x_0, \dots, x_{s-1}$  nur die Ecken des  $x_{f(s)}, x_0$ -Weges in  $T$  zu  $x_s$  benachbart.

Für  $s = 0$  gelten (a) und (b) offensichtlich. Nehmen wir nun an, dass die beiden Aussagen „bis“  $s$  gelten (IV).

$\mathbb{Z}$ : (a) und (b) gelten sinngemäß für  $s + 1$  anstelle von  $s$ .

Nach IV (a) liegt  $x_{f(s+1)}$  auf dem  $x_s, x_0$ -Weg. Sei nun  $x_j, j \leq s + 1$  zu einer Ecke  $y \neq x_j$  in  $G$  außerhalb von  $x_0, \dots, x_s$  benachbart. Für  $j \leq s$  liegt  $x_j$  auf dem  $x_s, x_0$ -Weg in  $T$  (IV). Nach Wahl von  $x_{s+1}$  kann kein  $x_t$  mit  $t > f(s + 1), t \leq s$ , Nachbarn in  $G$  außerhalb von  $x_0, \dots, x_s$  haben. Folglich gilt  $j \leq f(s + 1)$ .

Die Folge der Indizes  $s, f(s), f(f(s)), \dots, 0$  entlang des  $x_s, x_0$ -Weges in  $T$  ist absteigend. Also liegt  $x_j$  auf dem  $x_{f(s+1)}, x_0$ -Weg in  $T$ . Damit ist der Induktionsschluss für (b) erbracht und  $x_j$  liegt auf dem  $x_{s+1}, x_0$ -Weg in  $T$ . Für  $j = s + 1$  gilt letzteres trivialerweise! Damit ist der Induktionsschluss für (a) erbracht.

Aus (b) folgt: für  $x_s x_j \in E(G)$  mit  $j < s$ :  $x_j$  liegt auf dem  $x_s, x_0$ -Weg. Somit gilt  $\forall xy \in E(G) : y$  liegt auf dem  $x, x_0$ -Weg oder  $x$  liegt auf dem  $y, x_0$ -Weg.  $\square$

**1.16.** Ist  $T$  ein Baum und  $x_0 \in V(T)$ , so wird durch

$$y \leq z : \iff y \text{ liegt auf dem } x_0, z\text{-Weg in } T \quad (1.33)$$

eine Ordnung auf  $V(T)$  definiert.

Folglich ist ein Spannbaum  $T$  des Graphen  $G$  genau dann ein Tiefensuchbaum von  $G$  bei  $x_0$ , wenn die Endecken jeder Kante von  $G$  bzgl  $\leq$  vergleichbar sind.

Name für  
def.

## 1.2. Bäume kleinsten Gewichtes und Matroide

Als nächstes betrachten wir gewichtete Graphen. Diese können in der Realität bspw. Kosten (bspw. Fahrzeit) entsprechen.

**1.17.** Sei  $G$  ein Graph. Ein **Kreis** der **Länge**  $l \geq 3$  in  $G$  ist eine Folge  $C = x_0, \dots, x_{l-1}, x_0$  derart, dass  $x_0, \dots, x_{l-1}$  ein Weg ist und  $x_{l-1}x_0 \in E(G)$ . Setze

$$V(C) = \{x_0, \dots, x_{l-1}\} \subseteq V(G) \quad (1.34)$$

$$E(C) = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{l-2}x_{l-1}, x_{l-1}x_0\} \subseteq E(G) \quad (1.35)$$

Auch der Teilgraph  $(V(C), E(C))$  heißt **Kreis**.

Aus dem Teilgraphen lässt sich die Folgendarstellung bis auf Startecke und Durchlaufrichtung vollständig rekonstruieren. Insgesamt gibt es  $2l$  mögliche Folgen, die sich aus dem Teilgraphen rekonstruieren lassen (eine Folge pro Ecke und Durchlaufrichtung).

Zudem ist ein Graph ohne Kreise ein **Wald** und ein zusammenhängender Graph ohne Kreise ein **Baum**.

**1.18.** Für einen Graphen  $G$  heißt  $F \subseteq E(G)$  **kreisfrei**, falls  $G[F] = (V(G), F)$  keinen Kreis enthält (also ein Wald ist).

**Übung:** Für einen nichtleeren Wald  $G$  mit  $c$  Komponenten gilt:

$$|E(G)| = |V(G)| - c \quad (1.36)$$

Für einen Baum mit einer Ecke ist dies trivialerweise wahr. Für größere Bäume kann man induktiv immer eine Blatt finden, was man löschen kann. Für diesen verkleinerten Baum gilt die Aussage dann gemäß IV. Durch erneutes Anhängen des Blattes kann man dann zeigen, dass die Gleichung gilt. Wenn man eine Ecke löscht, die kein Blatt ist, ist der Graph nicht mehr zusammenhängend und damit wächst  $c$  um 1. Das gleicht die Verringerung der Anzahl Kanten wieder aus.

**Satz 1.5** (Austauschlemma für Graphen). *Sind  $F, F'$  zwei kreisfreie Kantenmengen des Graphen  $G$  mit  $|F| < |F'|$ , so gibt es eine Kante  $e \in F' \setminus F$  mit  $F \cup \{e\}$  kreisfrei.*

**Beweis.** Seien  $c, c'$  die Anzahlen der Komponenten von  $G[F]$  bzw.  $G[F']$ . Wäre die Eckenmenge jeder Komponente von  $G[F]$  ganz in der Eckenmenge einer Komponente

von  $G[F]$  enthalten, so folgt  $c' > c$ . Es gilt aber

$$c' = |V(G[F'])| - |E(G[F'])| \quad (1.37)$$

$$= |V(G)| - \underbrace{|F'|}_{> |F|} \quad (1.38)$$

$$< |V(G)| - |F| \quad (1.39)$$

$$= |V(G[F])| - |E(G[F])| \quad (1.40)$$

$$= c \quad (1.41)$$

Also gibt es eine Komponente von  $G[F]$  mit Endpunkten in mindestens zwei Komponenten von  $G[F]$ . Also gibt es eine Kante  $e = wz$  in  $F' \setminus F$  mit Endpunkten in verschiedenen Komponenten von  $G[F]$ . Dann ist auch  $F' \cup \{e\}$  kreisfrei.  $\square$

Eine vergleichbare Eigenschaft ist auch in Vektorräumen zu beobachten. Bekannt ist dies als das Ergänzungslemma oder Austauschlemma von STEINITZ. Sind  $F, F'$  zwei linear unabhängige Teilmengen im Vektorraum  $V$  über  $K$  und ist  $|F| < |F'| < \infty$ , so gibt es einen Vektor  $\vec{x} \in F' \setminus F$ , sodass  $F \cup \{\vec{x}\}$  linear unabhängig bleibt.

Die maximal kreisfreien Teilmengen eines zusammenhängenden Graphen  $G$  sind genau die Kantenmengen seiner Spannbäume. Spannbäume lassen also sich nicht nur darüber charakterisieren, dass sie minimal zusammenhängen sind, sondern auch maximal kreisfrei. Je zwei Spannbäume haben dieselbe Mächtigkeit, nämlich  $|V(G)| - 1$ .

Im Folgenden wird mit einer **Gewichtsfunktion**  $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  gearbeitet, die Kanten ein Gewicht zuordnet. Solch ein Gewicht kann bspw. Kosten für Strecken in einem Transportnetz entsprechen.

**1.19.** Für gegebenenes  $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  heißt ein Spannbaum  $T$  von  $G$  ein **Spannbaum minimalen Gewichtes**, falls

$$w(T) := \sum_{e \in E(T)} w(e) \leq w(S) = \sum_{e \in E(S)} w(e) \quad (1.42)$$

für jeden Spannbaum  $S$  von  $G$  gilt.

Ein Spannbaum kann bspw. genutzt werden, um in einem großen Netzwerk einen Pfad im Backbone zu jedem Knoten zu finden. Möglicherweise möchte man einen Spannbaum minimalen Gewichtes finden um möglichst billig zu jedem Knoten Pakete senden zu können.

**Satz 1.6** (Kruskal, Greedy-Algorithmus). *Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph und  $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .*

**Verfahren 1.4:** Setze  $F := \emptyset$ .

(\*) Wenn es in  $E(G) \setminus F$  eine Kante  $e$  gibt, für die  $F \cup \{e\}$  kreisfrei bleibt, wähle  $e$  so, dass  $w(e)$  kleinstmöglich ist, setze  $F := F \cup \{e\}$ . Iteriere (\*).

Das Verfahren endet mit einem Spannbaum von  $G$  minimalen Gewichtes, nämlich  $T = G[F]$ .

Es ist im Übrigen nicht wichtig, dass die Gewichtsfunktion  $w$  nur nichtnegative Gewichte zurückgibt. Es hilft jedoch beim Rechnen, wenn die Werte nur nichtnegativ sind. In der Praxis werden zudem überwiegend ganze Zahlen statt reeller Zahlen benutzt.

Das Verfahren endet mit einem maximal kreisfreien Graphen, da solange wie möglich und ausschließlich Kanten wählen, sodass der Graph kreisfrei bleibt. Da  $G$  zusammenhängend ist, enthält der Graph am Ende des Verfahrens alle Ecken aus  $G$ . Damit endet das Verfahren auch mit einem Spannbaum. Nicht selbstverständlich ist jedoch, dass der Spannbaum auch minimalen Gewichtes ist.

**Beweis.** Das Verfahren endet mit einer maximal kreisfreien Kantenmenge  $F$ , also ist  $G[F]$  ein Spannbaum von  $G$ . ✓

Sei  $e_1, \dots, e_m$  die Folge der Kanten aus  $F$  in der Reihenfolge ihres Auftretens in der Iteration. Sei  $f_1, \dots, f_m$  die Folge der Kanten eines beliebigen Spannbaumes  $B$  in der Reihenfolge aufsteigender Einzelgewichte.  $m = |V(G)| - 1$ .

Wäre  $w(F) > w(E(B))$ , dann gäbe es einen Index  $i \in \{1, \dots, m\}$  mit  $w(e_i) > w(f_i)$ . (Wähle  $i$  kleinstmöglich.)

$$F'' := \{e_1, \dots, e_{i-1}\} \quad (1.43)$$

ist kreisfrei.

$$F' := \{f_1, \dots, f_{i-1}, f_i\} \quad (1.44)$$

ist kreisfrei.

$$(1.45)$$

$|F''| < |F|$  impliziert nach [Satz 1.5](#): Es gibt  $f \in F' \setminus F''$  so, dass  $F'' \cup \{f\}$  kreisfrei bleibt.  $f$  ist folglich eine Option für die Wahl von  $e_i$  im  $i$ -ten Iterationsschritt gewesen. Es gilt nach der Wahl von  $e_i$ :  $w(e_i) \leq w(f)$ . Aber  $w(f) \leq w(f_i) < w(e_i)$ . ✗

Also gilt tatsächlich

$$w(E(B)) \geq w(F) = w(E(G[F])). \quad (1.46)$$

□

Lücke

## 2. Matchings

### 2.1. Matchings in bipartiten Graphen

Lücke

$$V(M) := \cup M \quad (2.1)$$

$$|V(M)| = 2 |M| \quad (2.2)$$

**2.1.** Ein Matching  $M$  des Graphen  $G$  heißt **Matching**  $A \subseteq V(G)$ , falls  $A \subseteq V(M)$ .

**2.2.** Für  $X \subseteq V(G)$  sei die **Nachbarschaft** von  $X$  definiert durch:

$$N_G(X) := \{y \in V(G) \setminus X \mid \exists z \in X : yz \in E(G)\} \quad (2.3)$$

Bild 2.1

**2.3.** Für zwei Mengen  $X$  und  $Y$  sei die **symmetrische Differenz** von  $X$  und  $Y$  definiert durch:

$$X \Delta Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \quad (2.4)$$

$$= (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \quad (2.5)$$

**Satz 2.1** (Heiratssatz, HALL). *Sei  $A$  Klasse einer 2-Färbung des bipartiten Graphen  $G$ . Genau dann gibt es ein Matching von  $A$  in  $G$ , wenn die **Hall-Bedingung** erfüllt ist:*

$$\forall X \subseteq A : |N_G(X)| \geq |X| \quad (2.6)$$

**2.4.** Sei  $M$  ein Matching des (nicht notwendig bipartiten) Graphen  $G$ . Ein Weg  $P = x_0, x_1, \dots, x_l$  heißt  **$M$ -alternierend**, falls für jedes  $i \in \{0, \dots, l-1\}$  die Kante  $x_i x_{i+1}$  aus  $G$  genau dann zu  $M$  gehört, wenn  $i$  ungerade ist.

Ein solches  $P$  heißt **Verbesserungsweg**, falls er in einer Ecke außerhalb von  $V(M)$  beginnt und endet, d. h.  $x_0, x_l \notin V(M)$ .

**Beweis.** (2.6) ist notwendig für die Existenz eines Matchings von  $A$ , denn ist  $M$  ein Matching von  $A$ , so gilt

$$\forall X \subseteq A : |N_G(X)| \geq |N_{G[M]}(X)| = |X|. \quad (2.7)$$

Ist  $P$  ein Verbesserungsweg, so hat  $P$  ungerade Länge und  $M \Delta E(P)$  ist ein Matching von  $G$  mit einer Kante mehr als  $M$  ( $|M \Delta E(P)| = |M| + 1$ ).

Seien  $G, A$  wie in den Voraussetzungen des Satzes und  $B := V(G) \setminus A$ . Sei  $M$  ein größtes Matching.

Annahme:  $M$  ist kein Matching von  $A$ . Wir finden eine Menge  $X$ , die die HALL-Bedingung verletzt (dies zeigt der Satz). Es gibt dann eine Ecke  $x_0 \in A \setminus V(M)$ .

Sei  $R$  die Menge aller  $y$  für die es einen in  $x_0$  beginnenden und in  $y$  endenden  $M$ -alternierenden Weg gibt. Es gilt  $R \setminus \{x_0\} \subseteq V(M)$ .  $y \in R \cap A \setminus \{x_0\}$  muss nach Konstruktion mit einer Kante aus  $M$  inzidieren, für  $y \in R \cap B$  gilt das auch, da sonst ein Verbesserungsweg von  $x_0$  nach  $y$  existieren würde.

Daher gibt es keine Kante aus  $M$ , die eine Ecke  $y \in R$  mit einem  $z \in V(G) \setminus R$  verbindet: Richtig für  $x_0$ ; ist  $y \in R \cap A$  Endpunkt eines  $M$ -alternierenden Weges  $P = x_0, \dots, x_l = y$ , so ist  $y \in V(M)$ , genauer  $x_{l-1}y \in E(M)$ ,  $x_{l-1} \in R$ . Ist  $y \in R \cap B$  Endpunkt eines  $M$ -alternierenden Weges  $P = x_0, \dots, x_l = y$  und  $z \in V(G) \setminus R$  mit  $yz \in M$ , so ist  $P^+ = x_0, \dots, x_l, z$   $M$ -alternierend, folglich  $z \in R$ .  $\zeta$

Somit liegen mit einer Ecke einer Kante aus  $M$  schon *beide* Endecken in  $R$ .

Es gibt keine Kante in  $G$ , die eine Ecke  $y \in R \cap A$  mit einer Ecke  $z \in V(G) \setminus R$  verbindet: Sonst wäre  $y$  Endpunkt eines  $M$ -alternierenden Weges  $P = x_0, \dots, x_l = y$  und  $P^+ = x_0, \dots, x_l, z$   $M$ -alternierend, also  $z \in R$ .  $\zeta$

Somit gilt  $N_G(R \cap A) \subseteq R \cap B$  und  $|R \cap A| = |R \cap B| + 1$ .

$$\implies |N_G(R \cap A)| \leq |R \cap B| \quad (2.8)$$

$$= |R \cap A| - 1 \quad (2.9)$$

$$< |R \cap A| \quad (2.10)$$

Also verletzt  $X := R \cap A$  die HALL-Bedingung.  $\square$

Aus diesem Beweis lässt sich ein Algorithmus erstellen, der entweder ein Matching von  $A$  findet oder zeigt, dass es ein solches Matching nicht geben kann.

**Satz 2.1** ist **Toncias** (The obviously necessary condition is also sufficient). Der Begriff wurde durch C. St. J. A. Nash-Williams etabliert. Viele Sätze sind von dieser Bauart.

Die nächste Frage ist nun, wie man für allgemeine Graphen große Matchings findet.

Es ist schwierig zu entscheiden (NP-vollständig), ob ein Graph einen aufspannenden Kreis, einen sog. **Hamilton-Kreis** hat. Wenn es einen solchen Kreis gibt, gibt es automatisch auch ein perfektes Matching, welches alle Ecken enthält. Das Ermitteln eines solchen HAMILTON-Kreises ist extrem aufwändig, aber die Vorbedingung lässt sich sehr leicht prüfen.

Für einen beliebigen Graphen kann man *Valenzen* willkürlich vorschreiben. Dies sind ganze Zahlen, die Ecke zugeordnet sind. Ein Problem ist nun, einen Teilgraphen zu finden, dessen Ecken genau so viele inzidierende Kanten pro Ecke wie die jeweilige Valenz

bild 2.2  
alternierender  
weg

bild 2.3  
verbesserungsweg

def.  
größtes  
matching

hat. Wenn man an alle Ecken nun die Valenz 2 notiert (einen 2-Faktor ermittelt), könnte man vermuten, dass sich dadurch ein HAMILTON-Kreis finden lässt. Allerdings ist es hier weiterhin möglich, dass der Teilgraph dann kein HAMILTON-Kreis ist (nämlich genau dann, wenn der Teilgraph nicht zusammenhängend ist). Beispielsweise hat der PETERSEN-Graph einen 2-Faktor, aber keinen HAMILTON-Kreis.

**Satz 2.2** (Berge). *Sei  $M$  ein Matching des Graphen  $G$ . Genau dann gibt es ein Matching von  $G$  mit mehr Kanten als  $M$ , wenn es einen Verbesserungsweg für  $M$  gibt.*

**Beweis.** Existiert ein Verbesserungsweg, so auch ein größeres Matching (für  $M$ ). Siehe Beweis zu [Satz 2.1](#). Existiere ein Matching  $N$  mit  $|N| > |M|$ . Betrachte  $M \triangle N$ . In  $H = G[M \triangle N]$  ist jede Ecke mit höchstens zwei Kanten inzident. Die Komponenten von  $H$  sind daher Kreise oder Wege, die abwechselnd Kanten aus  $M$  und  $N$  verwenden. Weil  $|N| > |M|$  muss eine dieser Komponenten mehr Kanten aus  $N$  als aus  $M$  benutzen. Diese ist ein Wege Weg ungerade Länge, der mit einer Kante aus  $N$  beginnt und endet; dieser Weg ist Verbesserungsweg.  $\square$

bild 2.4 2-faktor im petersen-graph



# A. Lektüre

Lehrbücher von:

- R. Diestel
- D. West
- J. A. Bondy
- U. S. R. Murty
- C. Berge
- F. Harary

Wikipedia ist auch okay.

# Stichwortverzeichnis

Abstand, 7  
Austauschlemma, 11  
  
Baum, 6, 11  
    Spann-, 7  
    Tiefensuch-, 9  
benachbart  
    Knoten, 3  
Berge, 16  
BFS, 8  
Breadth-First-Search, 8  
Breitensuchbaum, 8  
Breitensuche, 7, 8  
  
DFS, 9  
Differenz  
    symmetrisch, 14  
  
Ecke, 3  
    Endecke, 5  
    innere, 5  
endlich, 3  
  
Graph, 3  
    aufspannend, 7  
Greedy-Algorithmus, 12  
  
Hall, 14  
Hall-Bedingung, 14  
Heiratssatz, 14  
  
Kante, 3  
Kantenmenge, 5  
Knotenmenge, 5  
Komponenten  
    Zusammenhangs, 5

Kreis, 11  
    Hamilton, 15  
kreisfrei, 11  
  
Länge  
    Kreis, 11  
    Weg, 5  
Löschung, 4  
  
Matching, 14  
Metrik, 8  
  
Nachbar, 3  
Nachbarschaft, 14  
  
Petersen-Graph, 3  
  
Spannbaum, 7  
    minimalen Gewichtes, 12  
  
Teilgraph, 3  
    induziert, 4  
Tiefensuchbaum, 9  
Tiefensuche, 7, 9, 10  
Toncias, 15  
  
Verbesserungsweg, 14  
  
Wald, 6, 11  
Weg, 5  
    alternierend, 14  
    Verbesserungs-, 14  
  
zh, 6  
zshgd, 6  
zusammenhängend, 6  
    minimal, 6