Technische Universität Ilmenau 21. November 2023

Vorlesung

Graphen und Algorithmen

Prof. Dr. Matthias Kriesell

NEXTEX

Vorlesungsmitschrift von
ADRIAN SCHOLLMEYER

Inhaltsverzeichnis

1. Bäume

1.1. Breiten- und Tiefensuchbäume

1.1. Ein (einfacher, ungerichteter) **Graph** ist ein paar $G = (V, E)$, bestehend aus einer Menge V von **Ecken** (engl. *vertices*) und einer Menge $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x \neq y \text{ aus } V\}$ von **Kanten** (engl *edge*).

$$V(G) := V \tag{1.1}$$
$$E(G) := E \tag{1.2}$$

Für Kanten wird auch üblicherweise die Schreibwese xy anstelle von $\{x, y\}$ benutzt. Also ist auch $xy = yx$. In alter Literatur wurde teilweilse auch $x \in G$ und $e \in G$ anstelle von $x \in V$ und $e \in E$ benutzt. Diese Schreibweise wird nicht mehr benutzt!

In dieser Definition wurden nur einfache ungerichtete Graphen definiert. Es gibt jedoch auch Definitionen für gerichtete Graphe (also $xy \neq yx$) und Graphen mit Mehrfachkanten (Graphen mit mehreren unterschiedlichen Kanten xy). Es kommt bei einfachen, ungerichteten Graphen also nur darauf an, wie die Knoten miteinander verbunden sind, nicht wie häufig oder in welche Richtung! Insbesondere ist es auch egal, wie man einen Graphen zeichnet, solange die Anzahl Knoten und die Verbindungen zwischen den Knoten passen. Als Beispiel seien hier zwei Zeichnungen des PETERSEN-Graphs in Abbildung 1.1 gezeigt.

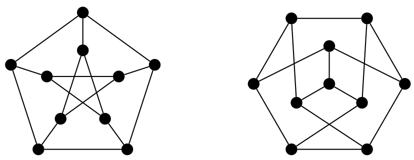

Abbildung 1.1.: Zwei Varianten des gleichen Graphen (PETERSEN-Graph)

1.2. Für $xy \in E$ sind $x, y \in V$ **benachbart** bzw. x ist **Nachbar** von y.

Alle benachbarten Graphen seien **endlich** (G endlich $\iff$ V (und E) sind endlich).

1.3. Ein Graph H heißt **Teilgraph** des Graphen G (in Zeichen: $H \leq G$), falls $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) \subseteq E(G)$.

Für Teilgraphen ist zu beachten, dass nicht jede Kombination aus $V' \subseteq V(G)$ und $E' \subseteq E(G)$ ein Graph ist. Werden beispielsweise Kanten in E' aufgenommen, die Knoten enthalten, welche nicht in V' enthalten sind, ist das resultierende Paar $H = (V', E')$ *kein* Graph und damit auch kein Teilgraph von G. Man kann jedoch Teilgraphen basierend auf einer Teilmenge von $V(G)$ konstruieren.

1.4. Für $X \subseteq V(G)$ sei

$$G[X] := (X, \{xy \in E(G) \mid x, y \in X\}) \tag{1.3}$$

Ein solcher Graph $G[X]$ heißt dann der von X **induzierte** Teilgraph.
Für $F \subseteq E(G)$ sei

$$G[F] := (V(G), F) \tag{1.4}$$

der von F **induzierte** Teilgraph.
Es gilt $G[X] \leq G$ und $G[F] \leq G$.

Beispiele für induzierte Graphen sind in Abbildung 1.2 und Abbildung 1.3 gezeigt. Während der aus Knoten induzierte Teilgraph nur eine Teilmenge aus Knoten im Teilgraph hat, sind in einem aus Kanten induzierten Teilgraphen stets alle Knoten aus dem ursprünglichen Graphen enthalten, auch, wenn sie mit keiner Kante des Teilgraphen verbunden sind.

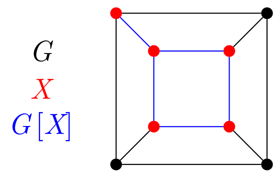

Abbildung 1.2.: Aus Knoten induzierter Teilgraph

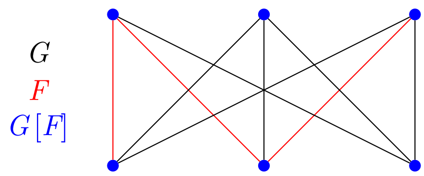

Abbildung 1.3.: Aus Kanten induzierter Teilgraph

1.5. Für $X \subseteq V(G)$ entsteht

$$\begin{aligned} G - X &:= (V(G) \setminus X, \{xy \in E \mid x, y \in V(G) \setminus X\}) && (1.5)\\ &= G[V(G) \setminus X] && (1.6) \end{aligned}$$

durch **Löschung** der Ecken in X aus G.
Für $F \subseteq E(G)$ entsteht

$$\begin{aligned} G - F &:= (V(G), E(G) \setminus F) && (1.7)\\ &= G[E(G) \setminus F] && (1.8) \end{aligned}$$

durch **Löschung** der Kanten in F aus G.

Besteht X aus nur einer Ecke x, so wird auch die Notation $G - x := G - \{x\}$ benutzt. Analog wird $G - e := G - \{e\}$ für $F = \{e\}$ benutzt. Es gilt wieder $G - X \leq G$ und $G - F \leq G$, also auch $G - x \leq G$ und $G - e \leq G$.
Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Definition von Zusammenhang.

1.6. Für zwei Ecken $a, b \in E(G)$ heißt eine nichtleere Folge $P = x_0, \ldots, x_l$ von paarweise verschiedenen Ecken x_j mit

$$\begin{aligned} x_0 &= a && (1.9)\\ x_l &= b && (1.10)\\ \forall i \in \{1, \ldots, l\} : x_{i-1}x_i &\in E(G) && (1.11) \end{aligned}$$

ein **Weg** von a nach B der **Länge** l, auch a, b**-Weg** genannt.
Die Ecken a, b dieses Weges heißen **Endecken**, alle anderen sind **innere Ecken**.

Besonders zu beachten ist hierbei, dass die Länge des Weges 1 kleiner ist als die Anzahl Knoten in P! Für den Weg können auch Kanten- und Knotenmengen definiert werden:

1.7.

$$\begin{aligned} V(P) &:= \{x_0, \ldots, x_l\} && (1.12)\\ E(P) &:= \{x_{i-1}x_i : i \in \{1, \ldots, l\}\} && (1.13) \end{aligned}$$

$(V(P), E(P))$ ist auch wieder ein Teilgraph und wird manchmal auch a, b-Weg (also wie oben) genannt. Diese Teilgraphen sind immer kreisfrei, da gemäß Definition die Ecken $x_j \in V(P)$ paarweise verschieden sind. Insbesondere sind auch einzelne Kanten oder auch einzelne Knoten Wege.
Aus der Teilgraphendarstellung eines Weges lässt sich die Folgendarstellung (bis auf die Durchlaufrichtung) zurückgewinnen.

1.8. Mit $a \sim_G b \iff \exists\ a, b$-Weg in G wird eine Äquivalenzrelation auf $V(G)$ definiert. Die Äquivalenzklassen heißen **Zusammenhangskomponenten** oder **Komponenten**. Auch die von den Komponenten induzierten Teilgraphen heißen **Komponenten**.

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, da sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Die Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich erfüllt, da der Graph ungerichtet ist und für jeden a, b-Weg auch immer ein b, a-Weg existiert. Für die Transitivität kann man einen a, b-Weg und b, c-Weg im Graphen betrachten. Um einen a, c-Weg zu finden, verfolge man den a, b-Weg, bis man auf einen Knoten stößt, der auf dem b, c-Weg liegt. Verfolgt man ab hier den b, c-Weg, hat man einen a, c-Weg gefunden. Abbildung 1.4 zeigt solche a, b- und b, c-Wege im Graphen.

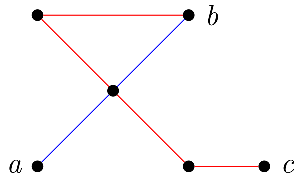

Abbildung 1.4.: a, b-Weg und b, c-Weg in einem Graphen

1.9. Ein Graph mit höchstens einer Komponente heißt **zusammenhängend**. Ist ein Graph nicht zusammenhängend, so heißt er **unzusammenhängend**.

Als abkürzende Schreibweisen werden in dieser Vorlesung auch *zshgd* und *zh* für „zusammenhängend“ benutzt.

1.10. Ein Graph T heißt **Baum**, falls T zusammenhängend ist und $T - e \forall e \in E(T)$ unzusammenhängend ist. T ist also **minimal zusammenhängend**.

1.11. Ein **Wald** ist ein Graph, dessen Komponenten Bäume sind. Ein zusammenhängender Wald ist ein Baum.

Verfahren 1.1: Sei $x_0 \in V(G)$. (*) Wenn es unter den bereits gewählten Ecken $x_0, x_1, \ldots, x_l$ eine Ecke x_t gibt, die einen Nachbarn $y \in V(G) \setminus \{x_0, \ldots, x_l\}$ besitzt, dann setze $x_{l+1} = y$ und $f(l+1) := t$ und iteriere (*).

Satz 1.1. *Verfahren 1.1 endet mit einem Teilbaum.*

$$T := \left(\{x_0, \ldots, x_l\}, \left\{x_t x_{f(t)} \,\middle|\, t \in \{1, \ldots, l\}\right\}\right). \tag{1.14}$$

Dabei ist $\{x_0, \ldots, x_l) = V(T)$ *die Komponente von* G*, die* x_0 *enthält.*

Ein Beispiel dafür ist Abbildung 1.5. Das Verfahren ist nicht deterministisch, da in jedem Schritt ein Nachbar eines beliebigen Knotens aus der Menge gewählt werden kann.

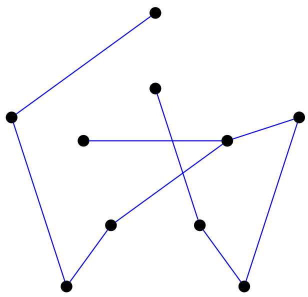

Abbildung 1.5.: Erzeugung eines Baums aus einem PETERSEN-Graph

Bemerkung: Für $t \in \{0, \ldots, l\}$ liefert $x_t, x_{f(t)}, x_{f(f(t))}, \ldots, x_0$ den x_t, x_0-Weg in T.

Beweis. Das Verfahren endet, weil in jedem Schritt die Folge $x_0, \ldots, x_n$ um eine noch nicht dort enthaltene Ecke x_{l-1} vergrößert wird und $V(G)$ endlich ist.

Sei $T_s = \Big(\{x_0, \ldots, x_s\}, \left\{x_t x_{f(t)} \,\middle|\, t \in \{1, \ldots, s\}\right\}\Big)$. Zeige induktiv über s, dass T_s ein Teilbaum von G ist.

Für $s = 0$: $T_0 = (\{x_0\}, \varnothing)$ ist Teilbaum. ✓

Sei nun $T_0, \ldots, T_s$ Teilbaum von G. zz: Auch T_{s+1} ist ein Teilbaum von G.

Nach IV gibt es in T_j für jedes $j \in \{0, \ldots, s\}$ einen x_j, x_0-Weg, also gilt $x_j \sim_G$ Wegen lücke $x_{s+1} x_{f(s+1)} \in E(T_{s+1})$ gilt auch $x_{s+1} \sim x_{f(s+1)}$, also

$$\forall j \in \{0, \ldots, s\} : x_{s+1} \sim_{T_{s+1}} x_0 \tag{1.15}$$
$$\Longleftrightarrow \forall i, j \in \{0, \ldots, s+1\} : x_i \sim_{T_{s+1}} x_j \tag{1.16}$$
$$\Longrightarrow T_{s+1} \text{ zusammenhängend} \tag{1.17}$$
$$\text{zz} : T_{s+1} - e \text{ unzusammenhängend } \forall e \in E(T_{s+1}) \tag{1.18}$$

Für $e = x_{s+1} x_{f(s+1)}$ ist x_{s+1} zu keiner Kante in $T_{s+1} - e$ inzident; insbesondere gibt es keinen x_{s+1}, x_0-Weg in $T_{s+1} - e$. Für $e \in E(T_{s+1}) \setminus \left\{x_{s+1} x_{f(s+1)}\right\} = E(T_s)$ ist nach IV zumindest $T_s - e$ unzusammenhängend. Daher existieren $a, b \in V(T_s - e) = V(T_s)$ so, dass kein a, b-Weg in T_s existiert.

Gäbe es einen a, b-Weg P in $T_{s+1} - e$, so enthält P die Kante $x_{s+1} x_{f(s+1)}$ oder die Ecke x_{s+1}. In beiden Fällen enthält P die Ecke x_{s+1} und zwar als *innere Ecke*. Aber x_{s+1} ist in T_{s+1} mit nur einer Kante inzident (nämlich $x_{s+1} x_{f(s+1)}$) und kann daher nicht innere Ecke eines Weges in T_{s+1} sein. ↯

Folglich gibt es keinen solchen a, b-Weg in T_{s+1}. Entsprechend ist $T_{s+1} - e$ unzusammenhängend. Somit ist T_{s+1} ein Baum.

Sei H (bzw. $V(H)$) die Komponente von G, die x_0 enthält. ƶ: $V(T) = V(H)$.

T ist zusammenhängender Teilgraph von G, der x_0 enthält. Daher $V(T) \subseteq V(H)$.

ƶ: $V(T) \not\subset V(H)$.

Andernfalls gäbe es ein $z \in V(H) \setminus V(T)$. Da H zusammenhängend ist und $x_0 \in V(H)$ existiert ein z, x_0-Weg Q in H.

$$Q = \underbrace{y_0}_{=z}, y_1, \dots, \underbrace{y_k}_{=x_0} \tag{1.19}$$

Daher existiert $j \in \{0, \dots, k\}$ mit $y_j \in V(T)$ und $y_{j+1} \notin V(T)$. Also ist $y_{j+1} = x_t$ für $t \in \{0, \dots, l\}$. Also existiert nach Abbruch der Iteration von Verfahren 1.1 mit $x_0, \dots, x_l$ eine Ecke $y = y_{j+1} \in V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_l\}$ mit einem Nachbarn $x_t, t \in \{0, \dots, l\}$. ↯

Somit ist $V(H) = V(T)$. □

1.12. Ein Teilgraph H von G heißt **aufspannend**, falls $V(H) = V(G)$. Ein Teilbaum von G heißt **Spannbaum**, falls er aufspannend ist.

Verfahren 1.1 liefert also einen Spannbaum derjenigen Komponente von G, die x_0 enthält. Die gezielte Auswahl des ältesten oder jüngsten gesehenen Nachbarn in Verfahren 1.1 führt zu **Breitensuche** bzw. **Tiefensuche**.

1.1.1. Breitensuche

1.13. Die Länge eines kürzesten a, b-Weges im Graphen G heißt **Abstand** von a, b. Bezeichnung: $d_G(a, b)$.
Gibt es keinen solchen Weg, so setze $d_G(a, b) = \infty$.

Also $\min\{\,|E(P)| : P \text{ ein } a, b\text{-Weg}\} \cup \{\infty\} = d_G(a, b)$. Als Beispiel sei hier Abbildung 1.6 gezeigt. Indem man irgendeinen Pfad im Graphen sucht, kann man zwischen zwei Ecken a, b immer eine obere Schranke für $d_G(a, b)$ finden. Durch systematisches Aufspannen des Graphen mit Breitensuche kann man den Abstand aller Ecken zu a im Graphen und damit auch $d_G(a, b)$ bestimmen. zeichnung 1.5

Satz 1.2. $d_G : V(G) \times V(G) \to \mathbb{N}$ *ist für zusammenhängende* G *eine* ***Metrik****, also*

(1) $d_G(a, b) \geq 0$ *und* $d_G(a, b) = 0 \iff a = b$

(2) $d_G(a, b) = d_G(b, a) \, \forall a, b \in V(G)$

(3) $d_G(a, b) + d_G(b, c) \leq d_G(a, c) \, \forall a, b, c \in V(G)$

Beweis. Siehe Übung. □

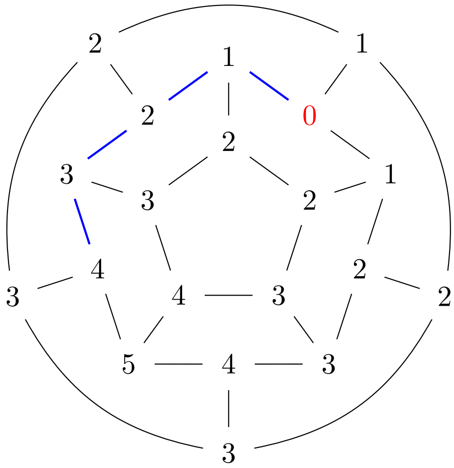

Abbildung 1.6.: Weg und Abstände zwischen zwei Punkten in einem Dodekaeder

1.14. Sei G zusammenhängend und x_0 eine Ecke von G. Ein Spannbaum T von G heißt **Breitensuchbaum** (BFS-Tree, Breadth-First-Search-Tree) bei x_0, falls $d_T(z, x_0) = d_G(z, x_0)\, \forall z \in V(G)$.

Verfahren 1.2 (Breitensuche)**:** (*) Wenn es unter den bereits gewählten Ecken $x_0, \dots, x_l$ eine Ecke x_t gibt, die einen Nachbarn $y \in V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_l\}$ hat, wähle x_t so, dass t kleinstmöglich ist. Iteriere (*).

Verfahren 1.2 erzwingt, dass wir immer die Nachbarn in den Baum aufnehmen, die wir schon am längsten kennen.

Satz 1.3 (Breitensuche)**.** *Verfahren 1.2 endet mit einem Breitensuchbaum*

$$T = \left(\{x_0, \dots, x_l\}, \left\{x_t x_{f(t)} \,\middle|\, t \in \{1, \dots, l\}\right\}\right) \tag{1.20}$$

von G bei der Ecke x_0.

Beweis. Nach Satz 1.1 endet das Verfahren mit einem Spannbaum T von G. Offenbar gilt: $d_G(x_0, x_0) = d_T(x_0, x_0)$.

z.z.: Induktiv über s:

$$d_G(x_s, x_0) = d_T(x_s, x_0) \geq d_T(x_{s-1}, x_0) \text{ für } s > 0. \tag{1.21}$$

Die Behauptung (1.21) gilt für $s = 0$. Sei nun die Behauptung „bis“ s bewiesen (IV).

z.z.: (1.21) gilt für $s + 1$ anstelle von s.

Sei P ein kürzester x_{s+1}, x_0-Weg in G und sei x_j die erste Ecke in der Folgendarstellung von P mit $j \leq s$. Nach Wahl von $f(s+1)$ gibt es kein x_t mit $t < f(s+1)$, die einen

Nachbarn außerhalb in $V(G) \setminus \{x_0, \ldots, x_s\}$. Daher ist $j \geq f(s+1)$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
d_T(x_{s+1}, x_0) &\overset{T \leq G}{\geq} d_G(x_{s+1}, x_0) && (1.22)\\
&\geq 1 + d_G(x_j, x_0) \quad \text{da } x_j \text{ nicht die erste Ecke auf } P && (1.23)\\
&\geq 1 + d_G\left(x_{f(s+1)}, x_0\right) \quad \text{Monotonie von } \left(d_G(x_0, x_0), d_G(x_1, x_0), \ldots\right) && (1.24)\\
&\overset{\text{(IV)}}{=} 1 + d_T\left(x_{f(s+1)}, x_0\right) && (1.25)\\
&= d_T(x_{s+1}, x_0) && (1.26)
\end{aligned}$$

Also gilt überall Gleichheit, insbesondere:

$$d_T(x_{s+1}, x_0) = d_G(x_{s+1}, x_0) \tag{1.27}$$

Für $s = 0$ gilt sowieso:

$$d_T(x_{s+1}, x_0) \geq 0 = d_T(x_s, x_0) \tag{1.28}$$

Für $s > 0$: Nach Wahl von $f(s)$ gibt es kein x_t mit $t < f(s)$, das einen Nachbarn außerhalb von $x_0, \ldots, x_{s-1}$ hat. Daher gilt $f(s+1) \geq f(s)$. Die Montonieeigenschaft in der Induktionsvorraussetzung zeigt:

$$\begin{aligned}
d_T(x_{s+1}, x_0) &= d_T\left(x_{f(s+1)}, x_0\right) + 1 && (1.29)\\
&\geq d_T\left(x_{f(s)}, x_0\right) + 1 \quad \text{da } f(s+1) \geq f(s) \wedge f(s+1) < s+1 && (1.30)\\
&= d_T(x_s, x_0)\,. && (1.31)
\end{aligned}$$

Dies zeigt (1.21). Also ist T Breitensuchbaum. □

1.1.2. Tiefensuche

1.15. Ein Spannbaum T eines zusammenhängenden Graphen G heißt ein **Tiefensuchbaum** bei x_0 ($x_0 \in V(G)$), auch **DFS-Tree** (Depth-First-Search), falls für jedes $xy \in E(G)$ die Ecke y in dem x, x_0-Weg von T vorkommt oder die Ecke x in dem y, x_0-Weg von T vorkommt.

Verfahren 1.3 (Tiefensuche)**:** Sei x_0 Ecke des zusammenhängenden Graphen G.
(*) Wenn es unter den bereits gewählten Ecken $x_0, \ldots, x_l$ eine Ecke x_t gibt, die einen Nachbarn $y \in V(G) \setminus \{x_0, \ldots, x_l\}$ hat, wähle x_t so, dass t größtmöglich ist. Iteriere (*).

Das Verfahren wählt zunächst immer den längstmöglichen Weg. Am Anfang wird ein sehr langer Weg durch den Graphen gewählt, bis man sich nicht mehr weiter von der Wurzel entfernen kann. Im Beispiel des Petersen-Graph (Abbildung 1.7) reicht dies sogar so weit, ein Tiefensuchbaum völlig unverzweigt ist.

Ist dies nicht der Fall, geht man zunächst so weit wie möglich. Danach geht man so wenig wie möglich wieder zurück, bis man eine Ecke findet, die noch nicht in $V(T)$ ist.

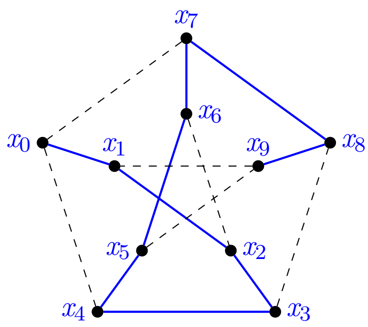

Abbildung 1.7.: Tiefensuche in einem Petersen-Graph

Jeden dieser Pfade, die sich ohne Backtracking finden lassen, können als Segmente im Baum betrachtet werden. Sobald man in einem solchen Segment einmal Backtracking gemacht hat, kann man keine Ecken mehr finden, die tiefer in diesem Segment Anschluss haben. Dies wird später im Beweis gezeigt.

Satz 1.4 (Tiefensuche)**.** *Das Verfahren endet mit einem Tiefensuchbaum*

$$T = \left(\{x_0, \ldots, x_l\}, \left\{x_t x_{f(t)} \,\middle|\, t \in \{1, \ldots, l\}\right\}\right) \tag{1.32}$$

von G bei der Ecke x_0.

Grafik Segmente Tiefensuche zum Beweis

Beweis. Durch Satz 1.1 endet das Verfahren mit einem Spannbaum T von G.

zz: Induktiv über s:

(a) Unter den Ecken $x_0, \ldots, x_s$ haben nur die Ecken des x_s, x_0-Weges in T Nachbarn in $V(G) \setminus \{x_0, \ldots, x_s\}$.

(b) Für $s > 0$ sind unter den Ecken $x_0, \ldots, x_{s-1}$ nur die Ecken des $x_{f(s)}, x_0$-Weges in T zu x_s benachbart.

Für $s = 0$ gelten (a) und (b) offensichtlich. Nehmen wir nun an, dass die beiden Aussagen „bis“ s gelten (IV).

zz: (a) und (b) gelten sinngemäß für $s+1$ anstelle von s.

Nach IV (a) liegt $x_{f(s+1)}$ auf dem x_s, x_0-Weg. Sei nun $x_j, j \leq s+1$ zu einer Ecke $y \neq x_j$ in G außerhalb von $x_0, \ldots, x_s$ benachbart. Für $j \leq s$ liegt x_j auf dem x_s, x_0-Weg in T (IV). Nach Wahl von x_{s+1} kann kein x_t mit $t > f(s+1), t \leq s$, Nachbarn in G außerhalb von $x_0, \ldots, x_s$ haben. Folglich gilt $j \leq f(s+1)$.

Die Folge der Indizes $s, f(s), f(f(s)), \ldots, 0$ entlang des x_s, x_0-Weges in T ist absteigend. Also liegt x_j auf dem $x_{f(s+1)}, x_0$-Weg in T. Damit ist der Induktionsschluss für (b) erbracht und x_j liegt auf dem x_{s+1}, x_0-Weg in T. Für $j = s+1$ gilt letzteres trivialerweise! Damit ist der Induktionsschluss für (a) erbracht.

Aus (b) folgt: für $x_s x_j \in E(G)$ mit $j < s$: x_j liegt auf dem x_s, x_0-Weg. Somit gilt $\forall xy \in E(G)$: y liegt auf dem x, x_0-Weg oder x liegt auf dem y, x_0-Weg. □

1.16. Ist T ein Baum und $x_0 \in V(T)$, so wird durch

$$y \leq z :\iff y \text{ liegt auf dem } x_0, z\text{-Weg in } T \tag{1.33}$$

eine Ordnung auf $V(T)$ definiert.

Name für def.

Folglich ist ein Spannbaum T des Graphen G genau dann ein Tiefensuchbaum von G bei x_0, wenn die Endecken jeder Kante von G bzgl $\leq$ vergleichbar sind.

1.2. Bäume kleinsten Gewichtes und Matroide

Als nächstes betrachten wir gewichtete Graphen. Diese können in der Realität bspw. Kosten (bspw. Fahrzeit) entsprechen.

1.17. Sei G ein Graph. Ein **Kreis** der **Länge** $l \geq 3$ in G ist eine Folge $C = x_0, \ldots, x_{l-1}, x_0$ derart, dass $x_0, \ldots, x_{l-1}$ ein Weg ist und $x_{l-1}x_0 \in E(G)$. Setze

$$V(C) = \{x_0, \ldots, x_{l-1}\} \subseteq V(G) \tag{1.34}$$
$$E(C) = \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{l-2}x_{l-1}, x_{l-1}x_0\} \subseteq E(G) \tag{1.35}$$

Auch der Teilgraph $(V(C), E(C))$ heißt **Kreis**.

Aus dem Teilgraphen lässt sich die Folgendarstellung bis auf Startecke und Durchlaufrichtung vollständig rekonstruieren. Insgesamt gibt es $2l$ mögliche Folgen, die sich aus dem Teilgraphen rekonstruieren lassen (eine Folge pro Ecke und Durchlaufrichtung).

Zudem ist ein Graph ohne Kreise ein **Wald** und ein zusammenhängender Graph ohne Kreise ein **Baum**.

1.18. Für einen Graphen G heißt $F \subseteq E(G)$ **kreisfrei**, falls $G[F] = (V(G), F)$ keinen Kreise enthält (also ein Wald ist).

Übung: *Für einen nichtleeren Wald G mit c Komponenten gilt:*

$$|E(G)| = |V(G)| - c \tag{1.36}$$

Für einen Baum mit einer Ecke ist dies trivialerweise wahr. Für größere Bäume kann man induktiv immer eine Blatt finden, was man löschen kann. Für diesen verkleinerten Baum gilt die Aussage dann gemäß IV. Durch erneutes Anhängen des Blattes kann man dann zeigen, dass die Gleichung gilt. Wenn man eine Ecke löscht, die kein Blatt ist, ist der Graph nicht mehr zusammenhängend und damit wächst c um 1. Das gleicht die Verringerung der Anzahl Kanten wieder aus.

Satz 1.5 (Austauschlemma für Graphen)**.** *Sind F, F' zwei kreisfreie Kantenmengen des Graphen G mit $|F| < |F'|$, so gibt es eine Kante $e \in F' \setminus F$ mit $F \cup \{e\}$ kreisfrei.*

Beweis. Seien c, c' die Anzahlen der Komponenten von $G[F]$ bzw. $G[F']$. Wäre die Eckenmenge jeder Komponente von $G[F']$ ganz in der Eckenmenge einer Komponente von $G[F]$ enthalten, so folgt $c' > c$. Es gilt aber

$$\begin{aligned} c' &= \left|V\left(G\left[F'\right]\right)\right| - \left|E\left(G\left[F'\right]\right)\right| && (1.37)\\ &= |V(G)| - \underbrace{|F'|}_{>|F|} && (1.38)\\ &< |V(G)| - |F| && (1.39)\\ &= |V(G[F])| - |E(G[F])| && (1.40)\\ &= c \ \lightning && (1.41) \end{aligned}$$

Also gibt es eine Komponente von $G[F]$ mit Endpunkten in mindestens zwei Komponenten von $G[F]$. Also gibt es eine Kante $e = wz$ in $F' \setminus F$ mit Endpunkten in verschiedenen Komponenten von $G[F]$. Dann ist auch $F' \cup \{e\}$ kreisfrei. □

Eine vergleichbare Eigenschaft ist auch in Vektorräumen zu beobachten. Bekannt ist dies als das Ergänzungslemma oder Austauschlemma von Steinitz. Sind F, F' zwei linear unabhängige Teilmengen im Vektorraum V über K und ist $|F| < |F'| < \infty$, so gibt es einen Vektor $\vec{x} \in F' \setminus F$, sodass $F \cup \{\vec{x}\}$ linear unabhängig bleibt.

Die maximal kreisfreien Teilmengen eines zusammenhängenden Graphen G sind genau die Kantenmengen seiner Spannbäume. Spannbäume lassen also sich nicht nur darüber charakterisieren, dasss sie minimal zusammenhängen sind, sondern auch maximal kreisfrei. Je zwei Spannbäume haben dieselbe Mächtigkeit, nämlich $|V(G)| - 1$.

Im Folgenden wird mit einer **Gewichtsfunktion** $w : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gearbeitet, die Kanten ein Gewicht zuordnet. Solch ein Gewicht kann bspw. Kosten für Strecken in einem Transportnetz entsprechen.

1.19. Für gegebenenes $w : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt ein Spannbaum T von G ein **Spannbaum minimalen Gewichtes**, falls

$$w(T) := \sum_{e \in E(T)} \leq w(S) = \sum_{c \in E(S)} w(e) \qquad (1.42)$$

für jeden Spannbaum S von G gilt.

Ein Spannbaum kann bspw. genutzt werden, um in einem großen Netzwerk einen Pfad im Backbone zu jedem Knoten zu finden. Möglicherweise möchte man einen Spannbaum minimalen Gewichtes finden um möglichst billig zu jedem Knoten Pakete senden zu können.

Satz 1.6 (Kruskal, Greedy-Algorithmus)**.** *Sei G ein zusammenhängender Graph und $w : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.*

> ***Verfahren 1.4:*** *Setze $F := \varnothing$.*
> *(*) Wenn es in $E(G) \setminus F$ eine Kante e gibt, für die $F \cup \{e\}$ kreisfrei bleibt, wähle e so, dass $w(e)$ kleinstmöglich ist, setze $F := F \cup \{e\}$. Iteriere (*).*

Das Verfahren endet mit einem Spannbaum von G minimalen Gewichtes, nämlich $T = G[F]$.

Es ist im Übrigen nicht wichtig, dass die Gewichtsfunktion w nur nichtnegative Gewichte zurückgibt. Es hilft jedoch beim Rechnen, wenn die Werte nur nichtnegativ sind. In der Praxis werden zudem überwiegend ganze Zahlen statt reeller Zahlen benutzt.

Das Verfahren endet mit einem maximal kreisfreien Graphen, da solange wie möglich und ausschließlich Kanten wählen, sodass der Graph kreisfrei bleibt. Da G zusammenhängend ist, enthält der Graph am Ende des Verfahrens alle Ecken aus G. Damit endet das Verfahren auch mit einem Spannbaum. Nicht selbstverständlich ist jedoch, dass der Spannbaum auch minimalen Gewichtes ist.

Beweis. Das Verfahren endet mit einer maximal kreisfreien Kantenmenge F, also ist $G[F]$ ein Spannbaum von G. ✓

Sei $e_1, \ldots, e_m$ die Folge der Kanten aus F in der Reihenfolge ihres Auftretens in der Iteration. Sei $f_1, \ldots, f_m$ die Folge der Kanten eines beliebigen Spannbaumes B in der Reihenfolge aufsteigender Einzelgewichte. $m = |V(G)| - 1$.

Wäre $w(F) > w(E(B))$, dann gäbe es einen Index $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $w(e_i) > w(f_i)$. (Wähle i kleinstmöglich.)

$$F'' := \{e_1, \ldots, e_{i-1}\} \tag{1.43}$$

ist kreisfrei.

$$F' := \{f_1, \ldots, f_{i-1}, f_i\} \tag{1.44}$$

ist kreisfrei.

$$\tag{1.45}$$

$|F''| < |F'|$ impliziert nach Satz 1.5: Es gibt $f \in F' \setminus F''$ so, dass $F'' \cup \{e\}$ kreisfrei bleibt. f ist folglich eine Option für die Wahl von e_i im i-ten Iterationsschritt gewesen. Es gilt nach der Wahl von e_i: $w(e_i) \leq w(f)$. Aber $w(f) \leq w(f_i) < w(e_i)$. ↯

Also gilt tatsächlich

$$w(E(B)) \geq w(F) = w(E(G[F])) . \tag{1.46}$$

□

Lücke

2. Matchings

2.1. Matchings in bipartiten Graphen

Lücke

$$V(M) := \Cup M \tag{2.1}$$
$$|V(M)| = 2\,|M| \tag{2.2}$$

2.1. Ein Matching M des Graphen G heißt **Matching** $A \subseteq V(G)$, falls $A \subseteq V(M)$.

2.2. Für $X \subseteq V(G)$ sei die **Nachbarschaft** von X definiert durch:

$$N_G(X) := \{y \in V(G) \setminus X \,|\, \exists z \in X : yz \in E(G)\} \tag{2.3}$$

Die Nachbarschaft $N_G(X)$ umfasst alle Ecken, die durch eine Kante mit einer der Ecken aus X inzidieren. Abbildung 2.1 zeigt eine Eckenmenge X, ihre Nachbarschaft sowie die Kanten, die diese verbinden.

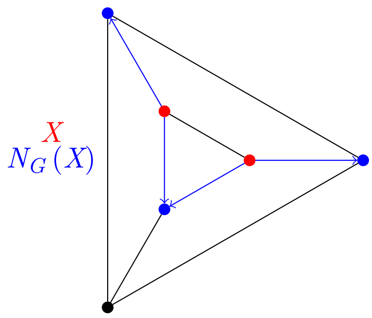

Abbildung 2.1.: Nachbarschaft einer Eckenmenge in einem Graphen

2.3. Für zwei Mengen X und Y sei die **symmetrische Differenz** von X und Y definiert durch:

$$X \triangle Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \tag{2.4}$$
$$= (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \tag{2.5}$$

Satz 2.1 (Heiratssatz, Hall)**.** *Sei A Klasse einer 2-Färbung des bipartiten Graphen G. Genau dann gibt es ein Matching von A in G, wenn die* **Hall-*Bedingung*** *erfüllt ist:*

$$\forall X \subseteq A : |N_G(X)| \geq |X| \tag{2.6}$$

2.4. Sei M ein Matching des (nicht notwendig bipartiten) Graphen G. Ein Weg $P = x_0, x_1, \ldots, x_l$ heißt M-**alternierend**, falls für jedes $\in \{0, \ldots, l-1\}$ die Kante $x_i x_{i+1}$ aus G genau dann zu M gehört, wenn i ungerade ist.
Ein solches P heißt **Verbesserungsweg**, falls er in einer Ecke außerhalb von $V(M)$ beginnt und endet, d. h. $x_0, x_l \notin V(M)$.

Ein solcher Verbesserungsweg ist in Abbildung 2.2 gezeigt. Solche Wege beginnen immer mit einem Knoten x_0, der nicht Teil des Matchings ist und enden mit einem Knoten x_l (hier: x_{2n+1}), welcher auch nicht Teil des Matchings ist. Weiterhin ist der weg ein alternierender Weg, d. h. die Kanten sind abwechselnd Teil des Matchings und nicht Teil des Matchings, wobei die erste Kante nicht Teil des Matchings ist.

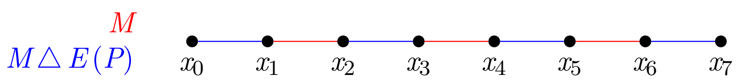

Abbildung 2.2.: Verbesserungsweg

Beweis. (2.6) ist notwendig für die Existenz eines Matchings von A, denn ist M ein Matching von A, so gilt

$$\forall X \subseteq A : |N_G(X)| \geq \left|N_{G[M]}(X)\right| = |X|. \tag{2.7}$$

Ist P ein Verbesserungsweg, so hat P ungerade Länge und $M \triangle E(P)$ ist ein Matching von G mit einer Kante mehr als M ($|M \triangle E(P)| = |M| + 1$).

Seien G, A wei in den Voraussetzungen des Satzes und $B := V(G) \setminus A$. Sei M ein *größtes* Matching.

Annahme: M ist kein Matching von A. Wir finden eine Menge X, die die Hall-Bedingung verletzt (dies zegigt der Satz). Es gibt dann eine Ecke $x_0 \in A \setminus V(M)$.

Sei R die Menge aller y für die es einen in x_0 beginnenden und in y endenden M-alternierenden Weg gibt. Es gilt $R \setminus \{x_0\} \subseteq V(M)$. $y \in R \cap A \setminus \{x\}$ muss nach Konstruktion mit einer Kante aus M inzidieren, für $y \in R \cap B$ gilt das auch, da sonst ein Verbesserungsweg von x_0 nach y existieren würde.

Daher gibt es keine Kante aus M, die eine Ecke $y \in R$ mit einem $z \in V(G) \setminus R$ verbindet: Richtig für x_0; ist $y \in R \cap A$ Endpunkt eines M-alternierenden Weges $P = x_0, \ldots, x_l = y$, so ist $y \in V(M)$, genauer $x_{l-1} y \in E(M)$, $x_{l-1} \in R$. Ist $y \in R \cap B$ Endpunkt eines M-alternierenden Weges $P = x_0, \ldots, x_l = y$ und $z \in V(G) \setminus R$ mit $yz \in M$, so ist $P^+ = x_0, \ldots, x_l, z$ M-alternierend, folglich $z \in R$. $\lightning$

Somit liegen mit einer Endecke einer Kante aus M schon *beide* Endecken in R.

Es gibt keine Kante in G, die eine Ecke $y \in R \cap A$ mit einer Ecke $z \in V(G) \setminus R$ verbindet: Sonst wäre y Endpunkt eines M-alternierenden Weges $P = x_0, \ldots, x_l = y$ und $P^+ = x_0, \ldots, x_l, z$ M-alternierend, also $z \in R$. ↯

Somit gilt $N_G(R \cap A) \subseteq R \cap B$ und $|R \cap A| = |R \cap B| + 1$.

$$\begin{aligned} \implies |N_G(R \cap A)| &\leq |R \cap B| && (2.8) \\ &= |R \cap A| - 1 && (2.9) \\ &< |R \cap A| && (2.10) \end{aligned}$$

Also verletzt $X := R \cap A$ die Hall-Bedingung. □

Aus diesem Beweis lässt sich ein Algorithmus erstellen, der entweder ein Matching von A findet oder zeigt, dass es ein solches Matching nicht geben kann.

Satz 2.1 ist **Toncias** (The obviously necessary condition is also sufficient). Der Begriff wurde durch C. St. J. A. Nash-Williams etabliert. Viele Sätze sind von dieser Bauart.

Die nächste Frage ist nun, wie man für allgemeine Graphen große Matchings findet.

Es ist schwierig zu entscheiden (NP-vollständig), ob ein Graph einen aufspannenden Kreis, einen sog. **Hamilton-Kreis** hat. Wenn es einen solchen Kreis gibt, gibt es automatisch auch ein perfektes Matching, welches alle Ecken enthält. Das Ermitteln eines solchen Hamilton-Kreises ist extrem aufwändig, aber die Vorbedingung lässt sich sehr leicht prüfen.

Für einen beliebigen Graphen kann man *Valenzen* willkürlich vorschreiben. Dies sind ganze Zahlen, die Ecke zugeordnet sind. Ein Problem ist nun, einen Teilgraphen zu finden, dessen Ecken genau so viele inzidierende Kanten pro Ecke wie die jeweilige Valenz hat. Wenn man an alle Ecken nun die Valenz 2 notiert (einen 2-Faktor ermittelt), könnte man vermuten, dass sich dadurch ein Hamilton-Kreis finden lässt. Allerdings ist es hier weiterhin möglich, dass der Teilgraph dann kein Hamilton-Kreis ist (nämlich genau dann, wenn der Teilgraph nicht zusammenhängend ist). Beispielsweise hat der Petersen-Graph einen 2-Faktor (z. B. wie in Abbildung 2.3 gezeigt), aber keinen Hamilton-Kreis.

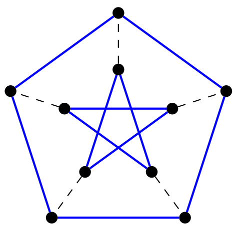

Abbildung 2.3.: 2-Faktor in einem Petersen-Graph

Satz 2.2 (Berge)**.** *Sei M ein Matching des Graphen G. Genau dann gibt es ein Matching von G mit mehr Kanten als M, wenn es einen Verbesserungsweg für M gibt.*

Beweis. Existiert ein Verbesserungsweg, so auch ein größeres Matching (für M). Siehe Beweis zu Satz 2.1. Existiere ein Matching N mit $|N| > |M|$. Betrachte $M \triangle N$. In $H = G[M \triangle N]$ ist jede Ecke mit höchstens zwei Kanten inzident. Die Komponenten von H sind daher Kreise oder Wege, die abwechselnd Kanten aus M und N verwenden. Weil $|N| > |M|$ muss eine dieser Komponenten mehr Kanten aus N als aus M benutzen. Diese ist ein Wege Weg ungerade Länge, der mit einer Kante aus N beginnt und endet; dieser Weg ist Verbesserungsweg. $\square$

A. Lektüre

Lehrbücher von:

- R. Diestel
- D. West
- J. A. Bondy
- U. S. R. Murty
- C. Berge
- F. Harary

Wikipedia ist auch okay.

Stichwortverzeichnis