

Vorlesung

# Graphen und Algorithmen

Prof. Dr. Matthias Kriesell

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Bäume</b>	<b>3</b>
1.1. Breiten- und Tiefensuchbäume	3
1.1.1. Breitensuche	8
1.1.2. Tiefensuche	10
1.2. Bäume kleinsten Gewichtes und Matroide	12
1.3. Das Traveling-Salesman-Problem	15
1.4. Der Satz von Courcelle	18
<b>2. Matchings</b>	<b>20</b>
2.1. Matchings in bipartiten Graphen	20
2.2. Faktorsätze	23
<b>3. Flüsse</b>	<b>30</b>
3.1. Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem	30
3.2. Der Satz von Menger	37
3.3. Der Satz von GUTNIKOV	40
<b>4. Färbungen</b>	<b>42</b>
4.1. Greedy-Färbung	42
4.2. Die Sätze von Brooks und Vizing	46
<b>A. Lektüre</b>	<b>49</b>
<b>B. Sätze, die in der Übung bewiesen werden</b>	<b>50</b>
<b>C. Prüfungstermine</b>	<b>51</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>53</b>

# 1. Bäume

## 1.1. Breiten- und Tiefensuchbäume

**1.1.** Ein (einfacher, ungerichteter) **Graph** ist ein paar  $G = (V, E)$ , bestehend aus einer Menge  $V$  von **Ecken** (engl. *vertices*) und einer Menge  $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x \neq y \text{ aus } V\}$  von **Kanten** (engl. *edge*).

$$V(G) := V \quad (1.1)$$

$$E(G) := E \quad (1.2)$$

Für Kanten wird auch üblicherweise die Schreibweise  $xy$  anstelle von  $\{x, y\}$  benutzt. Also ist auch  $xy = yx$ . In alter Literatur wurde teilweise auch  $x \in G$  und  $e \in G$  anstelle von  $x \in V$  und  $e \in E$  benutzt. Diese Schreibweise wird nicht mehr benutzt!

In dieser Definition wurden nur einfache ungerichtete Graphen definiert. Es gibt jedoch auch Definitionen für gerichtete Graphen (also  $xy \neq yx$ ) und Graphen mit Mehrfachkanten (Graphen mit mehreren unterschiedlichen Kanten  $xy$ ). Es kommt bei einfachen, ungerichteten Graphen also nur darauf an, wie die Knoten miteinander verbunden sind, nicht wie häufig oder in welche Richtung! Insbesondere ist es auch egal, wie man einen Graphen zeichnet, solange die Anzahl Knoten und die Verbindungen zwischen den Knoten passen. Als Beispiel seien hier zwei Zeichnungen des PETERSEN-Graphs in [Abbildung 1.1](#) gezeigt.

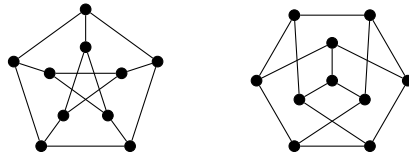


Abbildung 1.1.: Zwei Varianten des gleichen Graphen (PETERSEN-Graph)

**1.2.** Für  $xy \in E$  sind  $x, y \in V$  **benachbart** bzw.  $x$  ist **Nachbar** von  $y$ .

Alle benachbarten Graphen seien **endlich** ( $G$  endlich  $\iff V$  (und  $E$ ) sind endlich).

**1.3.** Ein Graph  $H$  heißt **Teilgraph** des Graphen  $G$  (in Zeichen:  $H \leq G$ ), falls  $V(H) \subseteq V(G)$  und  $E(H) \subseteq E(G)$ .

Für Teilgraphen ist zu beachten, dass nicht jede Kombination aus  $V' \subseteq V(G)$  und  $E' \subseteq E(G)$  ein Graph ist. Werden beispielsweise Kanten in  $E'$  aufgenommen, die Knoten enthalten, welche nicht in  $V'$  enthalten sind, ist das resultierende Paar  $H = (V', E')$  *kein* Graph und damit auch kein Teilgraph von  $G$ . Man kann jedoch Teilgraphen basierend auf einer Teilmenge von  $V(G)$  konstruieren.

1.4. Für  $X \subseteq V(G)$  sei

$$G[X] := (X, \{xy \in E(G) \mid x, y \in X\}) \quad (1.3)$$

Ein solcher Graph  $G[X]$  heißt dann der von  $X$  **induzierte** Teilgraph.  
Für  $F \subseteq E(G)$  sei

$$G[F] := (V(G), F) \quad (1.4)$$

der von  $F$  **induzierte** Teilgraph.  
Es gilt  $G[X] \leq G$  und  $G[F] \leq G$ .

Beispiele für induzierte Graphen sind in [Abbildung 1.2](#) und [Abbildung 1.3](#) gezeigt. Während der aus Knoten induzierte Teilgraph nur eine Teilmenge aus Knoten im Teilgraph hat, sind in einem aus Kanten induzierten Teilgraphen stets alle Knoten aus dem ursprünglichen Graphen enthalten, auch, wenn sie mit keiner Kante des Teilgraphen verbunden sind.

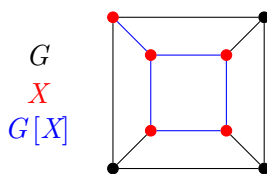


Abbildung 1.2.: Aus Knoten induzierter Teilgraph

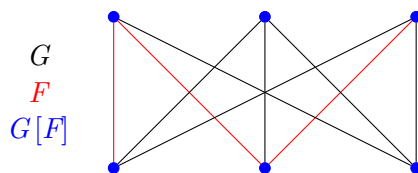


Abbildung 1.3.: Aus Kanten induzierter Teilgraph

**1.5.** Für  $X \subseteq V(G)$  entsteht

$$G - X := (V(G) \setminus X, \{xy \in E \mid x, y \in V(G) \setminus X\}) \quad (1.5)$$

$$= G[V(G) \setminus X] \quad (1.6)$$

durch **Löschung** der Ecken in  $X$  aus  $G$ .

Für  $F \subseteq E(G)$  entsteht

$$G - F := (V(G), E(G) \setminus F) \quad (1.7)$$

$$= G[E(G) \setminus F] \quad (1.8)$$

durch **Löschung** der Kanten in  $F$  aus  $G$ .

Besteht  $X$  aus nur einer Ecke  $x$ , so wird auch die Notation  $G - x := G - \{x\}$  benutzt. Analog wird  $G - e := G - \{e\}$  für  $F = \{e\}$  benutzt. Es gilt wieder  $G - X \leq G$  und  $G - F \leq G$ , also auch  $G - x \leq G$  und  $G - e \leq G$ .

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Definition von Zusammenhang.

**1.6.** Für zwei Ecken  $a, b \in E(G)$  heißt eine nichtleere Folge  $P = x_0, \dots, x_l$  von paarweise verschiedenen Ecken  $x_j$  mit

$$x_0 = a \quad (1.9)$$

$$x_l = b \quad (1.10)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, l\} : x_{i-1}x_i \in E(G) \quad (1.11)$$

ein **Weg** von  $a$  nach  $B$  der **Länge**  $l$ , auch  $a, b$ -**Weg** genannt.

Die Ecken  $a, b$  dieses Weges heißen **Endecken**, alle anderen sind **innere Ecken**.

Besonders zu beachten ist hierbei, dass die Länge des Weges 1 kleiner ist als die Anzahl Knoten in  $P$ ! Für den Weg können auch Kanten- und Knotenmengen definiert werden:

**1.7.**

$$V(P) := \{x_0, \dots, x_l\} \quad (1.12)$$

$$E(P) := \{x_{i-1}x_i : i \in \{1, \dots, l\}\} \quad (1.13)$$

$(V(P), E(P))$  ist auch wieder ein Teilgraph und wird manchmal auch  $a, b$ -Weg (also wie oben) genannt. Diese Teilgraphen sind immer kreisfrei, da gemäß Definition die Ecken  $x_j \in V(P)$  paarweise verschieden sind. Insbesondere sind auch einzelne Kanten oder auch einzelne Knoten Wege.

Aus der Teilgraphendarstellung eines Weges lässt sich die Folgendarstellung (bis auf die Durchlaufrihtung) zurückgewinnen.

**1.8.** Mit  $a \sim_G b \iff \exists a, b\text{-Weg in } G$  wird eine Äquivalenzrelation auf  $V(G)$  definiert. Die Äquivalenzklassen heißen **Zusammenhangskomponenten** oder **Komponenten**. Auch die von den Komponenten induzierten Teilgraphen heißen **Komponenten**.

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, da sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Die Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich erfüllt, da der Graph ungerichtet ist und für jeden  $a, b$ -Weg auch immer ein  $b, a$ -Weg existiert. Für die Transitivität kann man einen  $a, b$ -Weg und  $b, c$ -Weg im Graphen betrachten. Um einen  $a, c$ -Weg zu finden, verfolge man den  $a, b$ -Weg, bis man auf einen Knoten stößt, der auf dem  $b, c$ -Weg liegt. Verfolgt man ab hier den  $b, c$ -Weg, hat man einen  $a, c$ -Weg gefunden. [Abbildung 1.4](#) zeigt solche  $a, b$ - und  $b, c$ -Wege im Graphen.

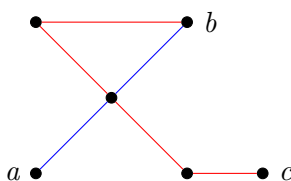


Abbildung 1.4.:  $a, b$ -Weg und  $b, c$ -Weg in einem Graphen

**1.9.** Ein Graph mit höchstens einer Komponente heißt **zusammenhängend**. Ist ein Graph nicht zusammenhängend, so heißt er **unzusammenhängend**.

Als abkürzende Schreibweisen werden in dieser Vorlesung auch *zshgd* und *zh* für „zusammenhängend“ benutzt.

**1.10.** Ein Graph  $T$  heißt **Baum**, falls  $T$  zusammenhängend ist und  $T - e \forall e \in E(T)$  unzusammenhängend ist.  $T$  ist also **minimal zusammenhängend**.

**1.11.** Ein **Wald** ist ein Graph, dessen Komponenten Bäume sind. Ein zusammenhängender Wald ist ein Baum.

**Verfahren 1.1:** Sei  $x_0 \in V(G)$ . (\*) Wenn es unter den bereits gewählten Ecken  $x_0, x_1, \dots, x_l$  eine Ecke  $x_t$  gibt, die einen Nachbarn  $y \in V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_l\}$  besitzt, dann setze  $x_{l+1} = y$  und  $f(l+1) := t$  und iteriere (\*).

**Satz 1.1.** *Verfahren 1.1 endet mit einem Teilbaum.*

$$T := (\{x_0, \dots, x_l\}, \{x_t x_{f(t)} \mid t \in \{1, \dots, l\}\}) . \tag{1.14}$$

Dabei ist  $\{x_0, \dots, x_l\} = V(T)$  die Komponente von  $G$ , die  $x_0$  enthält.

Ein Beispiel dafür ist [Abbildung 1.5](#). Das Verfahren ist nicht deterministisch, da in jedem Schritt ein Nachbar eines beliebigen Knotens aus der Menge gewählt werden kann.

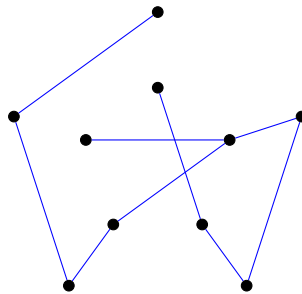


Abbildung 1.5.: Erzeugung eines Baums aus einem PETERSEN-Graph

Bemerkung: Für  $t \in \{0, \dots, l\}$  liefert  $x_t, x_{f(t)}, x_{f(f(t))}, \dots, x_0$  den  $x_t, x_0$ -Weg in  $T$ .

**Beweis.** Das Verfahren endet, weil in jedem Schritt die Folge  $x_0, \dots, x_n$  um eine noch nicht dort enthaltene Ecke  $x_{l-1}$  vergrößert wird und  $V(G)$  endlich ist.

Sei  $T_s = (\{x_0, \dots, x_s\}, \{x_t x_{f(t)} \mid t \in \{1, \dots, s\}\})$ . Zeige induktiv über  $s$ , dass  $T_s$  ein Teilbaum von  $G$  ist.

Für  $s = 0$ :  $T_0 = (\{x_0\}, \emptyset)$  ist Teilbaum. ✓

Sei nun  $T_0, \dots, T_s$  Teilbaum von  $G$ . **z:** Auch  $T_{s+1}$  ist ein Teilbaum von  $G$ .

Nach IV gibt es in  $T_j$  für jedes  $j \in \{0, \dots, s\}$  einen  $x_j, x_0$ -Weg, also gilt  $x_j \sim_G$  Wegen  $x_{s+1} x_{f(s+1)} \in E(T_{s+1})$  gilt auch  $x_{s+1} \sim x_{f(s+1)}$ , also

$$\forall j \in \{0, \dots, s\} : x_{s+1} \sim_{T_{s+1}} x_0 \tag{1.15}$$

$$\iff \forall i, j \in \{0, \dots, s+1\} : x_i \sim_{T_{s+1}} x_j \tag{1.16}$$

$$\implies T_{s+1} \text{ zusammenhängend} \tag{1.17}$$

$$\text{z} : T_{s+1} - e \text{ unzusammenhängend } \forall e \in E(T_{s+1}) \tag{1.18}$$

Für  $e = x_{s+1} x_{f(s+1)}$  ist  $x_{s+1}$  zu keiner Kante in  $T_{s+1} - e$  inzident; insbesondere gibt es keinen  $x_{s+1}, x_0$ -Weg in  $T_{s+1} - e$ . Für  $e \in E(T_{s+1}) \setminus \{x_{s+1} x_{f(s+1)}\} = E(T_s)$  ist nach IV zumindest  $T_s - e$  unzusammenhängend. Daher existieren  $a, b \in V(T_s - e) = V(T_s)$  so, dass kein  $a, b$ -Weg in  $T_s$  existiert.

Gäbe es einen  $a, b$ -Weg  $P$  in  $T_{s+1} - e$ , so enthält  $P$  die Kante  $x_{s+1} x_{f(s+1)}$  oder die Ecke  $x_{s+1}$ . In beiden Fällen enthält  $P$  die Ecke  $x_{s+1}$  und zwar als *innere Ecke*. Aber  $x_{s+1}$  ist in  $T_{s+1}$  mit nur einer Kante inzident (nämlich  $x_{s+1} x_{f(s+1)}$ ) und kann daher nicht innere Ecke eines Weges in  $T_{s+1}$  sein. ↯

Lücke

Folglich gibt es keinen solchen  $a, b$ -Weg in  $T_{s+1}$ . Entsprechend ist  $T_{s+1} - e$  unzusammenhängend. Somit ist  $T_{s+1}$  ein Baum.

Sei  $H$  (bzw.  $V(H)$ ) die Komponente von  $G$ , die  $x_0$  enthält.  $\underline{z}$ :  $V(T) = V(H)$ .

$T$  ist zusammenhängender Teilgraph von  $G$ , der  $x_0$  enthält. Daher  $V(T) \subseteq V(H)$ .

$\underline{z}$ :  $V(T) \not\subseteq V(H)$ .

Andernfalls gäbe es ein  $z \in V(H) \setminus V(T)$ . Da  $H$  zusammenhängend ist und  $x_0 \in V(H)$  existiert ein  $z, x_0$ -Weg  $Q$  in  $H$ .

$$Q = \underbrace{y_0}_{=z}, y_1, \dots, y_k \underbrace{y_k}_{=x_0} \quad (1.19)$$

Daher existiert  $j \in \{0, \dots, k\}$  mit  $y_j \in V(T)$  und  $y_{j+1} \notin V(T)$ . Also ist  $y_{j+1} = x_t$  für  $t \in \{0, \dots, l\}$ . Also existiert nach Abbruch der Iteration von [Verfahren 1.1](#) mit  $x_0, \dots, x_l$  eine Ecke  $y = y_{j+1} \in V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_l\}$  mit einem Nachbarn  $x_t, t \in \{0, \dots, l\}$ .  $\not\subseteq$

Somit ist  $V(H) = V(T)$ .  $\square$

**1.12.** Ein Teilgraph  $H$  von  $G$  heißt **aufspannend**, falls  $V(H) = V(G)$ . Ein Teilbaum von  $G$  heißt **Spannbaum**, falls er aufspannend ist.

[Verfahren 1.1](#) liefert also einen Spannbaum derjenigen Komponente von  $G$ , die  $x_0$  enthält. Die gezielte Auswahl des ältesten oder jüngsten gesehenen Nachbarn in [Verfahren 1.1](#) führt zu **Breitensuche** bzw. **Tiefensuche**.

### 1.1.1. Breitensuche

**1.13.** Die Länge eines kürzesten  $a, b$ -Weges im Graphen  $G$  heißt **Abstand** von  $a, b$ . Bezeichnung:  $d_G(a, b)$ .

Gibt es keinen solchen Weg, so setze  $d_G(a, b) = \infty$ .

Also  $\min \{|E(P)| : P \text{ ein } a, b\text{-Weg}\} \cup \{\infty\} = d_G(a, b)$ . Als Beispiel sei hier [Abbildung 1.6](#) gezeigt. Indem man irgendeinen Pfad im Graphen sucht, kann man zwischen zwei Ecken  $a, b$  immer eine obere Schranke für  $d_G(a, b)$  finden. Durch systematisches Aufspannen des Graphen mit Breitensuche kann man den Abstand aller Ecken zu  $a$  im Graphen und damit auch  $d_G(a, b)$  bestimmen.

zeichnung 1.5

**Satz 1.2.**  $d_G : V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  ist für zusammenhängende  $G$  eine **Metrik**, also

$$(1) \quad d_G(a, b) \geq 0 \text{ und } d_G(a, b) = 0 \iff a = b$$

$$(2) \quad d_G(a, b) = d_G(b, a) \forall a, b \in V(G)$$

$$(3) \quad d_G(a, b) + d_G(b, c) \leq d_G(a, c) \forall a, b, c \in V(G)$$

**Beweis.** Siehe Übung.  $\square$



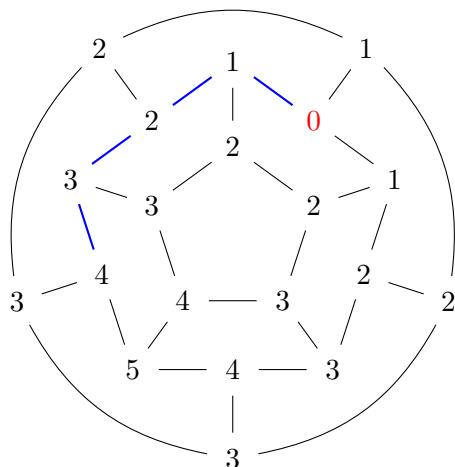


Abbildung 1.6.: Weg und Abstände zwischen zwei Punkten in einem Dodekaeder

**1.14.** Sei  $G$  zusammenhängend und  $x_0$  eine Ecke von  $G$ . Ein Spannbaum  $T$  von  $G$  heißt **Breitensuchbaum** (BFS-Tree, Breadth-First-Search-Tree) bei  $x_0$ , falls  $d_T(z, x_0) = d_G(z, x_0) \forall z \in V(G)$ .

**Verfahren 1.2** (Breitensuche): (\*) Wenn es unter den bereits gewählten Ecken  $x_0, \dots, x_l$  eine Ecke  $x_t$  gibt, die einen Nachbarn  $y \in V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_l\}$  hat, wähle  $x_t$  so, dass  $t$  kleinstmöglich ist. Iteriere (\*).

**Verfahren 1.2** erzwingt, dass wir immer die Nachbarn in den Baum aufnehmen, die wir schon am längsten kennen.

**Satz 1.3** (Breitensuche). *Verfahren 1.2* endet mit einem Breitensuchbaum

$$T = (\{x_0, \dots, x_l\}, \{x_t x_{f(t)} \mid t \in \{1, \dots, l\}\}) \tag{1.20}$$

von  $G$  bei der Ecke  $x_0$ .

**Beweis.** Nach **Satz 1.1** endet das Verfahren mit einem Spannbaum  $T$  von  $G$ . Offenbar gilt:  $d_G(x_0, x_0) = d_T(x_0, x_0)$ .

$\mathcal{Z}$ : Induktiv über  $s$ :

$$d_G(x_s, x_0) = d_T(x_s, x_0) \geq d_T(x_{s-1}, x_0) \text{ für } s > 0. \tag{1.21}$$

Die Behauptung (1.21) gilt für  $s = 0$ . Sei nun die Behauptung „bis“  $s$  bewiesen (IV).

$\mathcal{Z}$ : (1.21) gilt für  $s + 1$  anstelle von  $s$ .

Sei  $P$  ein kürzester  $x_{s+1}, x_0$ -Weg in  $G$  und sei  $x_j$  die erste Ecke in der Folgendarstellung von  $P$  mit  $j \leq s$ . Nach Wahl von  $f(s + 1)$  gibt es kein  $x_t$  mit  $t < f(s + 1)$ , die einen

Nachbarn außerhalb in  $V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_s\}$ . Daher ist  $j \geq f(s+1)$ . Daher gilt:

$$d_T(x_{s+1}, x_0) \stackrel{T \leq G}{\geq} d_G(x_{s+1}, x_0) \quad (1.22)$$

$$\geq 1 + d_G(x_j, x_0) \quad \text{da } x_j \text{ nicht die erste Ecke auf } P \quad (1.23)$$

$$\geq 1 + d_G(x_{f(s+1)}, x_0) \quad \text{Monotonie von } (d_G(x_0, x_0), d_G(x_1, x_0), \dots) \quad (1.24)$$

$$\stackrel{\text{(IV)}}{=} 1 + d_T(x_{f(s+1)}, x_0) \quad (1.25)$$

$$= d_T(x_{s+1}, x_0) \quad (1.26)$$

Also gilt überall Gleichheit, insbesondere:

$$d_T(x_{s+1}, x_0) = d_G(x_{s+1}, x_0) \quad (1.27)$$

Für  $s = 0$  gilt sowieso:

$$d_T(x_{s+1}, x_0) \geq 0 = d_T(x_s, x_0) \quad (1.28)$$

Für  $s > 0$ : Nach Wahl von  $f(s)$  gibt es kein  $x_t$  mit  $t < f(s)$ , das einen Nachbarn außerhalb von  $x_0, \dots, x_{s-1}$  hat. Daher gilt  $f(s+1) \geq f(s)$ . Die Monotonieeigenschaft in der Induktionsvoraussetzung zeigt:

$$d_T(x_{s+1}, x_0) = d_T(x_{f(s+1)}, x_0) + 1 \quad (1.29)$$

$$\geq d_T(x_{f(s)}, x_0) + 1 \quad \text{da } f(s+1) \geq f(s) \wedge f(s+1) < s+1 \quad (1.30)$$

$$= d_T(x_s, x_0). \quad (1.31)$$

Dies zeigt (1.21). Also ist  $T$  Breitensuchbaum.  $\square$

### 1.1.2. Tiefensuche

**1.15.** Ein Spannbaum  $T$  eines zusammenhängenden Graphen  $G$  heißt ein **Tiefensuchbaum** bei  $x_0$  ( $x_0 \in V(G)$ ), auch **DFS-Tree** (Depth-First-Search), falls für jedes  $xy \in E(G)$  die Ecke  $y$  in dem  $x, x_0$ -Weg von  $T$  vorkommt oder die Ecke  $x$  in dem  $y, x_0$ -Weg von  $T$  vorkommt.

**Verfahren 1.3** (Tiefensuche): Sei  $x_0$  Ecke des zusammenhängenden Graphen  $G$ .

(\*) Wenn es unter den bereits gewählten Ecken  $x_0, \dots, x_l$  eine Ecke  $x_t$  gibt, die einen Nachbarn  $y \in V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_l\}$  hat, wähle  $x_t$  so, dass  $t$  größtmöglich ist. Iteriere (\*).

Das Verfahren wählt zunächst immer den längstmöglichen Weg. Am Anfang wird ein sehr langer Weg durch den Graphen gewählt, bis man sich nicht mehr weiter von der Wurzel entfernen kann. Im Beispiel des PETERSEN-Graph (Abbildung 1.7) reicht dies sogar so weit, ein Tiefensuchbaum völlig unverzweigt ist.

Ist dies nicht der Fall, geht man zunächst so weit wie möglich. Danach geht man so wenig wie möglich wieder zurück, bis man eine Ecke findet, die noch nicht in  $V(T)$  ist.

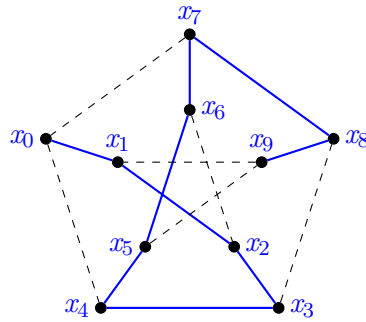


Abbildung 1.7.: Tiefensuche in einem PETERSEN-Graph

Jeden dieser Pfade, die sich ohne Backtracking finden lassen, können als Segmente im Baum betrachtet werden. Sobald man in einem solchen Segment einmal Backtracking gemacht hat, kann man keine Ecken mehr finden, die tiefer in diesem Segment Anschluss haben. Dies wird später im Beweis gezeigt.

**Satz 1.4** (Tiefensuche). *Das Verfahren endet mit einem Tiefensuchbaum*

$$T = (\{x_0, \dots, x_l\}, \{x_t x_{f(t)} \mid t \in \{1, \dots, l\}\}) \tag{1.32}$$

von  $G$  bei der Ecke  $x_0$ .

Grafik Segmente  
Tiefensuche zum  
Beweis

**Beweis.** Durch Satz 1.1 endet das Verfahren mit einem Spannbaum  $T$  von  $G$ .

$\mathcal{Z}$ : Induktiv über  $s$ :

- (a) Unter den Ecken  $x_0, \dots, x_s$  haben nur die Ecken des  $x_s, x_0$ -Weges in  $T$  Nachbarn in  $V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_s\}$ .
- (b) Für  $s > 0$  sind unter den Ecken  $x_0, \dots, x_{s-1}$  nur die Ecken des  $x_{f(s)}, x_0$ -Weges in  $T$  zu  $x_s$  benachbart.

Für  $s = 0$  gelten (a) und (b) offensichtlich. Nehmen wir nun an, dass die beiden Aussagen „bis“  $s$  gelten (IV).

$\mathcal{Z}$ : (a) und (b) gelten sinngemäß für  $s + 1$  anstelle von  $s$ .

Nach IV (a) liegt  $x_{f(s+1)}$  auf dem  $x_s, x_0$ -Weg. Sei nun  $x_j, j \leq s + 1$  zu einer Ecke  $y \neq x_j$  in  $G$  außerhalb von  $x_0, \dots, x_s$  benachbart. Für  $j \leq s$  liegt  $x_j$  auf dem  $x_s, x_0$ -Weg in  $T$  (IV). Nach Wahl von  $x_{s+1}$  kann kein  $x_t$  mit  $t > f(s + 1), t \leq s$ , Nachbarn in  $G$  außerhalb von  $x_0, \dots, x_s$  haben. Folglich gilt  $j \leq f(s + 1)$ .

Die Folge der Indizes  $s, f(s), f(f(s)), \dots, 0$  entlang des  $x_s, x_0$ -Weges in  $T$  ist absteigend. Also liegt  $x_j$  auf dem  $x_{f(s+1)}, x_0$ -Weg in  $T$ . Damit ist der Induktionsschluss für (b) erbracht und  $x_j$  liegt auf dem  $x_{s+1}, x_0$ -Weg in  $T$ . Für  $j = s + 1$  gilt letzteres trivialerweise! Damit ist der Induktionsschluss für (a) erbracht.

Aus (b) folgt: für  $x_s x_j \in E(G)$  mit  $j < s$ :  $x_j$  liegt auf dem  $x_s, x_0$ -Weg. Somit gilt  $\forall xy \in E(G) : y$  liegt auf dem  $x, x_0$ -Weg oder  $x$  liegt auf dem  $y, x_0$ -Weg.  $\square$

**1.16.** Ist  $T$  ein Baum und  $x_0 \in V(T)$ , so wird durch

$$y \leq z : \iff y \text{ liegt auf dem } x_0, z\text{-Weg in } T \quad (1.33)$$

eine Ordnung auf  $V(T)$  definiert.

Name für def.

Folglich ist ein Spannbaum  $T$  des Graphen  $G$  genau dann ein Tiefensuchbaum von  $G$  bei  $x_0$ , wenn die Endecken jeder Kante von  $G$  bzgl  $\leq$  vergleichbar sind.

## 1.2. Bäume kleinsten Gewichtes und Matroide

Als nächstes betrachten wir gewichtete Graphen. Diese können in der Realität bspw. Kosten (bspw. Fahrzeit) entsprechen.

**1.17.** Sei  $G$  ein Graph. Ein **Kreis** der **Länge**  $l \geq 3$  in  $G$  ist eine Folge  $C = x_0, \dots, x_{l-1}, x_0$  derart, dass  $x_0, \dots, x_{l-1}$  ein Weg ist und  $x_{l-1}x_0 \in E(G)$ . Setze

$$V(C) = \{x_0, \dots, x_{l-1}\} \subseteq V(G) \quad (1.34)$$

$$E(C) = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{l-2}x_{l-1}, x_{l-1}x_0\} \subseteq E(G) \quad (1.35)$$

Auch der Teilgraph  $(V(C), E(C))$  heißt **Kreis**.

Aus dem Teilgraphen lässt sich die Folgendarstellung bis auf Startecke und Durchlauf-richtung vollständig rekonstruieren. Insgesamt gibt es  $2l$  mögliche Folgen, die sich aus dem Teilgraphen rekonstruieren lassen (eine Folge pro Ecke und Durchlauf-richtung).

Zudem ist ein Graph ohne Kreise ein **Wald** und ein zusammenhängender Graph ohne Kreise ein **Baum**.

**1.18.** Für einen Graphen  $G$  heißt  $F \subseteq E(G)$  **kreisfrei**, falls  $G[F] = (V(G), F)$  keinen Kreis enthält (also ein Wald ist).

**Übung:** Für einen nichtleeren Wald  $G$  mit  $c$  Komponenten gilt:

$$|E(G)| = |V(G)| - c \quad (1.36)$$

Für einen Baum mit einer Ecke ist dies trivialerweise wahr. Für größere Bäume kann man induktiv immer eine Blatt finden, was man löschen kann. Für diesen verkleinerten Baum gilt die Aussage dann gemäß IV. Durch erneutes Anhängen des Blattes kann man dann zeigen, dass die Gleichung gilt. Wenn man eine Ecke löscht, die kein Blatt ist, ist der Graph nicht mehr zusammenhängend und damit wächst  $c$  um 1. Das gleicht die Verringerung der Anzahl Kanten wieder aus.

**Satz 1.5** (Austauschlemma für Graphen). *Sind  $F, F'$  zwei kreisfreie Kantenmengen des Graphen  $G$  mit  $|F| < |F'|$ , so gibt es eine Kante  $e \in F' \setminus F$  mit  $F \cup \{e\}$  kreisfrei.*

**Beweis.** Seien  $c, c'$  die Anzahlen der Komponenten von  $G[F]$  bzw.  $G[F']$ . Wäre die Eckenmenge jeder Komponente von  $G[F']$  ganz in der Eckenmenge einer Komponente von  $G[F]$  enthalten, so folgt  $c' > c$ . Es gilt aber

$$c' = |V(G[F'])| - |E(G[F'])| \quad (1.37)$$

$$= |V(G)| - \underbrace{|F'|}_{>|F|} \quad (1.38)$$

$$< |V(G)| - |F| \quad (1.39)$$

$$= |V(G[F])| - |E(G[F])| \quad (1.40)$$

$$= c \quad (1.41)$$

Also gibt es eine Komponente von  $G[F]$  mit Endpunkten in mindestens zwei Komponenten von  $G[F']$ . Also gibt es eine Kante  $e = wz$  in  $F' \setminus F$  mit Endpunkten in verschiedenen Komponenten von  $G[F]$ . Dann ist auch  $F' \cup \{e\}$  kreisfrei.  $\square$

Eine vergleichbare Eigenschaft ist auch in Vektorräumen zu beobachten. Bekannt ist dies als das Ergänzungslemma oder Austauschlemma von STEINITZ. Sind  $F, F'$  zwei linear unabhängige Teilmengen im Vektorraum  $V$  über  $K$  und ist  $|F| < |F'| < \infty$ , so gibt es einen Vektor  $\vec{x} \in F' \setminus F$ , sodass  $F \cup \{\vec{x}\}$  linear unabhängig bleibt.

Die maximal kreisfreien Teilmengen eines zusammenhängenden Graphen  $G$  sind genau die Kantenmengen seiner Spannbäume. Spannbäume lassen also sich nicht nur darüber charakterisieren, dass sie minimal zusammenhängen sind, sondern auch maximal kreisfrei. Je zwei Spannbäume haben dieselbe Mächtigkeit, nämlich  $|V(G)| - 1$ .

Im Folgenden wird mit einer **Gewichtsfunktion**  $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  gearbeitet, die Kanten ein Gewicht zuordnet. Solch ein Gewicht kann bspw. Kosten für Strecken in einem Transportnetz entsprechen.

**1.19.** Für gegebenes  $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  heißt ein Spannbaum  $T$  von  $G$  ein **Spannbaum minimalen Gewichtes**, falls

$$w(T) := \sum_{e \in E(T)} w(e) \leq w(S) = \sum_{e \in E(S)} w(e) \quad (1.42)$$

für jeden Spannbaum  $S$  von  $G$  gilt.

Ein Spannbaum kann bspw. genutzt werden, um in einem großen Netzwerk einen Pfad im Backbone zu jedem Knoten zu finden. Möglicherweise möchte man einen Spannbaum minimalen Gewichtes finden um möglichst billig zu jedem Knoten Pakete senden zu können.

**Satz 1.6** (Kruskal, Greedy-Algorithmus). *Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph und  $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .*

**Verfahren 1.4:** Setze  $F := \emptyset$ .

(\*) Wenn es in  $E(G) \setminus F$  eine Kante  $e$  gibt, für die  $F \cup \{e\}$  kreisfrei bleibt, wähle  $e$  so, dass  $w(e)$  kleinstmöglich ist, setze  $F := F \cup \{e\}$ . Iteriere (\*).

Das Verfahren endet mit einem Spannbaum von  $G$  minimalen Gewichtes, nämlich  $T = G[F]$ .

Es ist im Übrigen nicht wichtig, dass die Gewichtsfunktion  $w$  nur nichtnegative Gewichte zurückgibt. Es hilft jedoch beim Rechnen, wenn die Werte nur nichtnegativ sind. In der Praxis werden zudem überwiegend ganze Zahlen statt reeller Zahlen benutzt.

Das Verfahren endet mit einem maximal kreisfreien Graphen, da solange wie möglich und ausschließlich Kanten wählen, sodass der Graph kreisfrei bleibt. Da  $G$  zusammenhängend ist, enthält der Graph am Ende des Verfahrens alle Ecken aus  $G$ . Damit endet das Verfahren auch mit einem Spannbaum. Nicht selbstverständlich ist jedoch, dass der Spannbaum auch minimalen Gewichtes ist.

**Beweis.** Das Verfahren endet mit einer maximal kreisfreien Kantenmenge  $F$ , also ist  $G[F]$  ein Spannbaum von  $G$ . ✓

Sei  $e_1, \dots, e_m$  die Folge der Kanten aus  $F$  in der Reihenfolge ihres Auftretens in der Iteration. Sei  $f_1, \dots, f_m$  die Folge der Kanten eines beliebigen Spannbaumes  $B$  in der Reihenfolge aufsteigender Einzelgewichte.  $m = |V(G)| - 1$ .

Wäre  $w(F) > w(E(B))$ , dann gäbe es einen Index  $i \in \{1, \dots, m\}$  mit  $w(e_i) > w(f_i)$ . (Wähle  $i$  kleinstmöglich.)

$$F'' := \{e_1, \dots, e_{i-1}\} \quad (1.43)$$

ist kreisfrei.

$$F' := \{f_1, \dots, f_{i-1}, f_i\} \quad (1.44)$$

ist kreisfrei.

$$(1.45)$$

$|F''| < |F'|$  impliziert nach [Satz 1.5](#): Es gibt  $f \in F' \setminus F''$  so, dass  $F'' \cup \{f\}$  kreisfrei bleibt.  $f$  ist folglich eine Option für die Wahl von  $e_i$  im  $i$ -ten Iterationsschritt gewesen. Es gilt nach der Wahl von  $e_i$ :  $w(e_i) \leq w(f)$ . Aber  $w(f) \leq w(f_i) < w(e_i)$ . ✗

Also gilt tatsächlich

$$w(E(B)) \geq w(F) = w(E(G[F])). \quad (1.46)$$

□

Im Beweis wurde im wesentlichen das Austauschlemma und die Eigenschaft, dass jede Teilmenge einer kreisfreien Menge wieder kreisfrei ist, verwendet. Dies legt nahe, dass [Satz 1.6](#) sich in allgemeinere Situation übertragen lässt.

**1.20.** Ein Paar  $M = (E, \mathfrak{F})$  aus einer endlichen Menge  $E$  und einer Menge  $\mathfrak{F}$  von Teilmengen von  $E$  heißt ein (endliches) **Matroid** auf  $E$ , falls gilt:

- (1)  $\emptyset \in \mathfrak{F}$ ,
- (2) aus  $F \subseteq F' \in \mathfrak{F}$  folgt  $F \in \mathfrak{F}$  und
- (3) zu  $F, F' \in \mathfrak{F}$  mit  $|F| < |F'|$  gibt es ein  $e \in F' \setminus F$  mit  $F \cup \{e\} \in \mathfrak{F}$ .

Die Mengen aus  $\mathfrak{F}$  heißen gewöhnlich **unabhängig**, bezüglich  $\subseteq$  maximale unabhängige Mengen heißen **Basen** von  $M$ .

Aus der dritten Bedingung ergibt sich sofort, dass je zwei Basen eines Matroids dieselbe Mächtigkeit haben. Satz 1.6 lässt sich auf die allgemeinere Situation von Matroiden übertragen.

**Satz 1.7** (Greedy-Algorithmus für Matroide). *Sei  $M = (E, \mathfrak{F})$  ein Matroid und  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .*

**Verfahren 1.5:** Setze  $F := \emptyset$ .

(\*) Wenn es in  $E \setminus F$  ein  $e$  gibt, für das  $F \cup \{e\} \in \mathfrak{F}$  gilt, wähle  $e$  so, dass  $w(e)$  kleinstmöglich ist, setze  $F := F \cup \{e\}$  und iteriere (\*).

Das Verfahren endet mit einer Basis  $F$  von  $M$  minimalen Gesamtgewichts

$$w(F) := \sum_{e \in F} w(e). \quad (1.47)$$

**Beweis.** Das Verfahren liefert offenbar eine maximal unabhängige Menge, also eine Basis  $F$ . Seien  $e_1, \dots, e_m$  die Elemente, die im Verlauf des Algorithmus gewählt wurden, und zwar in der Reihenfolge ihrer Auswahl. Seien  $f_1, \dots, f_m$  die Elemente einer beliebigen Basis  $B$  mit minimalem Gesamtgewicht in der Reihenfolge aufsteigender Einzelgewichte. Wäre  $w(F) > w(B)$ , so wäre  $w(e_i) > w(f_i)$  für mindestens ein  $i$  und wir wählen  $i$  kleinstmöglich. Nach der Eigenschaft (2) für Matroide sind  $F := \{e_1, \dots, e_{i-1}\}$  und  $F' := \{f_1, \dots, f_i\}$  unabhängig; nach der Austausch Eigenschaft (3) für Matroide gibt es ein  $f \in F' \setminus F$  so, dass  $F \cup \{f\}$  unabhängig bleibt;  $f$  ist also eine Option bei der  $i$ -tem Iteration von (\*), d. h. bei der Wahl von  $e = e_i$ , gewesen, und somit gilt  $w(e_i) \leq w(f)$ . Es gilt aber  $w(f) \leq w(f_i) < w(e_i)$ . ↯

Also ist  $w(F)$  minimal. □

### 1.3. Das Traveling-Salesman-Problem

Das Traveling-Salesman-Problem (kurz: TSP) lässt sich wie folgt beschreiben: Man finde eine Rundreise durch gegebene Städte derart, dass man jede Stadt genau einmal besucht (außer der ersten, die man ein zweites Mal sieht, am Ende der Reise) und die unter allen solchen Rundreisen minimale Gesamtkosten verursacht. Die variablen Kostenanteile entstehen in diesem Modell natürlich entlang der Reisewege (die Summe aller Kosten in den

Städten selber darf als konstant angenommen werden); für je zwei Städte  $A, B$  sind die Kosten  $w(A, B)$  für die Reise von  $A$  nach  $B$  bekannt, und die zu minimierenden Kosten ergeben sich durch Summation. Wir wollen einige Zusatzannahmen ins Spiel bringen, dass nämlich erstens diese Kosten nichtnegativ sind, dass zweitens  $w(A, B) = w(B, A)$  für je zwei Städte  $A, B, C$  ist (Dreiecksungleichung). Hierdurch wird die Diskussion ein wenig vereinfacht, das neue Problem nennt man auch das *metrische* TSP.

Ref Abschnitt  
4.3

Da die Zahl der Rundreisen durch  $n$  Städte im wesentlichen  $n!$  ist und daher explodiert, ist „Durchprobieren“ hier nicht die Methode der Wahl. (Tatsächlich gehört das Problem zu den NP-vollständigen Problemen, siehe ). Begnügt man sich dagegen mit einem Verfahren, das zwar nicht die optimale, jedoch eine Lösung von beweisbar (!) „guter“ Qualität liefert, sieht die Welt anders aus: Wir beschreiben, wie mit Hilfe von [Satz 1.6](#) eine Rundreise schnell gefunden werden, deren Kosten weniger als doppelt so groß wie die einer optimalen Rundreise sind. Daneben bietet eine wie auch immer ermittelte „gute“ obere Schranke für die Kosten einer optimalen Rundreise die Möglichkeit, in auf verzweigter Suche beruhenden Verfahren den Suchraum einzuschränken (branch-and-cut).



**Verfahren 1.6:**

- (1) Sei  $V$  die Menge der Städte, etwa:  $|V| = n$ ,  $E$  die Menge aller zweielementigen Teilmengen von  $V$  und  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Kostenfunktion. Wir sind nun mit  $G := (V, E)$  in der Situation des Satzes von Kruskal, der es uns erlaubt, einen Spannbaum  $T$  von  $G$  minimalen Gesamtgewichtes zu finden.
- (2) Entlang dieses Spannbaums finden wir eine Folge  $R = x_0, \dots, x_{2n-1}$  derart, dass es zu jeder Kante  $e$  von  $T$  genau zwei Indizes  $j, k$  gibt mit  $x_j x_{j+1} = x_k x_{k+1} = e$  (alle Indizes modulo  $2n$ , Beweis zum Beispiel induktiv durch Löschen von Blättern).
- (3) Zunächst sei das *Gesamtgewicht*  $w(S)$  einer Folge  $S = x_0, \dots, x_{l-1}$  definiert durch:

$$w(S) := \sum_{i=0}^{l-1} w(x_i x_{i+1}). \quad (1.48)$$

Die im zweiten Schritt konstruierte Folge enthält jede Ecke aus  $V$  *mindestens* einmal und hat Gesamtkosten  $w(R) \leq 2w(T)$ . Wir dünne sie schrittweise aus: Ist  $S$  wie oben und  $x_i = x_j$  für  $i < j$ , so streichen wir  $x_j$  aus der Folge und erhalten  $S'$ . In den Gesamtkosten tritt dann anstelle des Doppelterms  $w(x_{i-1}x_i) + w(x_i x_{i+1})$  der Term  $w(x_{i-1}x_{i+1})$  auf. Infolge der Dreiecksungleichung wachsen die Kosten beim Übergang von  $S$  nach  $S'$  nicht. Durch Iteration erhält man schließlich eine Rundreise  $S$ , in der jede Stadt *genau* einmal vorkommt und nach wie vor gilt  $w(S) \leq 2w(T)$  (Vor der Iteration werden die Ecken  $x_i$  für  $i > j$  umindiziert auf  $x_{i-1}$ .)

Sei nun  $Q = z_0, \dots, z_{n-1}$  eine optimale Rundreise. Obwohl wir  $Q$  nicht kennen, können wir doch die Kosten von  $Q$  und  $S$  vergleichen, denn  $P := (V, \{z_i z_{i+1} \mid i \in \{0, \dots, n-1\}\})$  ist ein Spannbaum von  $G$  und  $w(Q) = w(P) + w(x_{n-1}x_0) \geq w(P) \geq w(T)$ . Infolgedessen kommt  $w(S) \leq 2w(T) \leq 2w(Q)$ , d. h. die Kosten unserer Lösung sind, wie versprochen, nach oben beschränkt durch das Doppelte der Kosten einer optimalen Rundreise.

Der beste bekannte Gütefaktor ist 1.5 (CHRISTOFIDES Algorithmus), und es lässt sich zeigen, dass das Problem, eine Rundreise mit Gütefaktor 1.0081 zu finden, zu den NP-vollständigen Problemen gehört. Für den Fall euklidischer Kosten (d. h. die Städte sind Punkte in der Ebene und die Kosten ihr euklidischer Abstand) kann dagegen für jedes  $c > 1$  ein Polynomialzeitapproximationsalgorithmus mit Gütefaktor  $c$  angegeben werden. Man spricht in diesem Fall von einem *Polynomialzeitapproximationsschema*; die Klasse aller Probleme mit dieser Eigenschaft heißt entsprechend *PTAS* (engl. *polynomial time approximation scheme*).

## 1.4. Der Satz von Courcelle

Die allermeisten Optimierungs- und Entscheidungsprobleme auf Graphen sind trivial oder sehr leicht, wenn man sie auf die Teilklasse der Bäume einschränkt. Es liegt nahe, dass auch „baumartige“ Graphen ganz erheblich einfach zu behandeln sind. Dies ist tatsächlich durch einen Satz der theoretischen Informatik sichergestellt, den wir hier „nur“ beschreiben wollen.

Wie misst man die „Baumartigkeit“ von Graphen? Hierzu beschreiben wir zuerst, wie ein Graph überhaupt in etwas „Baumartiges“ zerlegt werden kann:

**1.21.** Ist  $G$  ein Graph, so heißt ein Paar  $z = \left( T, (X_s)_{s \in V(T)} \right)$  bestehend aus einem nichtleeren Baum  $T$  und einer mit den Ecken aus  $T$  indizierten Familie von Teilmengen  $X_s$  von  $V(G)$  eine **Baumzerlegung** von  $G$ , falls gilt:

- (i)  $\cup_{s \in V(T)} X_s = V(G)$ ,
- (ii)  $\forall e \in E(G) \exists s \in V(T) : V(e) \subseteq X_s$  und
- (iii)  $\forall p, q, s \in V(T) : \text{Kommt } q \text{ im } p, s\text{-Weg in } T \text{ vor, so gilt } X_q \supseteq X_p \cap X_s.$

Der Baum  $T$  heißt dann **Zerlegungsbaum**. Die  $X_s$  heißen **Taschen**.

Der Zerlegungsbaum  $T$  enthält also als Elemente die Taschen  $X_s$ . Alle Taschen zusammen enthalten alle Knoten  $V(G)$  und jede Kante  $e \in E(G)$  ist vollständig von einer Tasche „umschlossen“ (d. h. es gibt eine Tasche, in der beide Endknoten von  $e$  enthalten sind). Jede Tasche ist wiederum ein Unterbaum von  $G$  und damit gelten innerhalb einer Tasche alle Zusammenhänge, die für Bäume gelten.

Ein großer Zerlegungsbaum  $T$  zerlegt also den Graphen  $G$  in viele Teile, die in baumartiger Weise verbunden sind, und wird somit der Aufgabe, den Graphen entsprechend zu strukturieren, gerecht (sofern die Teile wirklich verschieden sind). Dabei mag es jedoch geschehen, dass einzelne Taschen  $X_s$  der Zerlegung groß bzw. beliebig komplex sind (sieht man einmal von dem konzeptionellen Einwand ab, dass man aus einer Zerlegung immer eine mit viel größerem Zerlegungsbaum konstruieren kann). Fordert man dagegen, dass die Taschen gleichmäßig klein sind, so wird für große Graphen ein großer Zerlegungsbaum erzwungen, der den Graphen in übersichtliche Teile strukturiert. Diese Idee kann man wie folgt umsetzen:

**1.22.** Die **Weite** von  $z$  ist definiert durch

$$w(z) := \max \{ |X_s| \mid s \in V(T) \} - 1 \quad (1.49)$$

und die **Baumweite** von  $G$  ist

$$w(G) := \min \{ w(z) \mid z \text{ ist Baumzerlegung} \} \quad (1.50)$$

Je kleiner die Baumweite ist, desto baumartiger ist der Graph. Bäume selber haben Baumweite 1, Kreise haben Baumweite 2 (in die Länge gezogen sehen sie ja wie Bäume aus, sogar wie Wege), etc.

Das Wissen um eine beschränkte Baumweite kann man wie folgt nutzen: Ausgehend von den Blättern des Zerlegungsbaumes löst man das Problem zunächst lokal in den von den korrespondierenden Taschen induzierten Teilgraphen und fügt dann, übergehend zu größeren und größeren Hauptästen des Zerlegungsbaums, lokale Lösungen bzw. Antworten mehr und mehr zusammen, um schließlich mit einer globalen Lösung bzw. Antwort zu enden. COURCELLE hat entdeckt, dass sich eine große Klasse von Graphenproblemen auf diese Weise lösen lässt, nämlich alle, die sich durch eine Formel in *erweiterter monadic second order logic*. Dies sind aussagenlogische Formeln, wobei über Ecken, Kanten, sowie Mengen von Ecken oder Kanten quantifiziert werden darf ( $MSO_2$ -Formeln). Gewöhnlich wird neben  $\in$  und  $=$  ein Inzident- und Adjazenzprädikat gefordert, was aber unter unseren Modellannahmen direkt abgebildet werden kann:

$$\text{inc}(x, e) := x \in e \quad (1.51)$$

$$\text{adj}(x, y) := (x \neq y) \wedge \exists e \in E : x \in e \wedge y \in e \quad (1.52)$$

Dies ermöglicht zunächst nur Formulierungen von *Entscheidungsproblemen* wie: Besitzt der Eingabegraph einen aufspannenden Kreis? Man kann sich dabei stufenweise einen Prädikats-Fundus von  $MSO_2$ -formulierbaren Eigenschaften aufbauen. Zum Beispiel ist die Eigenschaft  $X \subseteq V$ , eine echte nichtleere Teilmenge von  $V$  zu sein, so formulierbar:

$$\text{proper}(X) := \exists y \in V \exists z \in V : y \in X \wedge z \notin X \quad (1.53)$$

und die Eigenschaft von  $C \subseteq E$ , dass  $G[C]$  zusammenhängend ist, so:

$$\text{conn}(C) := \forall X \subseteq V : \text{proper}(X) \implies (\exists y \in V \exists z \in V : y \in X \wedge z \notin X \wedge xy \in E), \quad (1.54)$$

wobei  $xy \in E$  eine (vielleicht) etwas lesbarere Variante des Adjazenzprädikats  $\text{adj}(x, y)$  darstellt.

**Satz 1.8** (COURCELLE). *Jede in  $MSO_2$  formulierbare Grapheigenschaft kann in Linearzeit auf jeder Klasse von Graphen beschränkter Baumweite entschieden werden.*

Ein entsprechender Satz gilt für eine große Klasse von Optimierungsproblemen. Darin darf die Ecken- und Kantenmenge des Eingabegraphen ganzzahlig gewichtet werden und man kann nach einer Ecken- oder Kantenmenge maximalen oder minimalen Gewichts mit einer in  $MSO_2$  formulierbaren Eigenschaft fragen, was natürlich Fragen nach Ecken- oder Kantenmengen maximaler oder minimaler Kardinalität einschließt. Zum Beispiel kann nach einer größtmöglichen *Clique*, d. h. einer Menge paarweise benachbarter Ecken, gefragt werden. Dies ist ein im allgemeinen schweres Optimierungsproblem, das aber – genau wie das im allgemeinen schwere Entscheidungsproblem, ob es einen aufspannenden Kreis gibt – auf Graphen beschränkter Baumweite in Polynomialzeit gelöst werden kann.

## 2. Matchings

### 2.1. Matchings in bipartiten Graphen

Lücke

$$V(M) := \cup M \quad (2.1)$$

$$|V(M)| = 2 |M| \quad (2.2)$$

**2.1.** Ein Matching  $M$  des Graphen  $G$  heißt **Matching**  $A \subseteq V(G)$ , falls  $A \subseteq V(M)$ .

**2.2.** Für  $X \subseteq V(G)$  sei die **Nachbarschaft** von  $X$  definiert durch:

$$N_G(X) := \{y \in V(G) \setminus X \mid \exists z \in X : yz \in E(G)\} \quad (2.3)$$

Die Nachbarschaft  $N_G(X)$  umfasst alle Ecken, die durch eine Kante mit einer der Ecken aus  $X$  inzidieren. [Abbildung 2.1](#) zeigt eine Eckenmenge  $X$ , ihre Nachbarschaft sowie die Kanten, die diese verbinden.

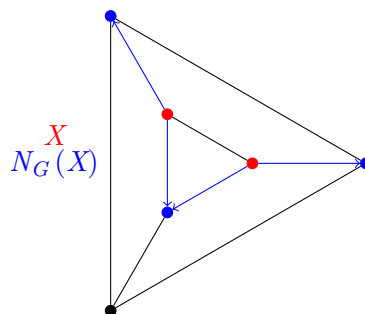


Abbildung 2.1.: Nachbarschaft einer Eckenmenge in einem Graphen

**2.3.** Für zwei Mengen  $X$  und  $Y$  sei die **symmetrische Differenz** von  $X$  und  $Y$  definiert durch:

$$X \Delta Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \quad (2.4)$$

$$= (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \quad (2.5)$$

**Satz 2.1** (Heiratssatz, HALL). *Sei  $A$  Klasse einer 2-Färbung des bipartiten Graphen  $G$ . Genau dann gibt es ein Matching von  $A$  in  $G$ , wenn die **Hall-Bedingung** erfüllt ist:*

$$\forall X \subseteq A : |N_G(X)| \geq |X| \quad (2.6)$$

**2.4.** Sei  $M$  ein Matching des (nicht notwendig bipartiten) Graphen  $G$ . Ein Weg  $P = x_0, x_1, \dots, x_l$  heißt  **$M$ -alternierend**, falls für jedes  $i \in \{0, \dots, l-1\}$  die Kante  $x_i x_{i+1}$  aus  $G$  genau dann zu  $M$  gehört, wenn  $i$  ungerade ist.

Ein solches  $P$  heißt **Verbesserungsweg**, falls er in einer Ecke außerhalb von  $V(M)$  beginnt und endet, d. h.  $x_0, x_l \notin V(M)$ .

Ein solcher Verbesserungsweg ist in [Abbildung 2.2](#) gezeigt. Solche Wege beginnen immer mit einem Knoten  $x_0$ , der nicht Teil des Matchings ist und enden mit einem Knoten  $x_l$  (hier:  $x_{2n+1}$ ), welcher auch nicht Teil des Matchings ist. Weiterhin ist der weg ein alternierender Weg, d. h. die Kanten sind abwechselnd Teil des Matchings und nicht Teil des Matchings, wobei die erste Kante nicht Teil des Matchings ist.

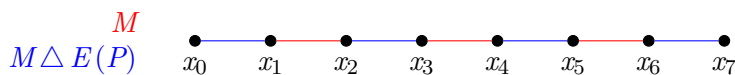


Abbildung 2.2.: Verbesserungsweg

**Beweis.** (2.6) ist notwendig für die Existenz eines Matchings von  $A$ , denn ist  $M$  ein Matching von  $A$ , so gilt

$$\forall X \subseteq A : |N_G(X)| \geq |N_{G[M]}(X)| = |X|. \quad (2.7)$$

Ist  $P$  ein Verbesserungsweg, so hat  $P$  ungerade Länge und  $M \Delta E(P)$  ist ein Matching von  $G$  mit einer Kante mehr als  $M$  ( $|M \Delta E(P)| = |M| + 1$ ).

Seien  $G, A$  wie in den Voraussetzungen des Satzes und  $B := V(G) \setminus A$ . Sei  $M$  ein *größtes* Matching.

Annahme:  $M$  ist kein Matching von  $A$ . Wir finden eine Menge  $X$ , die die HALL-Bedingung verletzt (dies zeigt der Satz). Es gibt dann eine Ecke  $x_0 \in A \setminus V(M)$ .

Sei  $R$  die Menge aller  $y$  für die es einen in  $x_0$  beginnenden und in  $y$  endenden  $M$ -alternierenden Weg gibt. Es gilt  $R \setminus \{x_0\} \subseteq V(M)$ .  $y \in R \cap A \setminus \{x_0\}$  muss nach Konstruktion mit einer Kante aus  $M$  inzidieren, für  $y \in R \cap B$  gilt das auch, da sonst ein Verbesserungsweg von  $x_0$  nach  $y$  existieren würde.

Daher gibt es keine Kante aus  $M$ , die eine Ecke  $y \in R$  mit einem  $z \in V(G) \setminus R$  verbindet: Richtig für  $x_0$ ; ist  $y \in R \cap A$  Endpunkt eines  $M$ -alternierenden Weges  $P = x_0, \dots, x_l = y$ , so ist  $y \in V(M)$ , genauer  $x_{l-1}y \in E(M)$ ,  $x_{l-1} \in R$ . Ist  $y \in R \cap B$  Endpunkt eines  $M$ -alternierenden Weges  $P = x_0, \dots, x_l = y$  und  $z \in V(G) \setminus R$  mit  $yz \in M$ , so ist  $P^+ = x_0, \dots, x_l, z$   $M$ -alternierend, folglich  $z \in R$ .  $\zeta$

Somit liegen mit einer Endecke einer Kante aus  $M$  schon *beide* Endecken in  $R$ .

Es gibt keine Kante in  $G$ , die eine Ecke  $y \in R \cap A$  mit einer Ecke  $z \in V(G) \setminus R$  verbindet: Sonst wäre  $y$  Endpunkt eines  $M$ -alternierenden Weges  $P = x_0, \dots, x_l = y$  und  $P^+ = x_0, \dots, x_l, z$   $M$ -alternierend, also  $z \in R$ .  $\zeta$

Somit gilt  $N_G(R \cap A) \subseteq R \cap B$  und  $|R \cap A| = |R \cap B| + 1$ .

$$\implies |N_G(R \cap A)| \leq |R \cap B| \quad (2.8)$$

$$= |R \cap A| - 1 \quad (2.9)$$

$$< |R \cap A| \quad (2.10)$$

Also verletzt  $X := R \cap A$  die HALL-Bedingung.  $\square$

Aus diesem Beweis lässt sich ein Algorithmus erstellen, der entweder ein Matching von  $A$  findet oder zeigt, dass es ein solches Matching nicht geben kann.

**Satz 2.1** ist **Toncias** (The obviously necessary condition is also sufficient). Der Begriff wurde durch C. St. J. A. Nash-Williams etabliert. Viele Sätze sind von dieser Bauart.

Die nächste Frage ist nun, wie man für allgemeine Graphen große Matchings findet.

Es ist schwierig zu entscheiden (NP-vollständig), ob ein Graph einen aufspannenden Kreis, einen sog. **Hamilton-Kreis** hat. Wenn es einen solchen Kreis gibt, gibt es automatisch auch ein perfektes Matching, welches alle Ecken enthält. Das Ermitteln eines solchen HAMILTON-Kreises ist extrem aufwändig, aber die Vorbedingung lässt sich sehr leicht prüfen.

Für einen beliebigen Graphen kann man *Valenzen* willkürlich vorschreiben. Dies sind ganze Zahlen, die Ecke zugeordnet sind. Ein Problem ist nun, einen Teilgraphen zu finden, dessen Ecken genau so viele inzidierende Kanten pro Ecke wie die jeweilige Valenz hat. Wenn man an alle Ecken nun die Valenz 2 notiert (einen 2-Faktor ermittelt), könnte man vermuten, dass sich dadurch ein HAMILTON-Kreis finden lässt. Allerdings ist es hier weiterhin möglich, dass der Teilgraph dann kein HAMILTON-Kreis ist (nämlich genau dann, wenn der Teilgraph nicht zusammenhängend ist). Beispielsweise hat der PETERSEN-Graph einen 2-Faktor (z. B. wie in **Abbildung 2.3** gezeigt), aber keinen HAMILTON-Kreis.

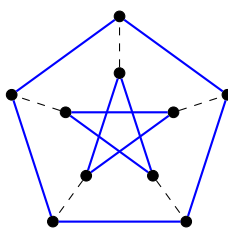


Abbildung 2.3.: 2-Faktor in einem PETERSEN-Graph

**Satz 2.2** (Berge). *Sei  $M$  ein Matching des Graphen  $G$ . Genau dann gibt es ein Matching von  $G$  mit mehr Kanten als  $M$ , wenn es einen Verbesserungsweg für  $M$  gibt.*

**Beweis.** Existiert ein Verbesserungsweg, so auch ein größeres Matching (für  $M$ ). Siehe Beweis zu [Satz 2.1](#). Existiere ein Matching  $N$  mit  $|N| > |M|$ . Betrachte  $M \triangle N$ . In  $H = G[M \triangle N]$  ist jede Ecke mit höchstens zwei Kanten inzident. Die Komponenten von  $H$  sind daher Kreise oder Wege, die abwechselnd Kanten aus  $M$  und  $N$  verwenden. Weil  $|N| > |M|$  muss eine dieser Komponenten mehr Kanten aus  $N$  als aus  $M$  benutzen. Diese ist ein Wege Weg ungerade Länge, der mit einer Kante aus  $N$  beginnt und endet; dieser Weg ist Verbesserungsweg.  $\square$

## 2.2. Faktorsätze

Faktorsätze haben zum Ziel, die Existenz von (möglichst großen) Matchings in beliebigen Graphen zu zeigen. Wir betrachten zunächst Komponenten eines Graphen, die nach Lösung von Ecken hervorgehen.

Sei  $q(G)$  die Anzahl der *ungeraden* Komponenten eines Graphen. Sei  $M$  ein Matching von  $G$ ,  $U = V(G) \setminus V(M)$  („ungematchte Ecken“) und  $S \subseteq V(G)$ .

Bild 2.3

Betrachtet man nun eine ungerade Komponente in  $G - S$ . Dann kann geschehen, dass alle Matchingkanten beide Endpunkte in einer solchen ungeraden Komponenten haben. Da die Komponente jedoch ungerade ist, gibt es eine ungematchte Ecke oder die Ecke kann nur gematcht sein, indem eine Kante nach  $S$  gezogen wird. Bei gerade Matchings kommt dies nicht vor. Gibt es jetzt mehr ungerade Komponenten als  $|S|$ , muss es eine ungematchte Ecke geben, da keine Ecke mehr in  $S$  vorhanden ist, die nicht bereits gematcht wurde.

bild 2.3

Hieraus ergibt sich also eine untere Schranke für die Anzahl  $|U|$  ungematchter Ecken:

$$q(G - S) - |S| \leq |U| = |V(G) \setminus V(M)| \quad (2.11)$$

Im Fall der Gleichheit gilt für jedes Matching  $M'$  von  $G$  dieselbe Ungleichung.

$$\underbrace{|V(G) \setminus V(M')|}_{|U'|} \geq q(G - S) - |S| = |U| = |V(G) \setminus V(M)| \quad (2.12)$$

Jedes  $M'$  ist also höchstens so groß wie  $M$ , also ist  $M$  ein größtes Matching.

**2.5.** Eine Menge  $S \subseteq V(G)$ , für die es ein Matching  $M$  gibt mit  $q(G - S) - |S| = |V(G) \setminus V(M)|$ , heißt **Barriere**.

Da  $\leq$  sowieso gilt, ist die Forderung „ $\geq$ “ statt „ $=$ “ schon ausreichend, um zu zeigen, dass  $S$  eine Barriere ist.

Nun stellt sich die Frage, wie sich ein solches größtes Matching bzw. eine Barriere finden lässt, um zu zeigen, dass ein Matching ein größtes Matching ist. Der Satz von BERGE zeigt zunächst, dass eine Barriere für jeden Graphen existiert. Also gibt es auch immer ein größtes Matching für einen Graphen.

**Beispiele:**

- Besitzt  $G$  ein **perfektes Matching**  $M$  (d. h.  $V(M) = V(G)$ ), dann ist die leere Menge eine Barriere, denn

$$\underbrace{q(G - \emptyset) - |\emptyset|}_{=0} = 0 = |V(G) \setminus V(M)|. \quad (2.13)$$

Da ein perfektes Matching alle Ecken enthält, kann es nur gerade Komponenten in  $G$  geben. Auch für jedes  $x \in V(G)$  ist  $\{x\}$  eine Barriere von  $G$ , denn

$$\underbrace{q(G - \{x\})}_{=1} - \underbrace{|\{x\}|}_{=1} = 0 = |V(G) \setminus V(M)|. \quad (2.14)$$

Für perfekte Matchings lassen sich also ganz leicht Barrieren finden.

- Besitzt für ein gewisses  $x$  der Graph  $G - x$  ein perfektes Matching  $M$ , dann ist  $\setminus$  eine Barriere von  $G$ , denn

$$\underbrace{q(G - \emptyset)}_{\geq 1} - |\emptyset| \geq 1 = |V(G) \setminus V(M)|. \quad (2.15)$$

Gäbe es keine ungerade Komponente, könnte es keine ungerade Anzahl Ecken geben. Also muss es mindestens eine ungerade Komponente geben.

Graphen, in denen für *jede* Ecke  $x$  der Graph  $G - x$  ein perfektes Matching besitzt, werden als **faktorkritisch** bezeichnet. Sie besitzen immer die Barriere  $\emptyset$  und haben in der Regel eine große Anzahl größter Matchings.

Natürlich reichen diese Beispiel nicht aus, um zu zeigen, dass alle Graphen solche Barrieren besitzen. Dies möchten wir induktiv zeigen, wobei wir aus Barrieren kleinerer Instanzen Barrieren größerer Instanzen zeigen. Dafür werden zunächst *Induktionsmotoren* aufgestellt, also Zusammenhänge, die uns die Induktion ermöglichen.

**Lemma 2.3** (Induktionsmotor (A)). *Sind  $G$  und  $H$  disjunkte Graphen (d. h.  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ ) und sind  $S, T$  Barrieren von  $G$  bzw.  $H$ , so ist  $S \dot{\cup} T$  eine Barriere von  $G \cup H$  mit*

$$G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H)). \quad (2.16)$$

verweis bild 2.4

bild 2.4

**Beweis.** Also gibt es Matchings  $M, N$  von  $G$  und  $H$  mit

$$q(G - S) - |S| = |V(G) \setminus V(M)| \quad (2.17)$$

$$q(H - T) - |T| = |V(H) \setminus V(N)| \quad (2.18)$$

underbraces  
schick machen

und  $M \cap N = \emptyset$  ( $\checkmark$ ). Daher gilt für die Vereinigung  $G \cup H$ :



$$q \left( \underbrace{(G \cup H)}_{(1)} - \underbrace{(S \cup T)}_{(2)} \right) = \underbrace{q(G - T) + q(H - T)}_{(1)} - \underbrace{|S| - |T|}_{(2)} \quad (2.19)$$

$$= |V(G) \setminus V(M)| + |V(H) \setminus V(N)| \quad (2.20)$$

$$= |V(G \cup H) \setminus V(M \cup N)| \quad (2.21)$$

Mit  $M \cup N$  existiert folglich ein Matching von  $G \cup H$  so, dass

$$q((G \cup H) - (S \cup T)) - |S \cup T| = |V(G \cup H) \setminus V(M \cup N)| \quad (2.22)$$

ist. Also ist  $S \cup T$  Barriere von  $G \cup H$ .  $\square$

**Lemma 2.4** (Induktionsmotor (B)). *Ist  $x$  eine Ecke, die in jedem größten Matching von  $G$  enthalten ist (eine sogenannte **wesentliche** Ecke) und ist  $S$  eine Barriere von  $G - x$ , dann ist  $S \cup \{x\}$  eine Barriere von  $G$ .*

**Beweis.** Sei  $M$  ein größtes Matching von  $G$ . Nach Voraussetzung gibt es ein Matching  $N$  von  $G$  mit

$$q((G - x) - S) - |S| = |V(G - x) \setminus V(N)|. \quad (2.23)$$

$N$  kann kein größtes Matching von  $G$  sein, denn sonst würde  $N$  die Ecke  $x$  enthalten, da sie wesentlich ist. Also:

$$q(G - (S \cup \{x\})) - |S \cup \{x\}| = q((G - x) - S) - |S| - 1 \quad (2.24)$$

$$= |V(G - x) \setminus V(N)| - 1 \quad (2.25)$$

$$= |V(G) \setminus V(N)| - 1 - 1 \quad (2.26)$$

$$= |V(G) \setminus V(N)| - 2 \quad (2.27)$$

$$= |V(G)| - \underbrace{|V(N)|}_{\geq |V(M)| - 2} - 2 \quad (2.28)$$

$$\geq |V(G)| - (|V(M)| - 2) - 2 \quad (2.29)$$

$$= |V(G)| - |V(M)| \quad (2.30)$$

$$= |V(G) \setminus V(M)| \quad (2.31)$$

Nebenbemerkung:

$$|N| < |M| \implies |V(N)| \leq |V(M)| - 2 \quad (2.32)$$

Daraus ergibt sich:

$$q(G - (S \cup \{x\})) - |S \cup \{x\}| \geq |V(G) \setminus V(M)| \quad (2.33)$$

Also ist  $S \cup \{x\}$  Barriere von  $G$ .  $\square$

Mit diesen beiden Lemmata lässt sich nun der Satz von BERGE und TUTTE zeigen:

**Satz 2.5** (BERGE, TUTTE). *Jeder zusammenhängende Graph  $G$  ohne wesentliche Ecken ist faktorkritisch.*

Die Erkenntnis, dass die Abwesenheit wesentlicher Ecken bereits ausreicht, damit ein Graph faktorkritisch ist, ist überraschend.

**Beweis.**  $\mathcal{Z}$ : (\*) Für jedes größte Matching  $M$  und zwei Ecken  $x \neq y$  von  $G$  ist  $V(M) \cap \{x, y\} \neq \emptyset$ . Dies wird induktiv über den Abstand  $d_G(x, y)$  gezeigt.

Angenommen:  $\{x, y\} \cap V(M) = \emptyset$ . Betrachte kürzesten  $x, y$ -Weg  $P$  in  $G$ .  $P$  hat die Länge  $\geq 2$ , denn sonst wäre  $M \cup \{xy\}$  ein Matching von  $G$ .  $\zeta$

Also besitzt  $P$  eine innere Ecke  $w$ .

$$d_G(w, x), d_G(w, y) < d_G(x, y) \quad (2.34)$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist  $w \in V(M)$ .

Weil  $w$  nach Voraussetzung nicht wesentlich ist, gibt es ein größtes Matching  $N$  von  $G$  mit  $w \notin V(N)$ . Nach Induktionsvoraussetzung gilt  $V(N) \cap \{w, x\} \neq \emptyset$ , also  $x \in V(N)$ , analog  $y \in V(N)$ .

bild 2.5

Der Graph  $H := G[E(M) \triangle E(N)]$  besteht aus Wegen und Kreisen gerader Länge. Auch die Wege haben gerade Länge, weil sie sonst Verbesserungswege für  $M$  oder  $N$  wären. Jede der Ecken  $w, x, y$  liegt in einem Weg in  $H$  von gerader Länge, und zwar als Endpunkt. Weil  $x$  und  $y$  beide aus  $V(N)$  kommen,  $w$  aber nicht, gehören  $x, y$  nicht zum selben Weg in  $H$ . Also gehört  $w$  nicht zum selben Weg in  $H$  wie  $x$  oder wie  $y$ .  $w$  (und  $y$ ) gehören nicht zu dem Weg in  $H$ , der  $x$  enthält.

Sie  $Q$  jener Weg.  $N \triangle E(Q)$  ist dann ein größtes Matching von  $G$ , das weder  $x$  noch  $w$  überdeckt. Aber nach IV enthält jedes größte Matching  $x$  oder  $w$ .  $\zeta$

Sei jetzt  $x$  Ecke von  $G$ . Da  $x$  nicht wesentlich ist, gibt es ein größtes Matching  $M$  von  $G$  mit  $x \notin V(M)$ . Daher  $y \in V(M) \forall y \notin x$  aus  $V(G)$ . Also ist  $M$  ein perfektes Matching von  $G - \{x\}$ . Also ist  $G$  faktorkritisch.  $\square$

**Folgerung 2.6.** *Jeder Graph  $G$  besitzt eine Barriere.*

**Beweis.** Induktiv über  $|V(G)|$ . Sei die Behauptung für Graphen weniger als  $|V(G)|$  Ecken bewiesen. Wegen Satz 2.3 dürfen wir annehmen, dass  $G$  zusammenhängend ist. Wegen Satz 2.4 dürfen wir annehmen, dass  $G$  keine wesentlichen Ecken besitzt. Aufgrund von Satz 2.5 ist  $G$  faktorkritisch. Dann besitzt  $G$  eine Barriere.  $\square$

Siehe auch Edmonds „*blossom algorithm*“. Dieser ist ein solcher Algorithmus, der eine Barriere für ein größtes Matching zu finden.

**Folgerung 2.7** (TUTTE-BERGE-Formel). *Die größte Mächtigkeit eines Matchings des Graphen  $G$  ist gleich*

$$\frac{1}{2} \min \{ |V(G)| - q(G - S) + |S| \mid S \subseteq V(G) \} \quad (2.35)$$

Es ist natürlich nicht praktikabel, die Zahl auf diese Weise auszurechnen, jedoch lässt sich die Berechnung gut optimieren, indem Monotonieeigenschaften ausgenutzt werden. Dieses Theorem ist ein sogenanntes *Min-Max-Theorem*.

**Beweis.** Nach [Satz 2.6](#) besitzt  $G$  eine Barriere  $S$ . Also gibt es nach der Definition von Barrieren ein größtes Matching  $M$  mit

$$q(G - S) - |S| = \underbrace{|V(G) \setminus V(M)|}_{= |V(G)| - |V(M)|} \quad (2.36)$$

$$\implies |V(M)| = |V(G)| - q(G - S) + |S| \quad (2.37)$$

$$\implies |M| = \frac{1}{2} (|V(G)| - q(G - S) + |S|) \quad (2.38)$$

Für jedes weitere  $S' \subseteq V(G)$  gilt:

$$q(G - S') - |S'| \leq |V(G) \setminus V(M)| \quad (2.39)$$

$$\implies |V(M)| \leq |V(G)| - q(G - S') + |S'| \quad (2.40)$$

$$\implies |M| \leq \frac{1}{2} (|V(G)| - q(G - S') + |S'|) \quad \forall S' \subseteq V(G) \quad (2.41)$$

□

**Folgerung 2.8** (Faktorsatz von TUTTE, 1-Faktor-Satz). *Genau dann besitzt der Graph  $G$  ein perfektes Matching, wenn  $\forall S \subseteq V(G) : q(G - S) \leq |S|$ .*

Diese Bedingung kann man praktisch zwar nicht durch Bilden aller Teilmengen nachrechnen, jedoch lassen sich auch hier wieder Monotonieeigenschaften ausnutzen, um Rechenaufwand zu vermeiden. Dieses Theorem fällt auch wieder in die Kategorie *TONCI-AS*.

**Beweis.** „ $\rightarrow$ “ Besitze  $G$  ein perfektes Matching  $M$ . Dann gilt für jedes  $S \subseteq V(G)$  :

$$q(G - S) - |S| \leq |V(G) \setminus V(M)| \quad (2.42)$$

$$= 0 \quad (2.43)$$

$$\implies q(G - S) \leq |S|. \quad (2.44)$$

✓

„ $\leftarrow$ “ Gelte umgekehrt  $\forall S \subseteq V(G) : q(G - S) \leq |S|$ . Wegen [Satz 2.6](#) gibt es eine Barriere  $S$  von  $G$ . Aufgrund der Definition der Barriere gibt es größtes Matching  $M$  mit

$$0 \geq q(G - S) - |S| = |V(G) \setminus V(M)| \geq 0 \quad (2.45)$$

$$\implies |V(G) \setminus V(M)| = 0 \quad (2.46)$$

$$\implies V(M) = V(G) \quad (2.47)$$

Also ist  $M$  perfekt.

✓

□

Mit diesem Satz lässt sich im Übrigen auch der Satz von HALL auf eine andere Weise zeigen.

**2.6.** Der **Grad**  $d_G(x)$  einer Ecke  $x$  im Graphen  $G$  ist die Anzahl der mit  $x$  inzidenten Kanten.

**2.7.** Ein Teilgraph  $H$  von  $G$  heißt  $f$ -Defaktor von  $G$ , falls  $V(H) = V(G)$  ( $H$  also **aufspannend**) ist und  $\forall x \in V(G) : d_H(x) = f(x)$  (d. h.  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ).

Beispielsweise ist jeder  $G$  aufspannende Kreis (also ein HAMILTON-Kreis) ein 2-Faktor. In dem Fall ist  $2(x) = 2$  (also die konstant-2-Funktion von  $V(G)$  nach  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ). Ist  $M$  ein perfektes Matching, so ist  $(V(G), M)$  ein 1-Faktor. Umgekehrt ist die Kantenmenge eines 1-Faktors von  $G$  eine perfektes Matching. Solche eine Umkehrung gilt jedoch nicht für einen Graphen mit aufspannendem Kreis! Wenn man nun eine Methode findet, einen 2-Faktor zu berechnen, heißt das noch nicht, dass sich damit auch ein aufspannender Kreis finden lässt.

Im Folgenden sei nun ein Verfahren gezeigt, um zu entscheiden, ob ein vorgegebener Graph zu vorgegebenem  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  einen  $f$ -Faktor hat. Rückführung auf den Faktorsatz 2.8.

**Verfahren 2.1:** Offensichtlich notwendig für die Existenz eines  $f$ -Faktors ist

$$\forall x \in V(G) : f(x) \leq d_G(x). \quad (2.48)$$

Ersetze jede Ecke  $x$  von  $G$  durch einen bipartiten Graphen  $H_x$  mit Farbklassen  $A_x$  und  $B_x$  und allen Kanten  $ab$ ,  $a \in A_x$ ,  $b \in B_x$ . Dabei seien die  $V(H_x)$  paarweise disjunkt und  $|A_x| = d_G(x)$  und  $|B_x| = d_G(x) - f(x)$ .

Für jede Kante  $e \in E(G)$ , etwa  $e = xy$ , wähle  $a_e \in A_x$  und  $b_e \in A_y$  so, dass alle  $a_e, a'_e$  verschieden sind. Füge für jedes  $e$  die Kante  $a_e b_e$  zum Hilfsgraphen hinzu, diese Kanten bilden ein Matching des Hilfsgraphen.

Dann besitzt  $G$  genau dann einen  $f$ -Faktor, wenn der Hilfsgraph ein perfektes Matching besitzt.

(Beweis durch Beispiel)

bild 2.6

Man kann jetzt natürlich fragen, ob es ein einfaches Kriterium gibt, um zu prüfen, ob ein  $f$ -Faktor existiert. Es gibt tatsächlich eine solche Ungleichung, um die Bedingung zu prüfen. Diese ist jedoch deutlich komplizierter als für 1-Faktoren.

Für  $X, Y \subseteq V(G)$  (die nicht notwendigerweise disjunkt sind) sei

$$E_G(X, Y) := \{xy \in E(G) \mid x \in X, y \in Y\} \quad (2.49)$$

bild 2.7

**Satz 2.9** ( $f$ -Faktorsatz, TUTTE). Sei  $G$  Graph,  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Genau dann besitzt  $G$  einen  $f$ -Faktor, wenn gilt:

$$\forall S, T \subseteq V(G), S \cap T = \emptyset : q(S, T) + \sum_{x \in T} (f(x) - d_{G-S}(x)) \leq \sum_{x \in S} f(x), \quad (2.50)$$

wobei  $q(S, T)$  die Zahl der Komponenten  $C$  von  $G - (S \cup T)$  ist, für die

$$E_G(V(C), T) + \sum_{x \in V(C)} f(x) \quad (2.51)$$

ungerade ist.

# 3. Flüsse

## 3.1. Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Optimierung in Flussnetzwerken hat zum Ziel, einen Strom von irgendwas (bspw. Datenströme, Wasser) so durch das Netzwerk zu transportieren, dass möglichst viel gleichzeitig durch das Netz von einer Quelle zu einer Senke transportiert werden kann. Für diese Betrachtung werden jetzt gerichtete Graphen betrachtet.

**3.1.** Ein **Digraph**  $D = (V, E)$  besteht aus einer Menge  $V$  von **Ecken** und einer Menge  $E \subseteq \{(x, y) \mid x \neq y \in V\} = V^2 \setminus \text{id}_V$  von **Kanten** (engl. *arc* statt *edge*). Schreibe  $xy$  statt  $(x, y)$ .

Bei Digraphen ist es insbesondere auch möglich, dass es zwei Kanten zwischen zwei Ecken gibt, nämlich wenn eine Kante von der ersten zur zweiten und die andere Kante von der zweiten zur ersten Ecke geht. Allerdings werden solche Fälle für Flussnetzwerke zunächst nicht betrachtet.

Bild 3.1

Auch, wenn hier die Notation  $xy$  als Kurzschreibweise für die Kante  $(x, y)$  genau wie für ungerichtete Graphen benutzt wird, werden hier gerichtete Kanten bezeichnet. Das bedeutet also, dass  $(x, y) = xy \neq yx = (y, x)$ .

**3.2.** Für  $X, Y \subseteq V$  sei

$$E_D(X, Y) := E \cap (X \times Y) = \{xy \in E \mid x \in X, y \in Y\} \quad (3.1)$$

die Menge aller Kanten von  $X$  nach  $Y$ . Für  $X \subseteq V$  ist

$$E_D^+(X) := E_D(X, V \setminus X) \quad (3.2)$$

die Menge der **Außenkanten** von  $X$  und

$$E_D^-(X) := E_D(V \setminus X, X) \quad (3.3)$$

die Menge der **Innenkanten** von  $X$ . Für  $x \in V$ :

$$E_D^+(x) := E_D^+(\{x\}) \quad (3.4)$$

$$E_D^-(x) := E_D^-(\{x\}) \quad (3.5)$$

Der **Außengrad** einer Ecke  $x$  ist:

$$d_D^+(x) := |E_D^+(x)|. \quad (3.6)$$

$$d_D^-(x) := |E_D^-(x)| \quad (3.7)$$

ist der **Innengrad** der Ecke  $x$ .

bild 3.3

**3.3.** Zu einem Digraphen ist der **zugrundeliegende ungerichtete Graph**:

$$U(D) = (V(D), \{\{x, y\} \mid (x, y) \in E(D)\}) \quad (3.8)$$

Die Definitionen für ungerichtete Graphen übertragen sich (teilweise auch wortwörtlich) auf Digraphen bzw. können auf dem einem Digraphen  $D$  zugrundeliegenden ungerichteten Graphen. Man beachte jedoch, dass beim zugrundeliegenden ungerichteten Graphen zu einem Digraphen Informationen über die Richtungen der Kanten verloren gehen!

**3.4.** Aus Kreisen  $C = x_1, x_1, \dots, x_{l-1}, x_0$  werden **kontinuierlich gerichtete Kreise** (d. h.  $\forall i \in \{1, \dots, l-1\} : (x_{i-1}, x_i) \in E(D), (x_{l-1}, x_0) \in E(D)$ ), aus Wegen  $P = x_0, \dots, x_l$  **kontinuierlich gerichtete Wege** (d. h.  $\forall i \in \{1, \dots, l\} : (x_{i-1}, x_i) \in E(D)$ ).

bild 3.4

Die Relation  $x \sim_D y : \iff \exists x, y\text{-Weg in } D$  ist reflexiv und transitiv, aber *nicht* symmetrisch. Die Existenz eines  $x, y$ -Weges impliziert nicht automatisch die Existenz eines  $y, x$ -Weges!

**3.5.** Für  $f: E(D) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $F \subseteq E(D)$  sei

$$f(F) := \sum_{e \in F} f(e) \quad (3.9)$$

(statt wie üblich  $\{f(e) \mid e \in F\}$ ).

Während anderswo der Begriff *Netzwerk* auch für Graphen allgemein benutzt wird, gibt es in der Flusstheorie eine feste Definition für Netzwerke:

**3.6.** Ein **Netzwerk** ist ein Quadrupel  $N = (D, c, s, t)$  bestehend aus einem Digraphen  $D$ , einer **Kapazitätsfunktion**  $c: E(D) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , einer **Quelle**  $s \in V(D)$  und einer **Senke**  $t \in V(D) \setminus \{s\}$ .

bild 3.5 (ohne das blaue)

Neben der Kapazitätsfunktion wird in Bildern üblicherweise auch noch die Flussfunktion eingezeichnet. Diese gibt an, wie viel *Fluss* über eine Kante geleitet wird.

**3.7.** Ein **Fluss** von  $N$  (auch:  $s, t$ -**Fluss**) ist eine Funktion  $f: E(D) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit:

- (i)  $f(e) \leq c(e) \forall e \in E(D)$  (Der Fluss darf nie größer als die Kapazität einer Kante sein.)
- (ii)  $f(E_D^+(x)) = f(E_D^-(x)) \forall x \in V(D) \setminus \{s, t\}$  (Der eingehende Fluss einer Ecke muss genau so groß wie der ausgehende Fluss sein, außer für Quellen und Senken. Dies ist die sog. KIRCHOFF-Regel.)

Es darf also niemals eine Kante über ihre Kapazität hinaus ausgelastet werden und Kanten können keinen Fluss „speichern“, d. h. sie müssen immer sämtlichen eingehenden Fluss wieder über ausgehende Kanten herausgeben. Die einzige Ausnahme hierfür sind die Quelle und Senke. Für alle anderen Ecken gilt

$$\sum_{e \in E_D^+(x)} f(e) = \sum_{e \in E_D^-(x)} f(x) \quad (3.10)$$

Es ist prinzipiell auch möglich, dass es Fluss in die Quelle hinein bzw. Fluss aus der Senke heraus gibt!

Eine interessante Optimierungsfrage ist jetzt, wie viel Fluss maximal von  $s$  nach  $t$  „transportiert“ werden kann.

**3.8.** Die **Stärke** eines Flusses  $f$  im Netzwerk  $N$  ist:

$$\|f\| := f(E_D^+(s)) - f(E_D^-(s)) \quad (3.11)$$

bild 3.6

Als Beispiel sie hier beispielhafter Fluss in gezeigt. An jeder Ecke des markierten Weges kommt eine Einheit Fluss an und eine Einheit Fluss geht aus (außer natürlich für Quelle und Senke). Damit ist die KIRCHHOFF-Bedingung erfüllt. Weiterhin ist der Fluss an jeder Kante kleiner als die Kapazität. Da an der Quelle eine Einheit Fluss abgeht und keine eingeht, ist die Stärke des Flusses  $\|f\| = 1$ . Man beachte in diesem Beispiel, dass der Weg über die oberen Ecken gar nicht genutzt wurde. Man könnte also prinzipiell mehr Fluss durch das Netzwerk leiten als hier gezeigt, indem Fluss über die oberen Kanten geleitet wird!

**3.9.** Ist  $P$  ein  $s, t$ -Weg in  $D$  und  $c > 0$ , so wird durch

$$f_P(e) = \begin{cases} c & e \in E(P) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.12)$$

ein Fluss  $f_P$  der Stärke  $c$  definiert, falls  $c(e) \geq c \forall e \in E(P)$  gilt.  $f_P$  heißt dann **Elementarfluss** von  $N$ .

Insbesondere ist  $f$  konstant 0 in jedem Netzwerk ein Fluss der Stärke 0. Dieser ist jedoch in der Regel uninteressant. Stattdessen stellt sich die Frage, wie groß denn so ein Fluss höchstens werden kann. Hierfür werden *Schnitte* zur Hilfe gezogen, die den Graphen in zwei Teile zerlegen, wobei ein Teil  $s$  und ein Teil  $t$  enthält. Dann kann man bestimmen, wie viel Fluss über die Kanten fließt, die über die Schnittgrenze gehen.

**3.10.** Ein **Schnitt** in  $N$  ist eine Teilmenge  $X$  von  $V$  mit  $s \in X$  und  $t \notin X$ . Die **Kapazität**  $\|X\|$  ist die Zahl  $c(E_D^+(X))$ .



Die Stärke eines Flusses lässt sich an den Zwischenkanten eines beliebigen Schnittes  $x$  von  $N$  ablesen.

$$\|f\| = \sum_{x \in X} f(E_D^+(x)) - \sum_{x \in X} f(E_D^-(x)) \tag{3.13}$$

Dies gilt aufgrund der KIRCHHOFF-Bedingung. Wenn man sich für  $x \neq s$  diese Summe anschaut, tritt im vorderen Teil immer die Summe des eingehenden Flusses auf, während hinten die Summe des ausgehenden Flusses auf. Für Flüsse innerhalb von  $X$  heben sich diese Terme auf, also verbleibt ausschließlich die Stärke des Flusses. Man kann dies auch noch feingranularer betrachten:

$$= \sum_{x \in X} \sum_{\substack{y \in V \\ xy \in E}} f(xy) - \sum_{x \in X} \sum_{\substack{x \in V \\ yx \in E}} f(yx) \tag{3.14}$$

Sobald man nur die Kanten betrachtet, die beide Endpunkte in  $X$  haben, sieht man sofort, dass der Fluss für diese immer einmal in der vorderen und einmal in der hinteren Summe auftritt. Am Ende verbleibt nur der Fluss über Kanten, die mit einer Ecke  $x \in X$  beginnen und in einer Ecke  $y \in V \setminus X$  enden:

$$= \sum_{x \in X} \sum_{\substack{y \in V \setminus X \\ xy \in E}} f(xy) - \sum_{x \in X} \sum_{\substack{y \in V \setminus X \\ yx \in E}} f(yx) \tag{3.15}$$

$$= f(E_D^+(X)) - f(E_D^-(X)) \tag{3.16}$$

Man kann die Stärke eines Flusses nicht nur an bestimmten Schnitten, sondern an jedem beliebigen Schnitt ablesen – insbesondere von dem einfachen Fluss  $X = \{s\}$ . Das bedeutet aber auch, dass die Kapazitäten der Schnitte obere Schranken für Flüsse sind!

bild 3.8

$$\|f\| = f(E_D^+(X)) - \underbrace{f(E_D^-(X))}_{\geq 0} \tag{3.17}$$

$$\leq f(E_D^+(X)) \tag{3.18}$$

$$\stackrel{(i)}{\leq} c(E_D^+(X)) \tag{3.19}$$

$$\implies \max \{ \|f\| \mid f \text{ ist Fluss von } N \} \leq \min \{ \|X\| \mid X \text{ ist Schnitt von } N \} \tag{3.20}$$

**Satz 3.1** (Max-Flow-Min-Cut-Theorem, FORD-FULKERSON). *In jedem Netzwerk  $N$  gilt:*

$$\max \{ \|f\| \mid f \text{ Fluss von } N \} = \min \{ \|X\| \mid X \text{ Schnitt von } N \} \tag{3.21}$$

bild 3.9

Die Idee des Folgenden Beweises ist, einen bestehenden Fluss schrittweise zu erhöhen. Wir wissen bereits, dass es am Anfang immer irgendeinen Fluss (bspw. einen Nullfluss) geben kann, von dem aus gestartet wird. Dazu werden zunächst sog. *Residualwege* von  $s$  nach  $z$  definiert. Dieser Weg hat eine Kapazität, die *Residualkapazität*, welche angibt, um wie viel der Fluss von  $s$  nach  $z$  auf dem Weg noch erhöht werden kann.

**3.11.** Sei  $N = (D, c, s, t)$  ein Netzwerk und  $f$  irgendein Fluss,  $z \in V(D)$ .

Ein **Residualweg** von  $s$  nach  $z$  ist eine Folge  $P = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \dots, x_l$  aus paarweise verschiedenen Ecken  $x_0, \dots, x_l$  mit  $x_0 = s, x_l = z$  und  $e_i = x_{i-1}x_i$  (**Vorwärtskante**) oder  $e_i = x_i x_{i-1}$  (**Rückwärtskante**). Für eine Vorwärtskante  $e$  sei  $r(e) := c(e) - f(e)$ , Für eine Rückwärtskante  $e$  sei  $r(e) := f(e)$ .

Die **Residualkapazität** von  $P$  ist definiert durch:

$$r(P) := \min \{r(e_i) \mid i \in \{1, \dots, l\}\} \quad (3.22)$$

Für  $l = 0$  sei  $r(P) := +\infty > 0$ .

Anhand der Residualkapazität kann dann der Fluss schrittweise erhöht werden, indem der Fluss um die Residualkapazität von Vorwärtskanten erhöht wird. Nach der Definition der Residualkapazität wird dadurch der Fluss erhöht, ohne die Kapazität im Netzwerk zu überschreiten. Dabei muss zusätzlich noch sichergestellt werden, dass die KIRCHHOFF-Regel sichergestellt wird! Dazu wird für jede Ecke sichergestellt, dass die Flussbilanz an jeder Ecke stimmt, d. h. dass eine Veränderung des eingehenden Flusses auch eine entsprechende Änderung des ausgehenden Flusses bewirkt. Dabei werden drei

bild 3.10

Fälle unterschieden, die in gezeigt sind:

- (1) Am Knoten sind zwei Vorwärtskanten. Dann wird auf beiden Seiten der Fluss erhöht, also erhöht sich der ausgehende und eingehende Fluss gleichermaßen.
- (2) Am Knoten sind zwei Rückwärtskanten. Dann wird auf beiden Seiten der Fluss verringert, also verringert sich der ausgehende und eingehende Fluss gleichermaßen.
- (3) Am Knoten ist eine Vorwärts- und eine Rückwärtskante. Je nach Richtung wird entweder der ausgehende oder der eingehende Fluss gleichermaßen erhöht und verringert, also ergibt sich keine Veränderung der Bilanz.

prüfen, ob Erklärung stimmt

Es lassen sich dann Schnitte finden, deren ausgehende und eingehende Kanten Residualkapazität 0 haben. Dessen Kapazität ist die Stärke des maximalen Flusses im Netzwerk.

bild 3.11

**Beweis.** Aus der o. g. Vorüberlegung folgt bereits „ $\leq$ “. Die Richtung „ $\geq$ “ benötigt noch weitere Überlegungen.

Sei  $N = (D, c, s, t)$  das fragliche Netzwerk. Sei  $f$  irgendein Fluss.

Ist  $P$  ein Residualweg von  $s$  nach  $t$ , so wird durch

$$(f+P)(e) := \begin{cases} f(e) + r(P) & (\leq c(e)) \text{ für Vorwärtskante } e \\ f(e) - r(P) & (\geq 0) \text{ für Rückwärtskante } e \\ f(e) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.23)$$

ein Fluss  $f+P: E(D) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definiert.

$$\|f+P\| = \|f\| + r(P) \quad (3.24)$$

Sei jetzt  $f$  ein Fluss maximaler Stärke. Dann gibt es keinen Residualweg von  $s$  nach  $t$  mit positiver Residualkapazität. Sei

$$X := \{z \in V \mid \exists \text{ Residualweg von } s \text{ nach } z \text{ mit positiver Residualkapazität.}\} \quad (3.25)$$

Wegen  $s \in X$  und  $t \notin X$  ist  $X$  ein Schnitt.

Für  $e \in E_D^+(X)$  ist  $c(e) - f(e) = 0$ , weil sonst auch die Ecken  $z \in V_D(e) \setminus X$  durch einen Residualweg positiver Residualkapazität erreichbar wäre. Dann wären diese Ecken jedoch in  $X$  enthalten. ↯

Aus dem gleichen Grund ist für  $e \in E_D^-(X)$  gleich  $f(e) = 0$ . Daher gilt

$$\|X\| \stackrel{\text{Def.}}{=} c(E_D^+(X)) \quad (3.26)$$

$$= f(E_D^+(X)) - 0 \quad (3.27)$$

$$= f(E_D^+(X)) - f(E_D^-(X)) \quad (3.28)$$

$$\stackrel{\text{s.o.}}{=} \|f\| \quad (3.29)$$

$$\max \{ \|g\| \mid g \text{ ist Fluss} \} \stackrel{\text{Wahl } f}{=} \|f\| \quad (3.30)$$

$$= \|X\| \quad (3.31)$$

$$\geq \min \{ \|Y\| \mid Y \text{ Schnitt} \} \quad (3.32)$$

□

Dieser Beweis lässt sich in einen einfachen Algorithmus (genauer: die FORD-FULKERSON-Methode) überführen. Dabei wird vom Nullfluss beginnend für alle Ecken berechnet, ob Residualwege positiver Residualkapazität existieren. Wenn man damit einen Residualweg von  $s$  nach  $t$  findet, wird der Fluss entsprechend erhöht und iteriert. Ansonsten endet der Algorithmus.

Bei diesem einfachen Algorithmus gibt es zwei grundsätzliche Probleme. Werden die Residualkapazitäten in jedem Schritt kleiner, besteht die Gefahr, dass der Algorithmus nicht terminiert. Weiterhin ist nicht ganz klar, wie lange der Algorithmus läuft. In der Vorlesung „Effiziente Algorithmen“ wird hier näher drauf eingegangen. Es gibt auch schnellere Verfahren als dieser einfache Algorithmus.

Für ganzzahlige Flussprobleme sind einige Fragen leichter zu beantworten. Beispielsweise ist dann klar, dass es bei immer kleiner werdenden Residualkapazitäten irgendwann keinen Residualweg mit positiver Residualkapazität von  $s$  nach  $t$  gibt und der Algorithmus terminieren muss.

**Satz 3.2** (Integrality Theorem). *Sei  $N$  ein Netzwerk mit ganzzahliger Kapazitätsfunktion. Dann gibt es einen ganzzahligen Fluss maximaler Stärke, der die Summe von ganzzahligen Elementarflüssen ist.*

Es ist bereits intuitiv klar, dass ein Fluss maximaler Stärke auch ganzzahliger Stärke ist. Es ist jedoch nicht sofort klar, dass auch die Elementarflüsse maximaler Flüsse ganzzahliger Stärke sind, da es auch prinzipiell möglich wäre, reelle Stärken für Elementarflüsse zu wählen.

bild 3.11

Wenn man jedoch mit einem Nullfluss beginnend einen maximalen Fluss nach o. g. Algorithmus aufbaut, sind in jedem Iterationsschritt alle Residualkapazitäten ganzzahlig, da sie zu Beginn ganzzahlig sind und entsprechend dem Algorithmus dann auch der Fluss nur um ganzzahlige Werte verändert wird. Das wiederum bedeutet, dass die neuen Residualkapazitäten sich auch nur ganzzahlig ändern und damit auch ganzzahlig bleiben.

**Beweis.** Wir beginnen mit dem Fluss  $f = 0$ . Solange es einen Residualweg  $P$  von  $s$  nach  $t$  von positiver Residualkapazität  $r(P)$  gibt, setze  $f := f + P$ , iteriere. Das Verfahren endet mit einem ganzzahligen Fluss  $f$  (da nur ganzzahlige Restkapazitäten in jedem Schritt hinzugefügt werden) und wie im vorangegangenen Beweis findet man einen Schnitt  $X$  mit  $\|X\| = \|f\|$ , d. h.  $f$  ist ein Fluss maximaler Stärke.

Induktiv über die Stärke des ganzzahligen Flusses  $f$ :

Für  $\|f\| = 0$  sind alle Elementarflüsse trivialerweise ganzzahlig. ✓

Für  $\|f\| > 0$  existiert ein kontinuierlich gerichteter  $s, t$ -Weg  $P$  mit  $f(e) > 0$  für alle  $e \in E(P)$ . Sonst ist die Menge

$$X := \{z \in V(D) \mid \exists s, z\text{-Weg } Q \text{ mit } f(e) > 0 \forall e \in Q\} \quad (3.33)$$

ein Schnitt und

$$\|f\| = \underbrace{f(E_D^+(X)) - f(E_D^-(X))}_0 \quad (3.34)$$

$$\leq 0 \quad \text{!} \quad (3.35)$$

Definiere

$$f'(e) := \begin{cases} f(e) - 1 & e \in E(P) \\ f(e) & e \notin E(P) \end{cases} \quad (3.36)$$

und

$$c'(e) := \begin{cases} c(e) - 1 & e \in E(P) \\ c(e) & e \notin E(P) \end{cases} \quad (3.37)$$

Dann ist  $f'$  ein Fluss im Netzwerk  $N' = (D, c', s, t)$  und ganzzahlig. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es einen Fluss  $g'$  in  $N'$  mit  $\|g'\| = \|f'\|$  und  $g'$  ist die Summe ganzzahliger Elementarflüsse. Dann ist  $g' + f_P$  (mit  $\|f_P\| = 1$  ebenfalls eine solche Summe und

$$\|g' + f_P\| = \|g'\| + \|f_P\| \quad (3.38)$$

$$= \|f'\| + 1 \quad (3.39)$$

$$= \|f\| \quad (3.40)$$

□

### 3.2. Der Satz von Menger

**3.12.** Seien  $s, t$  Ecken des Digraphen oder Graphen  $D$ . Eine Menge  $F \subseteq E(D)$  heißt **von  $s$  nach  $t$  trennende Kantenmenge** (für Graphen  $s, t$ -trennende Kantenmenge), falls  $D - F$  keinen  $s, t$ -Weg besitzt.

Genau dann existiert ein solches  $F$ , wenn  $s \neq t$  ist. Dies gilt offensichtlich, da  $F = E(D)$  eine solche trennende Kantenmenge ist (ein Graph ohne Kanten hat schließlich auch niemals einen  $s, t$ -Weg).

**3.13.** Zwei Wege von  $P, Q$  von  $D$  heißen **kantendisjunkt**, falls  $E(P) \cap E(Q) = \emptyset$  gilt.

Im Folgenden wird auszugsweise eine Version der Sätze von Menger gezeigt. Dazu gibt es eine ganze Reihe von Sätzen, die ähnlich sind.

**Satz 3.3** (MENGER, lokale gerichtete Version). *Seien  $s \neq t$  Ecken des Digraphen  $D$ . Die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter  $s, t$ -Wege in  $D$  ist gleich der minimalen Anzahl von Kanten einer von  $s$  nach  $t$  trennenden Kantenmenge in  $D$ .*

Dieses Theorem ist auch wieder von der Art Min-Max.

**Beweis.** Sei  $k$  die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter  $s, t$ -Wege,  $l$  die minimale Anzahl von Kanten in einer von  $s$  nach  $t$  trennenden Kantenmenge. Jeder  $s, t$ -Weg enthält wenigstens eine Kante jeder von  $s$  nach  $t$  trennenden Kantenmenge. Dann  $k \leq l$ .

Betrachte das durch  $c : E(D) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $c(e) = 1 \forall e \in E(D)$  bestimmte Netzwerk  $N = (D, c, s, t)$ . Sei  $X$  ein beliebiger Schnitt. Dann  $\|X\| = |E_D^+(X)|$ . Weil  $E_D^+(X)$  von  $s$  nach  $t$  trennende Kantenmenge ist, folgt  $\|X\| = l$ . Nach Satz 3.2 gibt es einen ganzzahligen Fluss der Stärke  $\geq l$ , der die Summe von ganzzahligen Elementarflüssen  $f_{P_1}, \dots, f_{P_j}$  ist, wobei  $\|f_{P_i}\| \geq 1$ , also  $\|f_{P_i}\| = 1$  gilt. Wegen  $(f_{P_1} + \dots + f_{P_j})(e) \leq c(e) = 1$  sind die Wege  $P_1, \dots, P_j$  paarweise kantendisjunkt. Also  $j \geq l$ . Also  $k \geq j$ , damit auch  $k \geq l$ .  $\square$

**3.14.** Seien  $s, t$  Ecken des Digraphen oder Graphen  $G$ .  $X \subseteq V(D) \setminus \{s, t\}$  heißt eine von  $s$  nach  $t$  **trennende Eckenmenge** (im ungerichteten Fall  $s, t$ -**trennende Eckenmenge**), wenn  $D - X$  keinen  $s, t$ -Weg besitzt.

bild 3.13

**3.15.** Zwei  $s, t$ -Wege heißen **offen disjunkt**, falls sie keine inneren Ecken gemeinsam haben.

Eine solche trennende Eckenmenge kann es nur geben, wenn  $s \neq t$  und keine Kante  $(s, t) \in E(D)$  existiert, da in dem Fall keine inneren Ecken existieren, die man löschen könnte, den Weg von  $s$  nach  $t$  zu zerstören. Im entgegengesetzten Fall (d. h. es gibt

eine innere Ecken auf dem  $s, t$ -Weg), kann man immer eine trennende Eckenmenge  $X = V(D) \setminus \{s, t\}$  wählen.

Genau dann existiert eine von  $s$  nach  $t$  trennende Eckenmenge, wenn  $s \neq t$  und  $st \notin E(D)$ .

**Folgerung 3.4** (MENGER, lokale gerichtete Eckenversion). *Seien  $s \neq t$  Ecken des Digraphen  $D$ ,  $st \notin E(D)$ . Die maximale Anzahl paarweise offen disjunkter  $s, t$ -Wege ist gleich der minimalen Anzahl von Ecken einer von  $s$  nach  $t$  trennenden Eckenmenge.*

Diese Folgerung lässt sich auf Satz 3.3 konstruktiv zurückführen. Aus dem Graphen wird dabei ein Hilfsgraph gebildet, in dem zwei besondere Ecken gefunden werden, die genau dann durch eine bestimmte Anzahl kantendisjunkter Wege verbunden sind, wenn die entsprechende Anzahl offendisjunkter Wege im ursprünglichen Graphen vorhanden ist. Dieser Hilfsgraph wird konstruiert, indem für jede ursprüngliche Ecke  $x$  zwei neue Ecken  $x^-$  und  $x^+$  eingeführt werden, und alle im ursprünglichen Graphen eingehenden Kanten an  $x^-$  eingehen und alle im ursprünglichen Graphen ausgehenden Kanten von  $x^+$  ausgehen. Zusätzlich wird jeweils eine Kante von  $x^-$  nach  $x^+$  eingefügt. Es wird dann gezeigt, dass offendisjunkte Wege im ursprünglichen Graphen korrespondierende kantendisjunkte Wege im Hilfsgraphen haben und trennende Eckenmengen im ursprünglichen Graphen trennende Kantenmengen im Hilfsgraphen haben, sodass Satz 3.3 angewendet werden kann.

**Beweis.** Sei  $D'$  ein Digraph mit den Ecken  $\{x^+, x^- \mid x \in V(D)\}$  und allen Kanten aus  $M = \{x^-x^+ \mid x \in V(D)\}$  sowie einer Kante  $y^+z^+$  für jedes  $yz \in E(D)$ .

Ist  $P$  ein  $s, t$ -Weg in  $D$ , etwa

$$P = \underbrace{x_0}_s, x_1, \dots, \underbrace{x_l}_t. \quad (3.41)$$

Dann ist  $P' := x_0^+, x_1^-, x_1^+, x_2^-, \dots, x_l^-$  ein  $s^+, t^-$ -Weg in  $D'$ . Ist  $Q$  ein weiterer  $s, t$ -Weg in  $D$  und offendisjunkt zu  $P$ , so ist  $Q'$  kantendisjunkt zu  $P'$  in  $D'$ . Ist umgekehrt  $P'$  ein  $s^+, t^-$ -Weg in  $D'$ , so hat  $P'$  die Form

$$P' = \underbrace{x_0^+}_{s^+}, x_1^-, x_1^+, x_2^-, \dots, \underbrace{x_l^-}_{t^-} \quad (3.42)$$

und  $P'' = x_0, \dots, x_l$  ist ein  $s, t$ -Weg in  $D$ . Ist  $Q'$  ein weiterer  $s^+, t^-$ -Weg in  $D'$  und kantendisjunkt zu  $P'$ , so ist  $Q''$  offendisjunkt zu  $P''$  in  $D$ .

Die maximale Anzahl  $l$  paarweise offendisjunkter  $s, t$ -Wege in  $D$  ist also gleich der Maximalzahl paarweise kantendisjunkter  $s^+, t^-$ -Wege in  $D'$ .

Sei  $S$  eine von  $s$  nach  $t$  trennende Eckenmenge in  $D$  von kleinster Mächtigkeit  $|S| = l$ . Dann  $S' = \{x^-x^+ \mid x \in S\}$  ist eine von  $s^+$  nach  $t^-$  trennende Kantenmenge in  $D$ . Sonst gäbe es ja ein  $s^+, t^-$ -Weg in  $D'$  ohne Kanten aus  $S'$ , etwa  $P'$ , und  $P''$  (wie oben) wäre ein  $s, t$ -Weg in  $D$  ohne Ecken aus  $S$ .  $\zeta$

$S'$  ist sogar eine von  $s^+$  nach  $t^-$  trennende Kantenmenge in  $D'$  von kleinster Mächtigkeit: Sei dazu  $T'$  irgendeine von  $s^+$  nach  $t^-$  trennende Kantenmenge in  $D'$ . Für  $e \in M$  sei  $\bar{e} := e$ . Für  $e = y^+z^-$  setze  $\bar{e} := z^-z^+$  für  $z \neq t$ , für  $e = y^+t^-$  setze  $\bar{e} = y^-y^+$ .

bild 3.14

bild 3.15

Jeder  $s^+, t^-$ -Weg, der ein  $e$  aus  $T'$  enthält, enthält auch  $\bar{e}$ . Kein solcher Weg enthält die Kanten  $s^-s^+$  oder  $t^-t^+$ .  $\overline{T'} := \{\bar{e} \mid e \in T'\} \setminus \{s^-s^+, t^-t^+\}$  ist dann eine von  $s^+$  nach  $t^-$  trennende Kantenmenge in  $D'$  mit  $|\overline{T'}| \leq |T'|$ . Dann ist  $T'' := \{x \mid x^-x^+ \in \overline{T'}\}$  eine von  $S$  nach  $T$  trennende Eckenmenge in  $D$ . Sonst gäbe es einen  $s, t$ -Weg in  $D$  ohne Ecken aus  $T''$ , etwa  $P$  und  $P'$  (wie oben) wäre  $s^+, t^-$ -Weg in  $D'$  ohne Kanten in  $\overline{T'}$ .  $\zeta$

Also ist

$$|S'| = |S| \leq |T''| = |\overline{T'}| \leq |T'|. \quad (3.43)$$

Also ist die Anzahl  $k$  von Ecken einer kleinsten von  $s$  nach  $t$  trennenden Eckenmenge in  $D$  gleich der Anzahl  $k'$  von Kanten einer von  $s^+$  nach  $t^-$  trennenden Kantenmenge in  $D'$ . Nach Satz 3.3 für  $D', s^+, t^-$  gilt  $k' = l'$ . Da  $k' = k$  und  $l' = l$ , ist  $k = l$ .  $\square$

**Folgerung 3.5** (Menger, lokale ungerichtete Eckenversion). *Seien  $s \neq t$  nicht benachbarte Ecken des Graphen  $G$ . Die maximale Anzahl paarweise offendisjunkter  $s, t$ -Wege in  $G$  ist gleich der Minimalanzahl von Ecken einer  $s, t$ -trennenden Eckenmenge.*

Auch diese Satz lässt sich leicht auf die gerichtete Version zurückführen. Dafür wird aus dem ungerichteten Graphen ein Digraph konstruiert, bei dem für jede ungerichtete Kante im ungerichteten Graphen zwei gerichtete Kanten (eine pro Richtung) eingefügt werden .

bild 3.16

**Beweis.** Sei  $D$  der Digraph mit  $V(D) = V(G)$  und Kanten  $xy$  für in  $G$  benachbarte Ecken  $x, y$ . Jeder  $s, t$ -Weg in  $G$  (in Folgendarstellung) ist ein  $s, t$ -Weg in  $D$  und umgekehrt. Mit Satz 3.4 folgt die Behauptung.  $\square$

Diese Sätze werden nun ausgeweitet auf globale Versionen, d. h. es werden alle Eckenpaare im Graphen betrachtet.

**3.16.** Ein Graph  $G$  heißt  **$k$ -zusammenhängend**, falls  $|V(G)| > k$  gilt und  $G - S$  zusammenhängend ist für alle  $S \subseteq V(G)$  mit  $|S| < k$ .

Der Graph ist also zusammenhängend, solange weniger als  $k$  Ecken gelöscht werden. Dies ist auch in Netzen (bspw. im Stromnetz) ein Maß für die Ausfallsicherheit, da  $k$ -zusammenhängende Netze mit großem  $k$  viele Knoten ausfallen müssen, damit es zu einem Netzausfall kommt.

**3.17.** Ein  $T \subseteq V(G)$  heißt **trennende Eckenmenge** von  $G$ , falls  $G - T$  unzusammenhängend ist.

**Folgerung 3.6** (Menger, globale ungerichtete Eckenversion). *Ein Graph  $G$  mit  $|V(G)| > 1$  ist genau dann  $k$ -zusammenhängend, wenn es zwischen je zwei Ecken  $k$  offen disjunkte Wege gibt.*

**Beweis.** „ $\rightarrow$ “ Sei  $G$   $k$ -zusammenhängend,  $s \neq t$  seien Ecken in  $G$ .

Im Fall  $st \notin E(G)$  folgt die Existenz von  $k$  offendisjunkten  $s, t$ -Wegen direkt aus [Satz 3.5](#), weil es nach Voraussetzung insbesondere keine  $s, t$ -trennende Eckenmenge mit weniger als  $k$  Ecken gibt.

Fall  $st \in E(G)$ : Betrachte  $G - st$ . Gäbe es eine  $s, t$ -trennende Eckenmenge  $T$  von  $G - st$  mit  $|T| < k - 1$ , so sei  $C$  die Komponente von  $(G - st) - T$ , welche  $s$  enthält und  $C'$  die Vereinigung aller anderen Komponenten von  $(G - st) - T$ .

Im Fall  $|V(C)| > 1$  ist  $T \cup \{s\}$  eine trennende Eckenmenge von  $G - st$  und auch von  $G$ .  $\nmid |T \cup \{s\}| < k$

Sonst ist  $|V(C')| > 1$ . Wegen  $|V(G)| > k$  und  $T \cup \{t\}$  trennende Eckenmenge von  $G$  mit weniger als  $k$  Elementen.

Aufgrund von [Satz 3.5](#) besitzt  $G - st$   $k - 1$  viele offen disjunkte  $s, t$ -Wege; zusammen mit dem Weg  $P = st$  erhält man  $k$  viele offen disjunkte  $s, t$ -Wege in  $G$ .  $\checkmark$

„ $\leftarrow$ “ Es gibt  $s \neq t$  aus  $V(G)$ ; nach Voraussetzung existieren  $k$  offen disjunkte  $s, t$ -Wege.<sup>1</sup> Wenigstens  $k - 1$  dieser Wege enthalten eine innere Ecke. Also  $|V(G)| > k$ .

Angenommen  $S \subseteq V(G)$ ,  $|S| < k$  und  $G - S$  unzusammenhängend, so gibt es  $s, t$  aus verschiedenen Komponenten von  $G - S$  und  $S$  ist eine  $s, t$ -trennende Eckenmenge in  $G$ .<sup>2</sup> Also gibt es keine  $k$  vielen offen disjunkte  $s, t$ -Wege in  $G$ .<sup>3</sup>  $\nmid$

□

### 3.3. Der Satz von Gutnikov

Zu beachten ist, dass die lokalen Versionen des Satzes von Menger immer zusätzliche Voraussetzungen haben. Was haben jedoch diese Voraussetzungen gemeinsam und wie weit lässt sich der Satz von Menger verallgemeinern? Dabei stellt sich heraus, dass bereits ein entsprechender verallgemeinerter Satz in Russland publiziert wurde. Dies ist der Satz von Gutnikov und verallgemeinert die Sätze von Menger auf allgemeine Graphen.

**3.18.** Ein **allgemeiner Graph**  $G = (V, E, \text{init}, \text{ter})$  ist ein Quadrupel disjunkter Mengen  $V, E$  und Abbildungen  $\text{init}, \text{ter} : E(G) \rightarrow \mathfrak{P}(V(G))$ .

Die Funktionen  $\text{init}$  und  $\text{ter}$  ordnen jeder Kante eine Start- und Endecke zu. Die Funktion  $\text{init}$  zeigt dabei die Start- und  $\text{ter}$  die Endecke an. So können sowohl ungerichtete als auch gerichtete Graphen gleichermaßen betrachtet werden. Die Menge  $V$  und  $G$  sind weiterhin Ecken und Kanten, wie sie bereits von den bisher behandelten Graphen bekannt sind.

<sup>1</sup>Der Fall, dass einer der Wege keine inneren Ecken hat, kann auch eintreten.

<sup>2</sup>Dies kann es aufgrund der lokalen Version des Satzes nicht geben.

<sup>3</sup>Wenn es diese Wege gäbe, müsste es von jedem Weg eine innere Ecke im  $s, t$ -Trenner geben. Dann müsste  $S$  aber größer sein.



Im Gegensatz zu den bisherigen Graphen können Kanten jedoch Mengen von Ecken als Start- und Mengen von Ecken als Endpunkte haben.

schöne Abbildung

**3.19.** Eine Folge  $P = x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, e_l, x_l$  heißt  $a, b$ -**Weg** in  $G$ , wenn  $x_0 = a$ ,  $x_l = b$ ,  $x_0, \dots, x_l$  paarweise verschiedene Elemente aus  $V$  und  $e_1, \dots, e_l$  paarweise verschiedene Elemente aus  $E$  sind und  $x_{i-1} \in \text{init}(e_i)$ ,  $x_i \in \text{init}(e_i) \forall i \in \{1, \dots, l\}$ . Für  $A, B \subseteq V$  ist ein  $A, B$ -**Weg** ein  $a, b$ -Weg mit  $a \in A$ ,  $b \in B$ .

**3.20.**  $S \subseteq V \cup E$  heißt  $A, B$ -**Separator**, falls jeder  $A, B$ -Weg ein Element aus  $S$  besitzt. Zwei Wege heißen  $S$ -**disjunkt**, falls sie keine gemeinsamen Elemente aus  $S$  besitzen.

Im Satz von GUTNIKOV fallen nun alle Voraussetzungen im zusammen, die es zuvor in den lokalen Versionen der Sätze von MENGER gab.

**Satz 3.7** (GUTNIKOV). Sei  $G$  ein allgemeiner Graph,  $S \subseteq V(G) \cup E(G)$  ein  $A, B$ -Separator für  $A, B \subseteq V(G)$ . Genau dann existieren  $k$  viele paarweise  $S$ -disjunkte  $A, B$ -Wege, wenn es keinen  $A, B$ -Separator  $T \subseteq S$  mit  $|T| < k$  gibt.

(Ohne Beweis)

Durch Spezialisierung lassen sich aus diesem Satz dann auch wieder die Sätze von MENGER aus [Abschnitt 3.2](#) zurückführen.

## 4. Färbungen

### 4.1. Greedy-Färbung

4.1. Eine **Anticlique** ist eine Menge paarweise nicht benachbarter Ecken.

4.2. Eine  **$k$ -Färbung** von  $G$  ist eine Partition von  $V(G)$  in höchstens  $k$  Anticliquen.

Alternativ lassen sich  $k$ -Färbungen auch als Abbildungen betrachtet. Daraus ergibt sich die klassische Definition für Färbungen:

4.3. Eine  **$k$ -Färbung** von  $G$  ist eine Abbildung  $f: V(G) \rightarrow C$  in eine  $k$ -elementige Menge  $C$  mit  $f(x) \neq f(y)$  für  $xy \in E(G)$ .

Eine Färbung in Form von Anticliquen lässt sich in eine Färbung in Form einer Funktion umwandeln, indem jeder Anticlique eine Zahl zugeordnet wird und die Ecken in den Anticliquen als Farbe die der Anticlique zugeordnete Zahl erhalten. Umgekehrt können Anticliquen gebildet werden, indem Ecken mit der gleichen Farbe jeweils zu einer Anticlique zusammengefasst werden. Über Färbbarkeit lässt sich also immer über beide Möglichkeiten (finden einer Funktion  $f$  entsprechend [Definition 4.3](#) oder Bildung von  $k$  Anticliquen entsprechend [Definition 4.2](#)) argumentieren.

4.4. Für  $G$  sei die **chromatische Zahl**  $\chi(G)$  definiert als

$$\min \{k \geq 0 \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}. \quad (4.1)$$

Einige Zusammenhänge zwischen Eigenschaften des Graphen und der chromatischen Zahl sind bereits bekannt:

$$\chi(G) = 0 \iff G = (\emptyset, \emptyset) \quad (4.2)$$

$$\chi(G) \leq 1 \iff E(G) = \emptyset \quad (4.3)$$

$$\chi(G) \leq 2 \iff G \text{ hat keine Kreise ungerader Länge} \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

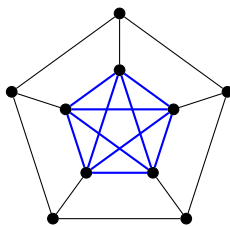


Abbildung 4.1.: 5er-Clique

Das Entscheidungsproblem  $\chi(G) \leq 3$  ist bereits NP-vollständig.<sup>1</sup> Deshalb ist es nützlich, wenn zumindest Schranken für die Färbungszahl gewonnen werden können. Eine mögliche Abschätzung ist im Folgenden gezeigt.

Definiere zunächst

$$\omega(G) = \max \{ |A| \mid A \text{ Clique in } G \} \quad (4.6)$$

Dabei sind **Cliquen** Mengen von benachbarten Ecken. Es gilt  $\chi(G) \geq \omega(G)$ . Dies gilt intuitiv, da eine Clique mit  $k$  paarweise benachbarten Ecken auch mindestens  $k$  Farben benötigt, damit keine zwei benachbarten Ecken die gleiche Farbe haben. Allerdings ist auch die Bestimmung von  $\omega(G)$  NP-vollständig.

Als Gegenstück zu  $\omega(G)$  kann man auch  $\alpha$  definieren als:

$$\alpha(G) = \max \{ |A| \mid A \text{ Anticlique in } G \} \quad (4.7)$$

$G$  hat  $\chi(G)$ -Färbung  $\mathcal{C}$  (Partition in  $\chi(G)$  Anticliquen). Daraus folgt

$$|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G) \implies \chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \quad (4.8)$$

für  $G \neq (\emptyset, \emptyset)$ .

Die Anticliquenzahl ist gleich der Cliquenzahl des Komplementärgraphen. Dieser lässt sich bilden, indem die Ecken miteinander verbunden werden, die im ursprünglichen Graphen nicht miteinander verbunden sind. Entsprechend ist auch die Bestimmung der Anticliquenzahl ein NP-vollständiges Problem.

Beispielsweise findet man im Graph in [Abbildung 4.1](#) eine 5er-Clique. Also benötigt man mindestens 5 Farben für die Graphenfärbung. Es zeigt sich auch durch Beispiel, dass der Graph 5-färbbar ist. Da  $\omega(G) = 5$  eine untere Schranke ist, ist also  $\chi(G) = 5$ .

Der PETERSEN-Graph ist sogar 3-färbbar  $\chi(G) \geq 3$ , da sich relativ leicht eine 3-Färbung findet, wie in [Abbildung 4.2](#) gezeigt. Da es Kreise ungerader Länge im Graphen gibt, muss entsprechend dem Satz von TUZA ([Satz B.1](#)) auch  $\chi(G) \geq 3$  gelten. Also gilt  $\chi(G) = 3$ . Hier zeigt sich auch, dass die Cliquenzahl nur eine untere Schranke ist, da  $\omega(G) = 2$  für den PETERSEN-Graph ist, jedoch  $\chi(G) = 3$ .

<sup>1</sup>Das Problem lässt sich auf 3-SAT, ein bekanntes NP-vollständiges Problem, reduzieren.

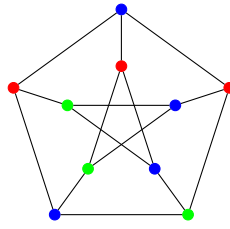


Abbildung 4.2.: 3-Färbung im PETERSEN-Graph

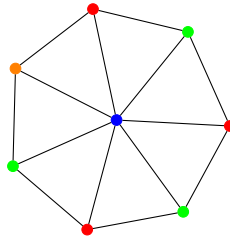


Abbildung 4.3.: 4-Färbung im 7-Rad

**4.5.**  $G$  ist **planar/plättbar**, falls eine „überschneidungsfreie“ Zeichnung des Graphen in der Ebene möglich ist.

Ein Beispiel für einen planaren Graphen ist das 7-Rad, gezeigt in [Abbildung 4.3](#). Für diese gilt der sogenannte *Vierfarbensatz*.

**Satz 4.1** (Vier-Farben-Satz).  $\chi(G) = 4$  für planare Graphen  $G$ .

Zum Beweis dieses Satzes ist nach wie vor Rechenaufwand mit Computern notwendig. Bis heute ist kein Beweis für diesen Satz vorhanden, er wird jedoch trotzdem als bewiesen angesehen.

Anwendung findet der Satz auch auf Landkarten. Durch Abbildung der Länder durch ihre Hauptstädte und Verbindung der Hauptstädte untereinander, wenn sie auf der Landkarte benachbart sind, erzeugt einen solchen planaren Graphen, der dual zur Landkarte ist. Da dieser Überschneidungsfrei ist, kann man eine Landkarte also mit vier Farben immer so einfärben, dass keine zwei benachbarten Länder die gleiche Farbe bekommen. Sonderfälle wie Exklaven und Kolonien, die den Graphen nicht mehr planar machen, werden dabei nicht berücksichtigt!

**4.6.** Der **Grad**  $d_G(x)$  einer Ecke  $x$  im Graphen  $G$  ist die Anzahl der mit  $x$  inzidenten Kanten, also in diesem Modell (ohne Mehrfachkanten) die Anzahl der Nachbarn von  $x$ .

$$\delta(G) := \min \{d_G(x) \mid x \in V(G)\} \quad (4.9)$$

$$\Delta(G) := \max \{d_G(x) \mid x \in V(G)\} \quad (4.10)$$

sind der **Minimalgrad** bzw. **Maximalgrad**.

Beachte, dass bei der Benutzung von Mehrfachkanten der Grad nicht mehr gleich der Anzahl der Nachbarn ist, da es möglich ist, dass zwei oder mehr Kanten zwischen  $x$  und einem Nachbarn liegen.

Sei  $k > 0$  eine Zahl und  $x_1, \dots, x_n$  eine Aufzählung der Ecken von  $G$  mit

$$|N_G(x_{l+1}) \cap \{x_1, \dots, x_n\}| < k \quad \forall l \in \{1, \dots, n-1\} \quad (4.11)$$

(bspw.  $k = \Delta(G) + 1$  und eine beliebige Aufzählung). Dann besitzt  $G$  eine  $k$ -Färbung. Diese lässt sich induktiv konstruieren.

**Verfahren 4.1:** Seien  $x_1, \dots, x_l$  bereits gefärbt (d. h.  $G[\{x_1, \dots, x_l\}]$  besitzt eine Färbung  $f$ , etwa mit den Farben  $1, \dots, k$ ). Weil  $x_{l+1}$  weniger als  $k$  Nachbar in  $\{x_1, \dots, x_l\}$  hat, gibt es eine Farbe  $c \in \{1, \dots, k\}$  mit  $f(x_j) \neq c$  für alle Nachbarn  $x_j$  von  $x_{l+1}$  in  $\{x_1, \dots, x_l\}$ . Durch  $f(x_{l+1}) = c$  erhält man eine Färbung  $f$  von  $G[\{x_1, \dots, x_l, x_{l+1}\}]$ . So entsteht schließlich eine Färbung von ganz  $G$ .

Diese  $k$ -Färbung funktioniert ähnlich, wie es für den PETERSEN-Graph gemacht wurde. Man färbt der Reihe nach die Ecken  $x_1, \dots, x_l$  mit einer beliebigen freien Farbe.

bild 4.3

Damit ist es möglich, mit einem möglichst kleinen  $k$  die Färbungszahl nach oben hin zu beschränken.

**4.7.** Das kleinste  $k$ , für das es eine Aufzählung  $x_1, \dots, x_n$  der Ecken von  $G$  wie oben gibt, heißt **Reihenzahl** von  $G$ , bezeichnet als  $\text{col}(G)$ .

**Satz 4.2.** Für jeden Graphen  $G$  ist  $\chi(G) \leq \text{col}(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Für vollständige Graphen  $K_n$  und Kreise  $C_l$  ungerader Länge  $l$  ist  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ , d. h. hier gilt Gleichheit.

Bis auf einige Sonderfälle ist  $\chi(G)$  kleiner als  $\Delta(G)$ . Für die Reihenzahl ist hier noch keine einfache Bestimmungsmethode eingeführt worden. Zunächst betrachten wir eine alternative Darstellung der Reihenzahl:

**Satz 4.3.** Für jeden Graphen  $G$  ist

$$\text{col}(G) = \max \{\delta(H) \mid H \text{ induzierter Teilgraph von } G\} \quad (4.12)$$

Die Teilgraphen  $H$  sind dabei von der Form  $H = G[A]$  für  $A \subseteq V(G)$ .

**Beweis.** Sei  $D := \max \{ \delta(H) \mid H \text{ Teilgraph von } G \}$ . Definiere induktiv (abwärts) eine Aufzählung von  $V(G)$ . Sind  $x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_n$  schon definiert, so sei  $x_l$  eine Ecke minimalen Grades in  $H = G - \{x_{l+1}, \dots, x_n\} = G[V(G) \setminus \{x_{l+1}, \dots, x_n\}]$ .

Danach gilt

$$|N_G(x_l) \cap \{x_1, \dots, x_l\}| = \delta(H) \leq D < D + 1 \quad (4.13)$$

Also ist  $\text{col}(G) \leq D + 1$ .

Sei umgekehrt  $x_1, \dots, x_n$  eine Aufzählung von  $V(G)$ , die die Reihenzahl  $k = \text{col}(G)$  realisiert. Sei  $H$  ein induzierter Teilgraph von  $G$  und  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_h}$  die induzierte Aufzählung seiner Ecken ( $i_1 < i_2 < \dots < i_h$ ). Dann gilt

$$\delta(H) \leq |N_H(x_{i_h})| \quad (4.14)$$

$$= |N_G(x_{i_h}) \cap \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{h-1}}\}| \quad (4.15)$$

$$\leq |N_G(x_{i_h}) \cap \{x_1, x_2, \dots, x_{(i_h-1)}\}| \quad (4.16)$$

$$< k. \quad (4.17)$$

Dann gilt  $k > \delta(H)$ , also

$$k > \max \{ \delta(H) \mid H \text{ induzierter Teilgraph von } G \} \quad (4.18)$$

$$= D \quad (4.19)$$

$$\implies \text{col}(G) = D + 1 \quad (4.20)$$

□

## 4.2. Die Sätze von Brooks und Vizing

bild 4.4

Betrachte. Wenn man für kleinere Graphen bereits eine Färbung gefunden hat, ist man interessiert, eine Färbung für eine Erweiterung des Graphen zu finden. Dafür muss man möglicherweise eine bestehende Färbung modifizieren, um die Färbung zu organisieren, sodass eine günstigere Färbung für die Erweiterung entsteht.

Dafür wähle man zunächst zwei Farben aus und beobachte alle Ecken, die durch diese Farben gefärbt sind. Man kann nun versuchen, in dem durch diese Ecken und die diese Ecken verbindenden Kanten induzierten Teilgraphen die Farben zu tauschen. Dies ist offensichtlich möglich. Für Ecken, die aus dem induzierten Teilgraphen hinausführen, ist dies auch möglich. Dadurch entsteht eine neue Färbung des Graphen. Dies ist auch für nur einzelne Komponenten, dieses Teilgraphen möglich, sodass bspw. Ecken ohne Nachbarn im induzierten Graphen nicht umgefärbt werden müssen. Ein solcher Tausch der Färbung wird auch als **Kempe-Tausch** bezeichnet.

**4.8.** Ist  $\mathcal{C}$  eine  $k$ -Färbung des Graphen  $G$  (Partition in höchstens  $k$  Anticliquen) und sind  $A \neq B$  verschiedene Farbklassen (Anticliquen) aus  $\mathcal{C}$ . So heißt eine Komponente  $H$  des Graphen  $G[A \cup B]$ , eine  **$A, B$ -Kempe-Kette**.

**4.9.** Die Menge  $A \triangle V(H)$  ist eine Anticlique in  $G$ . Dies gilt, da  $A \setminus H(G)$  offensichtlich eine Anticlique ist und  $V(H) \setminus A = V(H) \cap B$  auch eine Anticlique ist (da ja  $B$  bereits eine Anticlique ist). Also ist

$$\mathcal{C}(H) := (\mathcal{C} \setminus \{A, B\}) \cup \{A \triangle V(H), B \triangle V(H)\} \quad (4.21)$$

ebenfalls eine  $k$ -Färbung von  $G$ .  $\mathcal{C}(H)$  entsteht aus  $\mathcal{C}$  durch **Kempe-Tausch** entlang der  $A, B$ -Kempe-Kette  $H$ .

Sätze wie der Vier-Farben-Satz wurden häufig versucht zu beweisen. Oftmals wurden diese mithilfe von mehrfachen Kempe-Täuschen durchgeführt. Meist sind dabei Rechenfehler aufgetreten, die dann die Ursache waren, weshalb der Beweis fehlerhaft ist.

Generell lassen sich jedoch mithilfe von Kempe-Täuschen Bedingungen für den Fünf-Farben-Satz (und Sätze mit mehr Farben) zeigen, die für die Grade der Ecken in planaren Graphen gelten müssen, damit die Graphen mit der jeweiligen Anzahl Farben färbbar ist.

**Satz 4.4 (BROOKS).** *Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph. Dann gilt  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$  und dort Gleichheit genau dann, wenn  $G$  ein vollständiger Graph ist oder ein Kreis ungerader Länge.*

**Beweis.** Die Behauptung ist richtig für vollständige Graphen und für  $\Delta(G) \leq 2$ . Sei  $G$  ein Gegenbeispiel mit möglichst wenigen Kanten und  $\Delta := \Delta(G)$ . Dann hat  $G$  eine Kante  $xy$  und  $\Delta \geq 3$ . Außerdem besitzt  $G - xy$  eine  $\Delta$ -Färbung  $\mathcal{C}$  (diskutiere den Fall  $G - xy$  unzusammenhängend ist bzw.  $G - xy$  ein zusammenhängender Ausnahmegrph ist). nach Wahl von  $G$ . Dann liegen  $x$  und  $y$  in der selben Farbklasse  $A$  aus  $\mathcal{C}$ . Sei  $B \neq A$  aus  $\mathcal{C}$ . Dann liegen  $x, y$  in derselben  $A, B$ -Kempe-Kette (sonst führt ein Kempe-Tausch bei der  $A, B$ -Kempe-Kette, die  $x$  enthält, auf eine Färbung, in der  $x, y$  unterschiedlichen Farbklassen angehören). Jede der  $\Delta - 1$  vielen Farben  $\neq A$  kommt bei wenigstens einem Nachbarn von  $x$  in  $G - xy$  vor. (Träfe das für  $C \neq A$  nicht zu, könnte man  $x$  mit  $C$  statt  $A$  färben.) Also kommt jede der  $\Delta - 1$  vielen Farben  $\neq A$  bei genau einem Nachbarn von  $x$  in  $G - xy$  vor.  $x$  (und  $y$ ) haben also in der  $A, B$ -Kempe-Kette, die  $x$  und  $y$  enthält, jeweils den Grad 1.

Gäbe es eine innere Ecke des  $x, y$ -Weges in der  $A, B$ -Kempe-Kette, die  $x$  und  $y$  enthält, mit mehr als zwei Nachbarn in dieser Kempe-Kette, so wähle eine solche mit möglichst kleinem Abstand auf dem Weg zu  $x$ , etwa  $z$ . Also hat  $z$  drei Nachbarn aus  $A$  (oder aus  $B$ ). Also tritt wenigstens eine der  $\Delta - 2$  von  $A, B$  verschiedenen Farben in der Nachbarschaft von  $z$  nicht auf. Die Umfärbung von  $z$  mit Farbe  $C$  liefert eine Färbung, bei der  $x, y$  nicht in derselben  $A, B$ -Kempe-Kette liegen.  $\downarrow$

Darum ist die  $A, B$ -Kempe-Kette, die  $x$  und  $y$  enthält, ein Weg von  $x$  nach  $y$ . Dies ist der Fall für *jede* von  $A$  verschiedene Farbe  $B$ , etwa für  $C$ .

Haben, die  $A, B$ -Kempe-Kette und die  $A, C$ -Kempe-Kette mindestens eine gemeinsame Ecke  $z$ , so treten die Farben  $B$  und  $C$  jeweils genau zweimal unter den Nachbarn von  $z$  in  $G - xy$  auf. Daraus folgt, dass eine der  $\Delta - 3$  von  $A, B, C$  verschiedenen Farben,

etwa  $D$ , dort nicht auftritt. Wähle  $z$  möglichst nahe bei  $x$  in der  $A, B$ -Kempe-Kette.<sup>2</sup> Die Umfärbung von  $z$  mit  $D$  führt auf eine Färbung, in der  $x, y$  nicht in derselben  $A, B$ -Kempe-Kette liegen.

Also bilden die  $A, B$ -Kempe-Ketten,  $B \neq A$ , die  $x$  und  $y$  enthalten, ein System von  $\Delta - 1$  vielen offen disjunkten  $x, y$ -Wegen (für jede Färbung  $\mathcal{C}$ , für jede Kante  $xy$  von  $G$ ).

**Falsche Fortführung** Wir wollen zeigen: die  $A, B$ -Kempe-Kette  $P$ , die  $x, y$  enthält, hat keine inneren Ecken aus  $A$  (d. h.  $P$  hat Länge 2). Wäre  $z$  eine solche, so betrachte die  $A, C$ -Kempe-Kette  $H$ , die  $z$  enthält; diese enthält nicht  $x, y$ . Durch Kempe-Tausch entlang  $H$  entsteht eine Färbung, in der  $x, y$  in verschiedenen  $A, B$ -Kempe-Ketten liegen.

Achtung! Es ist nicht grundsätzlich der Fall, dass danach  $x, y$  in verschiedenen Kempe-Ketten liegen. Stattdessen ist es möglich, dass durch die Umfärbung die Kette irgendwann anders wieder verbunden wird!

**(Hoffentlich) richtige Fortführung** Sei  $y'$  der Nachbar von  $x$  auf der  $A, B$ -Kempe-Kette, die  $x, y$  enthält. Betrachte den Graphen  $(G - xy) - xy'$  (Unterbrechung ebenjener  $A, B$ -Kempe-Kette direkt hinter  $x$ ) und färbe dort die  $A, B$ -Kempe-Kette, die  $y$  enthält, um. Es entsteht eine Färbung  $\mathcal{C}'$  von  $G - xy'$ , in der  $x, y'$  mit  $A$  gefärbt sind. Diese hat dieselben Eigenschaften wie (sinngemäß)  $\mathcal{E}$ .

Die  $A, B$ -Kempe-Kette, die  $x, y$  enthält in  $\mathcal{C}'$  und  $G - xy'$  entsteht aus der  $A, B$ -Kempe-Kette  $P'$ , die  $x, y$  enthält in  $\mathcal{C}$ , die  $x, y$  enthält,  $G - xy$ , wie folgt:

$$P' = (P - x) + x \quad (4.22)$$

Die  $A, C$ -Kempe-Kette in  $\mathcal{C}'$ ,  $G - xy'$ ,  $Q$  entsteht darum aus der  $A, C$ -Kempe-Kette in  $\mathcal{C}$  und  $G - xy$  durch  $Q' = (Q - y) + y'$ .

Sei  $x'$  der von  $x$  verbliebene Nachbar von  $y'$  auf der  $A, B$ -Kempe-Kette, die  $x, y$  enthält (in  $\mathcal{C}$ ,  $G - xy$ ). Durch Farbtasch bei  $x$  und  $y'$  entsteht eine Färbung  $\mathcal{C}''$  von  $G - y'x'$ . Die  $A, B$ -Kempe-Kette dort, die  $x', y'$  enthält, ist  $(P - \{x, y'\}) + x + y'$  die  $A, C$ -Kempe-Kette dort, die  $x', y'$  enthält, hat eine Ecke des Grades  $\geq 3$  (nämlich den  $\mathcal{C}$ -gefärbten Nachbarn von  $y'$ , es sei denn, dieser ist zu  $x$  benachbart). Wie oben der Nachbar  $z'$  auf der  $A, C$ -Kette von  $G - xy$ ,  $\mathcal{C}$ , die  $x, y$  enthält, ist zu  $x'$  benachbart.

Aber:  $z'$  hat jetzt drei mit  $A$  gefärbte Nachbarn, nämlich  $x$ , einen weiteren auf der  $A, C$ -Kempe-Kette und  $x'$ .  $\square$

Es sei anzumerken, dass es sich in der Vergangenheit gezeigt hat, dass die Zuhilfenahme von Kempe-Ketten und Kempe-Tauschen, leicht zu Fehlern im Beweis führen kann!

Backref  
Traveling-  
Salesman-  
Problem zu Ab-  
schnitt 4.3

<sup>2</sup>Dies ist zwar nicht zwangsläufig notwendig, gibt aber zusätzliche Kontrolle darüber, wie die das Anfangsstück der  $A, B$ -Kempe-Kette auszusehen hat.



# A. Lektüre

Lehrbücher von:

- R. Diestel
- D. West
- J. A. Bondy
- U. S. R. Murty
- C. Berge
- F. Harary

Wikipedia ist auch okay.

## B. Sätze, die in der Übung bewiesen werden

**Satz B.1** (TUZA). *Für  $k \geq 2$  ist ein Graph  $k$ -färbbar, wenn er keine Kreise der Länge  $l$  kongruent  $+1$  modulo  $k$  besitzt.*

## C. Prüfungstermine

- 20. Februar 2024 – 23. Februar 2024



# Stichwortverzeichnis

- Abstand, 8
- Anticlique, 42
- arc, 30
- aufspannend, 28
- Austauschlemma, 13
- Außengrad, 30
- Außenkante, 30
  
- Barriere, 23
- Basis, 15
- Baum, 6, 12
  - Spann-, 8
  - Tiefensuch-, 10
  - Zerlegungs-, 18
- Baumweite, 18
- Baumzerlegung, 18
- benachbart
  - Knoten, 3
- Berge, 22
- BFS, 9
- Breadth-First-Search, 9
- Breitensuchbaum, 9
- Breitensuche, 8, 9
  
- chromatische Zahl, 42
- Clique, 19, 43
- Courcelle, 19
  
- DFS, 10
- Differenz
  - symmetrisch, 20
- Digraph, 30
- disjunkt
  - $S$ , 41
  - Graph, 24
  
- Ecke, 3, 30
  
- Endecke, 5
- innere, 5
- wesentlich, 25
- Elementarfluss, 32
- endlich, 3
  
- Faktor
  - $f$ , 28
- faktorkritisch, 24
- Faktorsatz
  - $f$ , 28
- Fluss, 31
- Färbung, 42
  
- Gewicht
  - Gesamt, 17
- Grad, 28
  - Ecke, 45
  - Maximal-, 45
  - Minimal-, 45
- Graph, 3
  - allgemein, 40
  - aufspannend, 8, 28
  - disjunkt, 24
  - faktorkritisch, 24
- Greedy-Algorithmus, 13
- Gutnikov, 41
  
- Hall, 21
- Hall-Bedingung, 21
- Heiratssatz, 21
  
- Innengrad, 30
- Innenkante, 30
  
- Kante, 3, 30
- kantendisjunkt, 37

- Kantenmenge, 5
- Kapazität, 31
  - Schnitt, 32
- Kempe-Kette, 46
- Kempe-Tausch, 46, 47
- Kirchhoff, 31
- Knoten, 30
- Knotenmenge, 5
- Komponenten
  - Zusammenhangs, 6
- Kreis, 12
  - Hamilton, 22
  - kontinuierlich gerichtet, 31
- kreisfrei, 12
- logic
  - monadic second order, 19
- Länge
  - Kreis, 12
  - Weg, 5
- Löschung, 5
- Matching, 20
  - größtes, 23
  - perfekt, 24
- Matroid, 15
- Max-Flow-Min-Cut-Theorem, 33
- Metrik, 8
- Min-Max-Theorem, 26
- monadic second order logic, 19
- Nachbar, 3
- Nachbarschaft, 20
- Netzwerk, 31
- offen disjunkt, 37
- Petersen-Graph, 3
- planar, 44
- plättbar, 44
- Polynomialzeitapproximationsschema, 17
- Quelle, 31
- Reihenzahl, 45
- Residualweg, 34
- Rückwärtskante, 34
- Schnitt, 32
- Senke, 31
- Separator
  - allgemeiner Graph, 41
- Spannbaum, 8
  - minimalen Gewichtes, 13
- Stärke, 32
- Tasche, 18
- Teilgraph, 3
  - induziert, 4
- Tiefensuchbaum, 10
- Tiefensuche, 8, 10, 11
- Toncias, 22
- Traveling-Salesman-Problem, 15
- trennend
  - Eckenmenge, 37, 39
  - Kantenmenge, 37
- unabhängig, 15
- Verbesserungsweg, 21
- Vorwärtskante, 34
- Wald, 6, 12
- Weg, 5
  - allgemeiner Graph, 41
  - alternierend, 21
  - Verbesserungs-, 21
- Weite
  - Baum-, 18
  - Baumzerlegung, 18
- wesentlich
  - Ecke, 25
- Zerlegungsbaum, 18
- zh, 6
- zshgd, 6
- zugrundeliegender ungerichteter Graph, 31
- zusammenhängend
  - $k$ -, 39
- zusammenhängend, 6
  - minimal, 6