Hausaufgabenserie 3

Adrian Schollmeyer

Aufgabe 1

$$\text{z: } R \text{ reflexiv, antisymmetrisch, transitiv} \tag{1}$$

„R reflexiv“:

$$a_1 \leq_A a_2 \wedge b_1 \leq_B b_2 \tag{2}$$
$$a_1 \leq_A a_1 \wedge b_1 \leq_B b_1 \quad \checkmark \tag{3}$$

„R antisymmetrisch“:

$$(a_1 \leq_A a_2 \wedge b_1 \leq_B b_2) \wedge (a_2 \leq_A a_1 \wedge b_2 \leq_B b_1) \implies (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \tag{4}$$
$$a_1 \leq_A a_2 \tag{5}$$
$$a_2 \leq_A a_1 \tag{6}$$
$$\text{weil Gleichung 6 gilt:} \quad \implies a_1 \not<_A a_2 \tag{7}$$
$$\text{weil Gleichung 5 gilt:} \quad \implies a_2 \not<_A a_1 \tag{8}$$
$$\implies a_1 = a_2 \tag{9}$$
$$b_1 \leq_B b_2 \tag{10}$$
$$b_2 \leq_B b_1 \tag{11}$$
$$\text{weil Gleichung 11 gilt:} \quad \implies b_1 \not<_B b_2 \tag{12}$$
$$\text{weil Gleichung 10 gilt:} \quad \implies b_2 \not<_B b_1 \tag{13}$$
$$\implies b_1 = b_2 \tag{14}$$
$$\text{daraus folgt:} \quad (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \quad \checkmark \tag{15}$$

„R transitiv“:

$$a_1 \leq_A a_2 \wedge a_2 \leq_A a_3 \implies a_1 \leq_A a_3 \tag{16}$$

Indirekt:

$$\text{Sei } a_1 \leq_A a_2 \wedge a_2 \leq_A a_3 \implies a_1 >_A a_3, \tag{17}$$
$$\text{dann ist } a_1 >_A a_2 \wedge a_1 \leq_A a_2 \quad ↯ \tag{18}$$
$$\text{Daher muss } \leq_A \text{ transitiv sein.} \quad \checkmark \tag{19}$$

$$b_1 \leq_B b_2 \wedge b_2 \leq_B b_3 \implies b_1 \leq_B b_3 \tag{20}$$

Indirekt:

$$\text{Sei } b_1 \leq_B b_2 \wedge b_2 \leq_B b_3 \implies b_1 >_B b_3, \tag{21}$$
$$\text{dann ist } b_1 >_B b_2 \wedge b_1 \leq_B b_2 \quad ↯ \tag{22}$$
$$\text{Daher muss } \leq_B \text{ transitiv sein.} \quad \square \tag{23}$$

Aufgabe 2

$$\text{z.z.}: x \sim y \Leftrightarrow (x = y) \vee (x \cdot y \text{ Primzahlpotenz}) \text{ ist Äquivalenzrelation} \tag{24}$$

„$\sim$ reflexiv“:

$$x \sim x \Leftrightarrow (x = x) \vee (x \cdot x \text{ Primzahlpotenz}) \tag{25}$$
$$\Leftrightarrow \text{wahr (da } x = x \text{ immer wahr ist)} \tag{26}$$

„$\sim$ symmetrisch“:

$$y \sim x \Leftrightarrow (y = x) \vee (y \cdot x \text{ Primzahlpotenz}) \tag{27}$$

$=$ ist symmetrisch, $\cdot$ ist kommutativ

$$\Leftrightarrow (x = y) \vee (x \cdot y \text{ Primzahlpotenz}) \tag{28}$$
$$\Leftrightarrow x \sim y \tag{29}$$

„$\sim$ transitiv“:

$$x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z \tag{30}$$
$$\Big((x = y) \vee \Big(x \cdot y = p_1^k\Big)\Big) \wedge \Big((y = z) \vee \Big(y \cdot z = p_2^l\Big)\Big) \implies ((x = z) \vee (x \cdot z = p_3^m)) \tag{31}$$

Seien

$$x \cdot y = p^k \tag{32}$$
$$= p^n \cdot p^o \tag{33}$$

so gilt:

$$
\begin{aligned}
y \cdot z &= p_2^l && (34)\\
&= z \cdot p^o && (35)\\
x \cdot z &= p_3^m && (36)\\
&= z \cdot p^n && (37)
\end{aligned}
$$

Da eine Primzahlpotenz nur in Potenzen gleicher Basis zerlegt werden kann:

$$\implies z = p^q \tag{38}$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
x \cdot z &= p^n \cdot p^q && (39)\\
&= p^m \text{ (ist Primzahlpotenz)} \quad \square && (40)
\end{aligned}
$$

$$\mathfrak{A}A = \big\{\{2,4,8\},\{3,9\},\{5\},\{6\},\{7\},\{10\}\big\} \tag{41}$$

Aufgabe 3

- $R_1 = R \cup \{\, (a,d)\,,(c,d)\,,(e,e)\,,(f,f)\,\}$
- $R_2 = R_1 \cup \{\, (a,a)\,,(b,b)\,,(c,c)\,,(d,d)\,\}$
- $R_3 = R_2 \cup \{\, (b,a)\,,(b,c)\,,(d,c)\,,(d,b)\,,(c,a)\,,(d,a)\,,(a,c)\,\}$