# Hausaufgabenserie 4

Adrian Schollmeyer

## Aufgabe 1

Es seien $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ und $R$ auf $\mathbb{N}^2$ erklärt durch

$$(a, b)\, R\, (c, d) \iff ad \leq bc$$

**Zu prüfende Behauptungen:**

- $R$ Quasiordnung (transitiv, reflexiv)
- $R$ Äquivalenzrelation (transitiv, reflexiv, symmetrisch)
- $R$ Ordnung (transitiv, reflexiv, antisymmetrisch)

„transitiv“:

$$(a, b)\, R\, (c, d) \wedge (c, d)\, R\, (e, f) \implies (a, b)\, R\, (e, f) \tag{1}$$
$$\text{z.z.:}\quad ad \leq bc \wedge cf \leq de \implies af \leq be \tag{2}$$
$$ad \leq bc \wedge cf \leq de \tag{3}$$
$$\implies adcf \leq bcde \qquad |: dc \tag{4}$$
$$\implies af \leq be \tag{5}$$
$$\implies ad \leq bc \wedge cf \leq de \implies af \leq be \quad \checkmark \tag{6}$$

„reflexiv“:

$$(a, b) R\, (a, b) \tag{7}$$
$$\text{z.z.:}\quad ab \leq ba \tag{8}$$
$$ab = ba \qquad \text{wahr für alle } a, b \in \mathbb{N} \tag{9}$$
$$\implies ab \leq ba \tag{10}$$
$$\implies (a, b) R\, (a, b) \quad \checkmark \tag{11}$$

„symmetrisch“:

$$(a, b)\, R\, (c, d) \implies (c, d)\, R\, (a, b) \tag{12}$$
$$\text{z. z.: } \quad ad \leq bc \implies cb \leq da \tag{13}$$
$$\implies ad = bc \qquad \text{gilt nicht für beliebige } a, b, c, d \in \mathbb{N} \tag{14}$$
$$\text{z. B.:} \qquad a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = 1 \qquad d = 2 \tag{15}$$
$$ad = 2 \tag{16}$$
$$bc = 1 \tag{17}$$
$$ad \neq bc \tag{18}$$
$$\implies R \text{ ist nicht symmetrisch} \tag{19}$$

„antisymmetrisch“:

$$(a, b)\, R\, (c, d) \wedge (c, d)\, R\, (a, b) \implies (a, b) = (c, d) \tag{20}$$
$$\text{z. z.: } \quad ad \leq bc \wedge cb \leq da \implies a = c \wedge b = d \tag{21}$$
$$\implies ad = bc \qquad \text{gilt nicht für beliebige } a, b, c, d \in \mathbb{N} \tag{22}$$
$$\text{z. B.:} \qquad a = 2 \qquad b = 2 \qquad c = 1 \qquad d = 1 \tag{23}$$
$$ad = 2 \tag{24}$$
$$bc = 2 \tag{25}$$
$$\implies ad = bc \tag{26}$$

Unter der Annahme, dass $R$ antisymmetrisch ist:

$$a = c \wedge b = d \tag{27}$$
$$2 = 1 \wedge 2 = 1 \quad \lightning \tag{28}$$
$$\implies R \text{ ist nicht antisymmetrisch} \tag{29}$$

- $R$ besitzt alle Merkmale einer Quasiordnung
- $R$ besitzt nicht alle Merkmale einer Äquivalenzrelation
- $R$ besitzt nicht alle Merkmale einer Ordnung

$R$ ist also lediglich keine Quasiordnung, nicht jedoch eine Äquivalenzrelation oder Ordnung. $\square$

# Aufgabe 2

Es seien $a, b \in M$ Studierende Matrikel 2017 und $N : M \to \mathbb{N}, N(x)$ die Zuordnung eines Studierenden $x$ zu seiner einzigartigen Matrikelnummer $N(x)$. Dann gilt:

$$aR_1 b \iff N(a) = N(b) \tag{30}$$
$$aR_2 b \iff N(a) \leq N(b) \tag{31}$$

## $R_1$ **Äquivalenzrelation:**

Behauptungen:

- $R_1$ reflexiv
- $R_1$ transitiv
- $R_1$ symmetrisch

Beweis:

„reflexiv“:

$$
\begin{aligned}
& aR_1a && (32)\\
\text{z.z.:}\quad & N(a) = N(a) && (33)\\
& N(a) = N(a) \text{ wahr, da } N(a) \text{ eine eindeutige Zuordnung ist } \checkmark && (34)
\end{aligned}
$$

„transitiv“:

$$
\begin{aligned}
& aR_1b \wedge bR_1c \implies aR_1c && (35)\\
\text{z.z.:}\quad & N(a) = N(b) \wedge N(b) = N(c) \implies N(a) = N(c) \quad \checkmark && (36)
\end{aligned}
$$

„symmetrisch“:

$$
\begin{aligned}
& aR_1b \implies bR_1a && (37)\\
\text{z.z.:}\quad & N(a) = N(b) \implies N(b) = N(a) \quad \square && (38)
\end{aligned}
$$

## $R_2$ **Ordnungsrelation:**

Behauptungen:

- $R_2$ reflexiv
- $R_2$ transitiv
- $R_2$ antisymmetrisch

Beweis:

„reflexiv“:

$$
\begin{aligned}
& aR_2a && (39)\\
\text{z.z.:}\quad & N(a) \leq N(a) && (40)\\
\implies & N(a) = N(a) \quad \checkmark && (41)
\end{aligned}
$$

„transitiv“:

$$aR_2b \wedge bR_2c \implies aR_2c \tag{42}$$
$$\text{zz:} \quad N(a) \leq N(b) \wedge N(b) \leq N(c) \implies N(a) \leq N(c) \quad \checkmark \tag{43}$$

„antisymmetrisch“:

$$\text{zz:} \quad aR_2b \wedge bR_2a \implies a = b \tag{44}$$
$$N(a) \leq N(b) \wedge N(b) \leq N(a) \implies N(a) = N(b) \tag{45}$$

Da die Matrikelnummer für jeden Studierenden einzigartig ist:

$$\implies a = b \quad \square \tag{46}$$

## Aufgabe 3

- Reflexivität: $xRx$ kann nie gelten, da ein Mensch kein Nachkomme von sich selbst sein kann
- Transitivität: $xRy \wedge yRz \implies xRz$ gilt, da $z$ per Definition unter der gegebenen Bedingung ein indirekter Nachkomme von $z$ ist
- Symmetrie: $xRy \implies yRx$ gilt nicht, da $x$ niemals sowohl Vorfahre als auch Nachkomme von $y$ sein kann.
- Antisymmetrie: $xRy \wedge yRx \implies xRz$ immer wahr, da $xRy \wedge yRx$ immer falsch ist (Begründung analog siehe Symmetrie)