Hausaufgabenserie 5

Adrian Schollmeyer

Aufgabe 1

(a)

$$\begin{aligned} y = f(x) &= 3x + 1 && (1) \\ f^{-1}(y) &= \frac{y-1}{3} && (2) \\ f^{-1} &\text{ ist Funktion} && (3) \\ \implies f &\text{ ist bijektiv, damit auch injektiv} && (4) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} y = f(x) &= x^2 && (5) \\ \overset{D=[0,\infty)}{\implies} x = f^{-1}(y) &= \sqrt{y} && (6) \\ f^{-1} &\text{ ist Funktion} && (7) \\ \implies f &\text{ ist bijektiv, damit auch injektiv} && (8) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} y = f(x) &= x^2 && (9) \\ f &\text{ nicht injektiv, denn z. B.:} && (10) \\ f^{-1}(1) &= \{-1, 1\} && (11) \\ \implies f &\text{ nicht injektiv} && (12) \end{aligned}$$

(d)

$$y = f(x) = mx + n \tag{13}$$
$$x = f^{-1}(y) = \frac{y-n}{m} \tag{14}$$
$$f^{-1} \text{ ist Funktion} \tag{15}$$
$$\implies f^{-1} \text{ ist bijektiv, damit auch injektiv} \tag{16}$$

Aufgabe 2

(a)

$$y = f(x) = 3x + 1 \tag{1}$$
$$x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3} \tag{2}$$
$$f^{-1} \text{ ist Funktion} \tag{3}$$
$$\implies f \text{ ist bijektiv, damit auch surjektiv} \tag{4}$$

(b)

$$y = f(x) = mx + n \tag{5}$$
$$x = f^{-1}(y) = \frac{y-n}{m} \tag{6}$$
$$f^{-1} \text{ ist Funktion} \tag{7}$$
$$\implies f \text{ ist bijektiv, damit auch surjektiv} \tag{8}$$

(c)

$$y = f(x) = x^2 \tag{9}$$
$$\text{Vermutung: } f \text{ nicht surjektiv} \tag{10}$$
$$\text{Beispiel: } f^{-1}(-1) = \text{ existiert nicht} \tag{11}$$
$$-1 \in \mathbb{R} \tag{12}$$
$$\implies f \text{ ist nicht surjektiv} \tag{13}$$

(d)

$$y = f(x) = x^2 \qquad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{14}$$
$$f^{-1}(y) = \{+\sqrt{y}; -\sqrt{y}\} \tag{15}$$
$$f^{-1} \text{ ist definiert für alle } y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{16}$$
$$\implies f \text{ ist surjektiv} \tag{17}$$

Aufgabe 3

(a)

Seien A, B Mengen und $A = (0, 1)$ sowie $B = (a, b)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.
Man zeige, dass $A \cong B$.
Beweis:

$$\text{z}\colon \quad \exists f\colon A \to B : f \text{ ist Bijektion} \tag{1}$$
$$\text{Sei } y = f(x) = x \cdot (b - a) + a \tag{2}$$
$$\text{also } x = f^{-1}(y) = \frac{y - a}{b - a} \tag{3}$$
$$f^{-1} \text{ ist Funktion} \tag{4}$$
$$\text{daraus folgt: } f \text{ ist Bijektion} \tag{5}$$
$$\implies A \cong B \quad \square \tag{6}$$

(b)

Seien A, B Mengen und $A = (-\infty, 0]$ sowie $B = [1, \infty)$.
Man zeige, dass $A \cong B$.
Beweis:

$$\text{z}\colon \quad \exists f\colon A \to B : f \text{ ist Bijektion} \tag{7}$$
$$\text{Sei } y = f(x) = |x| + 1 \tag{8}$$
$$\text{Aufgrund des Definitionsbereiches: } = -x + 1 \tag{9}$$
$$\text{Also } f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{-1} = 1 - y \tag{10}$$
$$f^{-1} \text{ ist Funktion} \tag{11}$$
$$\text{daraus folgt: } f \text{ ist Bijektion} \tag{12}$$
$$\implies A \cong B \quad \square \tag{13}$$