Hausaufgabenserie 6

Adrian Schollmeyer

Aufgabe 1

(a)

- $(\mathbb{Q}, +)$ ist Gruppe
- Neutrales Element $e_G = 0$
- Inverses Element $a^{-1} = -a \qquad \forall a, a^{-1} \in G$

(b)

- $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ist keine Gruppe
- Inverses Element für $a = 0$ existiert nicht

(c)

- $(\mathbb{R}^+, +)$ ist keine Gruppe
- Neutrales Element existiert nicht

(d)

- $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ ist Gruppe
- Neutrales Element $e_G = 1$
- Inverses Element $a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^+$

Aufgabe 2

(a)

$$\{1,2,3,4,5\}\triangle\{2,4,6,8\} = \{1,3,5,8\} \tag{1}$$

(b)

$$A\triangle\varnothing = A \tag{2}$$
$$A\triangle A = \varnothing \tag{3}$$
$$A\triangle M = M \setminus A \tag{4}$$

Aufgabe 3

Sei M Menge und $\triangle$ eine arithmetische Operation (Def. siehe Aufgabenstellung Afg. 2). Dann soll gelten, dass $(\mathfrak{P}(M), \triangle)$ eine abelsche Gruppe ist, d. h., dass die Operation assoziativ und kommutativ ist und dass es ein neutrales Element e gibt und zu jedem $a \in \mathfrak{P}(M)$ ein inverses Element a^{-1} existiert.

Beweis:

„assoziativ“:

$$\text{z}: \quad \forall A, B, C \in \mathfrak{P}(M) : \tag{1}$$
$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C \tag{2}$$
$$A \triangle (B \triangle C) \implies (x \in A \wedge x \notin (B \triangle C)) \vee (x \notin A \wedge x \in (B \triangle C)) \tag{3}$$
$$\implies (x \in A \wedge ((x \in B \wedge x \in C) \vee (x \notin B \wedge x \notin C))) \tag{4}$$
$$\iff ((x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)) \vee (x \in A \wedge (x \notin Bx \notin C))) \tag{5}$$
$$\vee ((x \notin A \wedge (x \in B \wedge x \notin C)) \vee (x \notin A \wedge (x \notin B \wedge x \in C))) \tag{6}$$
$$\implies x \in A \cap B \cap C \vee x \in A \setminus (B \cup C) \tag{7}$$
$$\vee\, x \in B \setminus (A \cup C) \vee x \in C \setminus (A \cup B) \tag{8}$$
$$\iff x \in A \setminus (B \cup C) \vee x \in B \setminus (A \cup C) \tag{9}$$
$$\vee\, x \in A \cup B \cup C \vee x \in C \setminus (A \cup B) \tag{10}$$
$$\iff (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \tag{11}$$
$$\vee\, (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \tag{12}$$
$$\iff (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \tag{13}$$
$$\vee\, (((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)) \wedge x \in C) \tag{14}$$
$$\implies (x \in (A \triangle B) \wedge x \notin C) \vee (x \notin (A \triangle B) \wedge x \in C) \tag{15}$$
$$\implies (A \triangle B) \triangle C \tag{16}$$

Der Rückweg erfolgt analog.

$$\text{Daraus folgt: } A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C \quad \checkmark \tag{17}$$

Damit ist die Operation assoziativ.

„neutrales Element“:

$$\text{Sei } e = \varnothing \subseteq \mathfrak{P}(M) \tag{18}$$
$$\text{und } A \subseteq \mathfrak{P}(M) \tag{19}$$
$$\text{Dann gilt: } \forall A : A \triangle e = A \setminus \varnothing \cup e \setminus A \tag{20}$$
$$= A \cup \varnothing = A \tag{21}$$

Daher ist $e = \varnothing$ das neutrale Element.

„inverse Elemente“:

$$\begin{aligned} \text{Sei } A &\subseteq \mathfrak{P}(M) && (22)\\ \text{Dann gilt } \forall A : A^{-1} &= A && (23)\\ \text{Denn } A \triangle A^{-1} &= A \setminus A^{-1} \cup A^{-1} \setminus A && (24)\\ &= A \setminus A \cup A \setminus A && (25)\\ &= \varnothing \cup \varnothing && (26)\\ &= \varnothing = e && (27) \end{aligned}$$

Daher existiert für jedes $A \subseteq \mathfrak{P}(M)$ ein inverses Element.

$$\implies (\mathfrak{P}(M), \triangle) \text{ ist Gruppe.} \quad \checkmark \qquad (28)$$

„Kommutativität“:

$$\begin{aligned} \text{Seien } A, B &\subseteq \mathfrak{P}(M) && (29)\\ \text{Dann gilt: } \forall A, B : A \triangle B &\implies (x \in A \land x \notin B) \lor (x \notin A \land x \in B) && (30)\\ &\iff (x \notin B \land x \in A) \lor (x \in B \land x \notin A) && (31)\\ &\iff (x \in B \land x \notin A) \lor (x \notin B \land x \in A) && (32)\\ &\implies B \triangle A && (33) \end{aligned}$$

Rückrichtung analog.

$$\implies (\mathfrak{P}(M), \triangle) \text{ ist abelsch und Gruppe.} \quad \square \qquad (34)$$