Hausaufgabenserie 7

Adrian Schollmeyer

(G0) $*$ ist eine Operation auf G, falls $*$ Funktion und $*: G \times G \to G$

(G1) $\forall a, b, c \in G : a * (b * c) = (a * b) * c$

(G2) $\exists e \in G : \forall a \in G : e * a = a * e = a$ neutrales Element

(G3) $\forall a \in G : \exists b \in G : a * b = b * a = e$, wobei e das neutrale Element aus (G2) sei.

Aufgabe 1

(a)

Vorraussetzungen:

$$U, G \text{ Mengen} \tag{1}$$

$$U \subseteq G \tag{2}$$

$$(G, *), (U, *) \text{ Gruppen} \tag{3}$$

Behauptung:

$$e_U = e_G \text{ neutrales Element} \tag{4}$$

Beweis:

Da e_G in G eindeutig bestimmt ist (bewiesen in Vorlesung), muss $e_U = e_G$ sein, denn sonst gäbe es für alle $x \in U$ zwei verschiedenartige neutrale Elemente, da alle $\forall x \in U : x \in G$ und damit e_G als neutrales Element haben müssen. Daher muss gelten

$$e_U = e_G \quad \square \tag{5}$$

(b)

Vorraussetzungen:

$$U, G \text{ Mengen} \tag{6}$$
$$U \subseteq G \tag{7}$$
$$(G, *), (U, *) \text{ Gruppen} \tag{8}$$

Behauptung:

$$\forall a \in U : a_G^{-1} = a_U^{-1} \tag{9}$$

Beweis:
Da a^{-1} in G eindeutig bestimmt ist (bewiesen in Vorlesung), kann es kein weiteres inverses Element zu a geben, weshalb zwingend gilt

$$\forall a \in U : a_G^{-1} = a_U^{-1} \quad \square \tag{10}$$

Aufgabe 2

Vorraussetzungen:

$$G, U \text{ Mengen} \tag{1}$$
$$(G, *) \text{ Gruppe} \tag{2}$$
$$U \subseteq G \tag{3}$$

Behauptung:

$$(U, *) \text{ Gruppe} \iff \text{(U1) bis (U3) gelten} \tag{4}$$

Beweis:

„⇒“:

$$\text{z.z.:} \quad (U, *) \text{ Gruppe} \implies \text{(U1) bis (U3) gelten} \tag{5}$$
$$\text{(U1), (U3) gelten, Beweise siehe Aufgabe 1} \quad \checkmark \tag{6}$$
$$\text{Weil } * : U \times U \to U \text{ gilt (da } * \text{ Operation ist)} \tag{7}$$
$$\text{muss gelten } \forall a, b \in G : a, b \in U \implies a * b \in U \quad \checkmark \text{ ((U2) gilt)} \tag{8}$$
$$\implies \text{(U1) bis (U3) gelten} \tag{9}$$

„$\Leftarrow$“:

$$
\begin{aligned}
\text{z}: \quad \text{(U1) bis (U3) gelten} &\implies (U,*) \text{ Gruppe} && (10)\\
e_G \in U &\implies e_U = e_G \text{ ist neutrales Element } \checkmark && (11)\\
\text{Es gilt } \forall a \in G : a \in U &\implies a^{-1} \in U && (12)\\
\text{daher auch } \forall a \in U : \exists a^{-1} \in U : a * a^{-1} &= a^{-1} * a = e_G \quad \checkmark && (13)\\
\text{Da gilt } \forall a, b \in G : a, b \in U &\implies a * b \in U && (14)\\
\text{gilt auch: } * : U \times U &\to U \quad \checkmark && (15)
\end{aligned}
$$

Gilt (U2) und gilt (G0) (bewiesen, s. o.), so gilt $\forall a * (b * c) \in G$, denn $* : G \times G \to G$. Daher gilt (weil $(G, *)$ eine Gruppe ist) für diese Operation die Assoziativität $\forall a, b, c \in G$.
Da $\forall a, b, c \in U : a, b, c \in G$ und (U2) gelten, gilt diese Assoziativität auch für $(U, *)$. Das Ergebnis liegt aufgrund der Gültigkeit von (U2) nämlich in U, weshalb (G1) gültig ist.
Daraus folgt schlussendlich:

$$\text{(U1) bis (U3) gelten} \implies (U,*) \text{ Gruppe} \tag{16}$$

Also auch:

$$(U,*) \text{ Gruppe} \iff \text{(U1) bis (U3) gelten} \quad \square \tag{17}$$

Aufgabe 3

(a)

$(U_1, +)$ ist keine Untergruppe, denn (U3) ist nicht gegeben, da $U_1 = \mathbb{N}$ keine negativen Zahlen beinhaltet. Beispielsweise wäre für 3 das inverse Element $-a = -3$, jedoch $-3 \notin \mathbb{N}$, weshalb $(U_1, +)$ keine Untergruppe sein kann.

(b)

$U_2, +$ ist Untergruppe.
Beweis:

„(U1)“:

$$
\begin{aligned}
\text{z}: \quad e_{\mathbb{Z}} &= 0 \in U_2 && (1)\\
e_{\mathbb{Z}} &= 0 && (2)\\
0 &\in U_2 && (3)\\
\text{denn } 5 \cdot 0 &= 0 && (4)\\
\text{und } 0 &\in \mathbb{Z} && (5)\\
\text{daher gilt } e_{\mathbb{Z}} &\in U_2 \quad \checkmark && (6)
\end{aligned}
$$

„(U2)“:

$$\text{z.z.:}\quad \forall a, b \in \mathbb{Z} : a, b \in U_2 \implies a + b \in U_2 \tag{7}$$
$$\text{Seien } a = 5k_1 \in U_2 \tag{8}$$
$$\text{und } b = 5k_2 \in U_2 \tag{9}$$
$$\text{sowie } k_3 \in \mathbb{Z} \tag{10}$$
$$\text{dann gilt } k_1 + k_2 = k_3 \tag{11}$$
$$\implies 5k_1 + 5k_2 = 5k_3 \tag{12}$$
$$a + b = 5k_3 \tag{13}$$
$$\text{sowie } 5k_3 \in U_2 \tag{14}$$
$$\text{Daraus folgt: } \forall a, b \in \mathbb{Z} : a, b \in U_2 \implies a + b \in U_2 \quad \checkmark \tag{15}$$

„(U3)“:

$$\text{z.z.:}\quad \forall a \in \mathbb{Z} : a \in U \implies -a \in U \tag{16}$$
$$\text{Sei } a = 5k \text{ und } k \in \mathbb{Z} \tag{17}$$
$$\text{Dann gilt } -k = -1 \cdot k \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{18}$$
$$\implies -a = 5 \cdot -1 \cdot k = -5k \text{ inverses Element} \tag{19}$$
$$\text{denn } a + (-a) = 5k + (-5k) = 0 \tag{20}$$
$$\text{und } -a = -5k \in U_2 \tag{21}$$
$$\text{daher } \forall a \in \mathbb{Z} : a \in U \implies -a \in U \quad \checkmark \tag{22}$$

Damit sind alle Bedingungen erfüllt.

$$\implies U_2 \text{ Untergruppe von } \mathbb{Z} \quad \square \tag{23}$$

(c)

$(U_3, +)$ ist keine Untergruppe, da 0 das neutrale Element $e_{\mathbb{Z}}$ ist, jedoch $0 \notin U_3$, weshalb (U1) nicht gilt.

(d)

$(U_4, +)$ ist keine Untergruppe, da beispielweise

$$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

keine Quadratzahl ist, womit (U2) nicht gilt.