Hausaufgabenserie 9

Adrian Schollmeyer

Aufgabe 1

(a)

$$
\begin{aligned}
938 &= 5 \cdot 161 + 133 \\
161 &= 1 \cdot 133 + 28 \\
133 &= 4 \cdot 28 + 21 \\
28 &= 1 \cdot 21 + 7 \\
21 &= 3 \cdot 7 + 0 \\
\implies \operatorname{ggT}(938, 161) &= 7
\end{aligned}
$$

Die ganzzahlige Linearkombination dazu ist:

$$
\begin{aligned}
7 &= 28 - (1 \cdot 21) \\
&= 28 - (1 \cdot (133 - 4 \cdot 28)) \\
&= 161 - 1 \cdot 133 - (1 \cdot (133 - 4 \cdot (161 - 1 \cdot 133))) \\
&= 161 - 1 \cdot (938 - 5 \cdot 161) - (1 \cdot ((938 - 5 \cdot 161) - 4 \cdot (161 - 1 \cdot (938 - 4 \cdot 161)))) \\
&= 6 \cdot 161 - 1 \cdot 938 - ((938 - 5 \cdot 161) - 4 \cdot (161 - 938 + 5 \cdot 161)) \\
&= 6 \cdot 161 - 1 \cdot 938 - (938 - 5 \cdot 161 - 4 \cdot 161 + 4 \cdot 938 - 20 \cdot 161) \\
&= 6 \cdot 161 - 1 \cdot 938 - 938 + 5 \cdot 161 + 4 \cdot 161 - 4 \cdot 938 + 20 \cdot 161 \\
7 &= -6 \cdot 938 + 35 \cdot 161
\end{aligned}
$$

(b)

Aufgabe 2

$$
\begin{aligned}
83 &= 3 \cdot 23 + 14 \\
23 &= 1 \cdot 14 + 9 \\
14 &= 1 \cdot 9 + 5 \\
9 &= 1 \cdot 5 + 4 \\
5 &= 1 \cdot 4 + 1 \\
4 &= 4 \cdot 1 + 0 \\
\implies \operatorname{ggT}(83, 23) &= 1 \\
x \cdot \overline{23} &\equiv 1 \mod 83 \\
\iff x \cdot 23 - 1 &= k \cdot 83 \\
1 &= x \cdot 23 - k \cdot 83 \\
&= 5 - 1 \cdot 4 \\
&= (14 - 1 \cdot 9) - (9 - (14 - 1 \cdot 9)) \\
&= ((83 - 3 \cdot 23) - (23 - (83 - 3 \cdot 23))) \\
&- ((23 - (83 - 3 \cdot 23)) - ((83 - 3 \cdot 23) - (23 - (83 - 3 \cdot 23)))) \\
&= (83 - 3 \cdot 23 - 23 + (83 - 3 \cdot 23)) \\
&- (23 - (83 - 3 \cdot 23) - (83 - 3 \cdot 23 - (23 - (83 - 3 \cdot 23)))) \\
&= 83 - 3 \cdot 23 - 23 + 83 - 3 \cdot 23 - 23 + 83 - 3 \cdot 23 + (83 - 3 \cdot 23 - (23 - (83 - 3 \cdot 23))) \\
&= 83 - 3 \cdot 23 - 23 + 83 - 3 \cdot 23 - 23 + 83 - 3 \cdot 23 + 83 - 3 \cdot 23 - 23 + 83 - 3 \cdot 23 \\
&= 5 \cdot 83 - 18 \cdot 23 \\
\implies \overline{23}^{-1} &= \overline{15} \text{ in } \mathbb{Z}_{83}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Sei $(G, *)$ eine endliche Gruppe.
Dann gilt $\forall a \in G : \exists n \in \mathbb{N} : a^n = e_G$.

Beweis. Sei zunächst $a = e_G$, so gilt aufgrund der Definition des neutralen Elementes

$$\forall n \in \mathbb{N} : a^n = e_G$$

Sei $a \neq e_G$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\forall a \in G : \exists k \in \mathbb{N}_{>1} : a^k &= a^{k+1} * a^{-1} \\
&= a^k * e_G \\
\implies \forall a \in G : \exists k \in \mathbb{N}_{>1} : a^k &= a \\
\implies \forall a \in G : \exists k \in \mathbb{N}_{>1} : a^{k-1} &= e_G
\end{aligned}$$

Da die Gruppe endlich ist, existiert ein solches $k > 1$, womit $n = k - 1$ auch existiert und ≥ 1 ist. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$