Hausaufgabenserie 10

Adrian Schollmeyer

Aufgabe 1

Es sei T_{60} die Menge der Teiler von 60. Ferner soll gelten $\forall a \in T_{60} : \overline{a} = \frac{60}{a}$.

Es gilt zu prüfen, welche Eigenschaften einer Booleschen Algebra von $(T_{60}, \mathrm{kgV}, \mathrm{ggT}, -)$ erfüllt werden.

- Kommutativität von ggT und kgV:

$$
\begin{align}
\text{zz:} \quad \forall a, b \in T_{60} : \mathrm{ggT}(a, b) &= \mathrm{ggT}(b, a) \tag{1}\\
\forall a, b \in T_{60}\, \exists s, t \in \mathbb{Z} : \mathrm{ggT}(a, b) &= s \cdot a + t \cdot b \tag{2}\\
&= t \cdot b + s \cdot a \tag{3}\\
&= \mathrm{ggT}(b, a) \quad \checkmark \tag{4}\\
\text{zz:} \quad \forall a, b \in T_{60} : \mathrm{kgV}(a, b) &= \mathrm{kgV}(b, a) \tag{5}\\
\forall a, b \in T_{60} : \mathrm{kgV}(a, b) &= \frac{a \cdot b}{\mathrm{ggT}(a, b)} \tag{6}\\
&= \frac{b \cdot a}{\mathrm{ggT}(b, a)} \tag{7}\\
&= \mathrm{kgV}(b, a) \quad \checkmark \tag{8}
\end{align}
$$

- Abgeschlossenheit der Operationen ggT, kgV, $-$:

$$
\begin{align}
\text{zz:} \quad \forall x, y \in T_{60} : \mathrm{ggT}(x, y) \in T_{60} \tag{9}\\
\text{Da } \forall x, y \in T_{60}\, \exists k, l \in \mathbb{N} : \mathrm{ggT}(x, y) \cdot k = x \tag{10}\\
\text{und } x \cdot l = 60, \text{ da } x \in T_{60} \tag{11}\\
\implies \forall x, y \in T_{60}\, \exists k, l \in \mathbb{N} : x \cdot l = (\mathrm{ggT}(x, y) \cdot k) \cdot l \tag{12}\\
= 60 \tag{13}\\
\implies \forall x, y \in T_{60}\, \exists m \in \mathbb{N} : \mathrm{ggT}(x, y) \cdot m = 60 \tag{14}\\
\text{mit } m = k \cdot l \tag{15}\\
\tag{16}
\end{align}
$$

Daher gilt $\forall x, y \in T_{60} : \mathrm{ggT}(x, y) \in T_{60}$, womit die Operation ggT abgeschlossen ist. $\checkmark$

$$
\text{zz:} \quad \forall x, y \in T_{60} : \mathrm{kgV}(x, y) \in T_{60} \tag{17}
$$

Für alle $x, y \in T_{60}$, ist auch $x \cdot y \in T_{60}$. Weiterhin ist $\mathrm{kgV}(x, y)$ ein Teiler von $x \cdot y$, denn $x \cdot y = \mathrm{kgV}(x, y) \cdot \mathrm{ggT}(x, y)$, womit auch $\mathrm{kgV}(x, y) \mid 60$ und damit $\mathrm{kgV}(x, y) \in T_{60}$. $\checkmark$

Aus $\forall a \in T_{60} : a \cdot \overline{a} = 60$ folgt unmittelbar, dass $-$ auch abgeschlossen ist. $\checkmark$

Damit sind alle Operationen und Abbildungen abgeschlossen.

- Existenz neutraler Elemente $\perp$ und $\top$:

$$\text{z.z.: } \exists \perp \in T_{60}\, \forall a \in T_{60} : \text{kgV}\,(a, \perp) = a \tag{18}$$
$$\forall a \in T_{60} : \text{kgV}\,(a, 1) = a \tag{19}$$
$$\implies \perp = 1 \quad \checkmark \tag{20}$$
$$\text{z.z.: } \exists \top \in T_{60}\, \forall a \in T_{60} : \text{ggT}\,(a, \top) = a \tag{21}$$
$$\forall a \in T_{60} : \text{ggT}\,(a, 60) = a \tag{22}$$
$$\implies \top = 60 \quad \checkmark \tag{23}$$

Damit existieren beide neutralen Elemente.

- z.z.: $\forall a \in T_{60} : \text{kgV}\,(a, \overline{a}) = \top = 60$ sowie $\forall a \in T_{60} : \text{kgV}\,(a, \overline{a}) = \text{ggT}\,(a, \overline{a}) = \perp = 1$.

Vermutung: Falsch.

Gegenbeispiel: $a = 2$

$$\text{kgV}\left(2, \overline{2}\right) = \text{kgV}\,(2, 30) \tag{24}$$
$$= 30 \neq \top \quad \lightning \tag{25}$$
$$\text{ggT}\,(2, 30) = 2 \neq \perp \quad \lightning \tag{26}$$

Somit sind diese Vorraussetzungen nicht erfüllt.

Aufgabe 2

(a)

Zunächst gebe die Zufallsvariable X die Anzahl ungerader gezogener Zahlen an. Dann gilt:

$$X \sim B\left(6, \frac{25}{49}\right) \tag{27}$$

Somit ergibt sich für $p(E)$:

$$p\,(E) = p\,(X = 6) \tag{28}$$
$$= \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{25}{49}\right)^6 \cdot 1 \tag{29}$$
$$= \left(\frac{25}{49}\right)^6 \tag{30}$$
$$\approx 0,01764 \tag{31}$$

(b)

Man nehme zunächst eine Zufallsvariable Y, die die Anzahl „Richtiger“ angibt. Die Wahrscheinlichkeiten $p(Y = k)$ für $k = 1, 2, \ldots 6$ ergeben sich mit der Formel:

$$p\,(Y = k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}} \tag{32}$$

$$p\,(Y = 6) \approx 0,000000071511 \tag{33}$$

$$p\,(Y = 5) \approx 0,0000184499 \tag{34}$$

$$p\,(Y = 4) \approx 0,00096861 \tag{35}$$

$$p\,(Y = 3) \approx 0,0176504 \tag{36}$$

$$p\,(Y = 2) \approx 0,132378 \tag{37}$$

$$p\,(Y = 1) \approx 0,4130195 \tag{38}$$

Für die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich:

$$p\,(E) = p\,(Y \geq 1) \tag{39}$$

$$= \sum_{k=1}^{6} p\,(Y = k) \tag{40}$$

$$\approx 0,564035 \tag{41}$$

(c)

Hierfür kann die Zufallsvariable Y aus Teilaufgabe (b) benutzt werden. Für die Wahrscheinlichkeit ergibt sich hier:

$$p\,(E) = p\,(Y \geq 5) \tag{42}$$

$$= p\,(Y = 5) + p\,(Y = 6) \tag{43}$$

$$\approx 1,8521 \cdot 10^{-5} \tag{44}$$

Aufgabe 3

Es seien die Ereignisse:

- A — Das Bauteil ist aus Unternehmen 1
- B — Das Bauteil ist aus Unternehmen 2
- C — Das Bauteil funktioniert für mindestens 2000 Betriebsstunden

Weiterhin sind folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$p\,(A) = 0,6 \qquad p\,(C \mid A) = 0,8 \tag{45}$$
$$p\,(B) = 0,4 \qquad p\,(C \mid B) = 0,7 \tag{46}$$

(a)

Mithilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich:

$$p\,(C) = p\,(C \mid A) \cdot p\,(A) + p\,(C \mid B) \cdot p\,(B) \tag{47}$$
$$= 0,8 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 \tag{48}$$
$$= 0,76 \tag{49}$$

Das Bauteil fällt also mit einer Wahrscheinlichkeit von 76% nicht innerhalb von 2000 Betriebsstunden aus.

(b)

Mithilfe des Satzes von Bayes ergibt sich:

$$p\left(B \mid \overline{C}\right) = \frac{p\left(\overline{C} \mid B\right) \cdot p\,(B)}{p\left(\overline{C}\right)} \tag{50}$$
$$= \frac{(1 - 0,7) \cdot 0,4}{1 - 0,76} \tag{51}$$
$$= 0,5 \tag{52}$$

Das Bauteil stammt also mit 50%iger Wahrscheinlichkeit aus Unternehmen 2.