VL: Yury Person

UE: Alexander Allin

Mengen

Def (Cantor 1895)(naive Def., aber für unsere Zwecke ausreichend)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte, die die Elemente der Menge genannt werden.

Bemerkungen:

1. Bei Mengen kommt es nicht auf die Reihenfolge der Objekte an
2. Eine Menge ist eindeutig durch ihre Elemente bestimmt
3. Dieselben Elemente können in einer Menge nicht mehrfach vorkommen

Notation: Für zwei Mengen A und B schreiben wir $A = B$, falls A und B dieselben Elemente haben.

Konvention: Oft benutzt man Großbuchstaben für Mengen und kleine Buchstaben für Elemente.

Buchstaben können aus verschiedenen Alphabeten kommen

1. Lateinisches A.
2. Griechisches A. $\varepsilon, \gamma, \alpha, \beta ...$
3. Hebräisches A.

Definition:

Ist x ein Element der Menge M, so schreiben wir: (irgendein Objekt z.B.:1,2,3,...)

$$x \in M$$

"x ist ein Element von M"

Ist x kein Element von M, so schreiben wir

$$x \notin M$$

"x ist kein Element von M", "x ist in M nicht enthalten"

Definition:

Sind A und B Mengen, so schreiben wir

$$A \subseteq B$$

wenn A eine Teilmenge von B ist, also wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist.

Bemerkung: Gilt $A = B$, so gilt auch

1. $A \subseteq B$
2. $B \subseteq A$

Definition/Bemerkung: Gilt $A \subseteq B$ und $A \neq B$, dann schreibt man auch:

$$A \subsetneq B$$

"A ist eine echte Teilmenge von B"

Andere Schreibweise für $A \subsetneq B$:

$$A \quad B$$

Definition:

Die (eindeutig bestimmte) Menge, die keine Elemente enthält, heißt die leere Menge. Die wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ notiert.

Notation/Beschreibungen der Mengen:

Mengen kann man beschreiben, indem man ihre Elemente in geschweiften Klammern angibt.

Beispiele:

$\{2, 3, 5\}$ ist die Menge, die aus $2, 3$ und 5 besteht.

$\{3, 5, 2\}$ beschreibt dieselbe Menge.

$\{2, 3, 3, 5\} = \{3, 5, 2\} = \{2, 3, 5\}$

Spezielle Mengen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ natürliche Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ natürliche Zahlen und 0

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ ganze Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ rationale Zahlen

$\mathbb{R} = \{\text{reelle Zahlen}\}$ "$a_1 a_2 ... a_n, b_1 b_2 ...$" Dezimaldarstellung a_i, b_j: bezeichnen Ziffern aus $\{0, 1, ..., 9\}$

<u>Beispiele:</u>

1. $\{n : n \in \mathbb{N} \text{ und } 2 \text{ teilt } n\}$ gerade und nat. Zahlen
2. $\{n : n \in \mathbb{N} \text{ und } 3 < n < 7\} = \{4, 5, 6\}$

<u>Frage:</u> Gibt es eine Menge, die sich selbst enthält?

$\{M : M \text{ ist eine Menge}\}$

$\{M : M \notin M\} =: A$

Bertrand Russel

<u>Frage:</u>

1. $A \in A$?
2. $A \notin A$?

1. wäre $A \in A$, so müsste $A \notin A$ sein $\lightning$
2. $A \notin A$, müsste $A \in A$ $\lightning$

---

1. A Menge $\{a_1, ...\}$
2. $A = B$ wenn A und B aus denselben Elementen bestehen
3. $A \neq B$ wenn nicht gilt ...
4. $A \subseteq B$ A Teilmenge von B
5. $A \subsetneq B$ A echte Teilmenge von B
6. $a \in A$
7. $a \notin A$

Elementare Logik/Aussagenlogik

Def.

Eine Aussage ist ein Satz, von dem man im Prinzip eindeutig feststellen kann, ob er wahr oder falsch ist. Ob eine Aussage wahr oder falsch ist, ist der Wahrheitswert der Aussage. Der Wahrheitswert "wahr" wird oft mit "w" oder "1" abgekürzt, der Wahrheitswert "falsch" mit "f" oder "0".

Beispiele:

1. "Die Straße ist nass" w
2. "$2 + 3 = 5$" w
3. "$2 + 5 < 7$" f
4. "Guten Tag!" keine Aussage
5. "$x^2 = 5$" keine Aussage

Aussagen können logisch miteinander verknüpft werden, und zwar mit:

"und", "oder", "nicht",...

Definition (logische Verknüpfungen = Junktoren)

Ist a eine Aussage, so ist die Negation von a die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn a falsch ist. Die Negation von a wird $\neg a$ geschrieben und "nicht a" gelesen.

Def.

Sind a und b Aussagen, so ist die Konjunktion von a und b die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn sowohl a als auch b wahr ist. Die Konjunktion von a und b wird $a \wedge b$ geschrieben und "a und b" gelesen.

Die Disjunktion von a und b ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn mindestens eine der Aussagen a oder b wahr ist. Die Disjunktion wird $a \vee b$ geschrieben und "a oder b" gelesen.

$\boxed{\text{Junktor: } \neg, \wedge, \vee}$

Beispiele:

1. $\neg(2 + 5 < 7)$ w
2. $(2 + 5 < 7) \wedge (2 + 3 = 5)$ f
3. $(2 + 5 < 7) \vee (2 + 3 = 5)$ w
4. $(\neg(2 + 5 < 7)) \vee (2 + 3 = 5)$ w

<u>Wahrheitstafeln:</u> beschreiben die Wahrheitswerte der gebildeten Aussage aus den Ausgangsaussagen.

a	$\neg a$
0	1
1	0

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1