$$\varphi(n) := |\{d \in [n] : ggT(d,n) = 1\}|$$

Eulersche φ-Funktion

$\varphi(1) = 1,\ \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = 2,\ \varphi(4) = 2,\ ...$

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n \quad \boxed{d \in \mathbb{N},\ d|n}$$

die Summe über alle natürlichen Teiler d von n.

Satz:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dannn gilt:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

Beweis: (”Bijektionsbeweis”)

	1	2	3	4	...	f	...	n
1	1	0	0	0	...	...	...	0
$\vdots$						$\vdots$		
d	...	...	...	...	...	$\vdots$		
$\vdots$								
n	1							0

Der Eintrag in der Zelle (d, f) ist genau dann 1, wenn

$$f \leq d,\ ggT(f, d) = 1$$

SONST: steht $\emptyset$

Beobachtung:

In der Zeile d stehen genau $\varphi(d)$ Einsen.

Bijektion:

Wir werden zeigen, dass in der gesamten Tabelle genau n Einsen stehen.

(Daraus folgt: $\sum_{d|n} \varphi(d) =$ Anzahl der Einsen in der gesamten Tabelle $= n$)

Wir geben dafür eine Bijektion φ zwischen den 1-Einträgen in der Tabelle und der Menge $[n] = \{1, ..., n\}$ an.

Erinnerung:

Ist $\psi : A \to B$ eine Bijektion und $|A| < \infty$, dann gilt: $|A| = |B|$

$$\psi : \begin{cases} A \to [n] \\ (d, f) \mapsto \frac{n}{d} \cdot f \end{cases}$$

$A = \{(d, f) :$ Eintrag an der Stelle (d, f) ist $1\}$

$\psi(d, f) = \frac{n}{d} \cdot f \quad \begin{array}{l} \in \mathbb{N} \text{ weil } d|n \\ \in [n] \text{ weil } f \leq d \end{array}$

$\psi(d, f) \in [n]$

Zeige, dass φ bijektiv ist.

ψ injektiv: (Aus $\psi(d, f) = \psi(d', f')$ folgt: $d = d',\ f = f'$)

$$\frac{n}{d} f = \frac{n}{d'} f' \Leftrightarrow f \cdot d' = f' \cdot d$$

Weil $ggT(f, d) = 1$, folgt: $f|f'$

Auch gilt wegen $ggT(f', d') = 1 : f'|f$

$\Rightarrow f = f' \Rightarrow d = d'$. d.h. φ injektiv.

ψ surjektiv: (Finde zu jedem $m \in [n]$ ein (d, f) mit $\varphi(d, f) = m$.)

$\boxed{g := ggT(m, n)}$ $\boxed{m \leq n}$

$d := \frac{n}{g} \quad f := \frac{m}{g}$

$ggT(d, f) = 1,\ f \leq d$

$$\text{Dann gilt: } \psi(d, f) = \frac{n}{d} \cdot f = \frac{n}{\left(\frac{n}{g}\right)} \cdot \frac{m}{g} = m \quad \square$$

Da ψ bijektiv: $|A| = n$

$$\sum_{d|n} \varphi(d)$$

$A,\ B$ seien Mengen.

$|A| = n,\ |B| = m \quad n, m \in \mathbb{N}$

Fragen:

Wie viele Abbildungen f zwischen A und B gibt es?

Wie viele Injektionen zwischen A und B gibt es?

Wie viele Surjektionen zwischen A & B?

Bijektionen?

Anzahl von Abbildungen φ von $A \to B$

$$\varphi : \begin{cases} A \to B \\ a \mapsto \varphi(a) \end{cases}$$

$|A| = n \quad A = [n]$

$|B| = m \quad B = [m]$

D.h. wir können φ durch ein n-Tupel $(b_1, ..., b_n)$ mit $b_i \in [m]$ beschreiben (vollständig)

D.h. Die Anzahl der verschiedenen Abb. $\varphi : A \to B$ = Anzahl von verschiedenen n-Tupeln mit Einträgen aus $[m]$.

"Produktregel": n-Tupel $\in [m]^n$

$$|[m]^n| = m^n$$

$\varphi : [n] \to [m] \quad \varphi$ injektiv.

Wir können φ auch als ein n-Tupel beschreiben: $(\varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(n))$ aber alle $\varphi(i)$ müssen verschieden sein.

Wir bestimmen deren Anzahl (von Tupeln) indem wir jeden Eintrag nacheinander festlegen:

1. Eintrag $(\varphi(1))$: Es gibt m Möglichkeiten
2. Eintrag $(\varphi(2))$: gibt es $m-1$ Möglichkeiten $(\varphi(1) \neq \varphi(2))$
3. Eintrag $(\varphi(3))$: es gibt $m-2$ Möglichkeiten $(\varphi(3) \neq \varphi(1), \varphi(2))$

   $\vdots$

k. Eintrag: $(\varphi(k))$: $m - k + 1$ Möglichkeiten $= m - (k-1)$

   $\vdots$

n. Eintrag: $m - (n-1)$ Möglichkeiten $= m - n + 1$

Produkt aller 'Möglichkeiten' ist gleich

= Anzahl von Injektionen $[n] \to [m]$

$= \boxed{m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot (m-n+1)}$

$$m^{\underline{n}} := \prod_{i=0}^{n-1} (m-i) = m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot (m-n+1)$$

fallende Faktorielle $m^{\underline{n}}$

$m = n$

$$n^{\underline{n}} = \prod_{i=1}^{n} i =: n!$$

"n-Fakultät"

Bemerkungen

1) $m < n: \; m^{\underline{n}} = 0$

$$\varphi : [n] \to [m]$$

kann in diesem Fall keine Injektion sein (es gibt keine!)

2) $m = n$: (Aufgabenblatt 3) Jede Injektion $\varphi : [n] \to [n]$ ist bijektiv.

D.h. $n!$ = Anzahl der Bijektionen $[n] \to [n]$
= Anzahl der Permutationen von $[n]$

Erinnerung:

Eine Bijektion $\varphi : A \to A$ heißt Permutation (von A)

Schubfachprinzip = Taubenschlagprinzip = Prinzip von Dirichlet

Fliegen $n+1$ Tauben in n Löcher, so gibt es ein Loch mit mindestens 2 Tauben.

Verteilt man m Briefe $(m > n)$ auf n Postfächer, so landen mindestens zwei Briefe in einem der Postfächer.

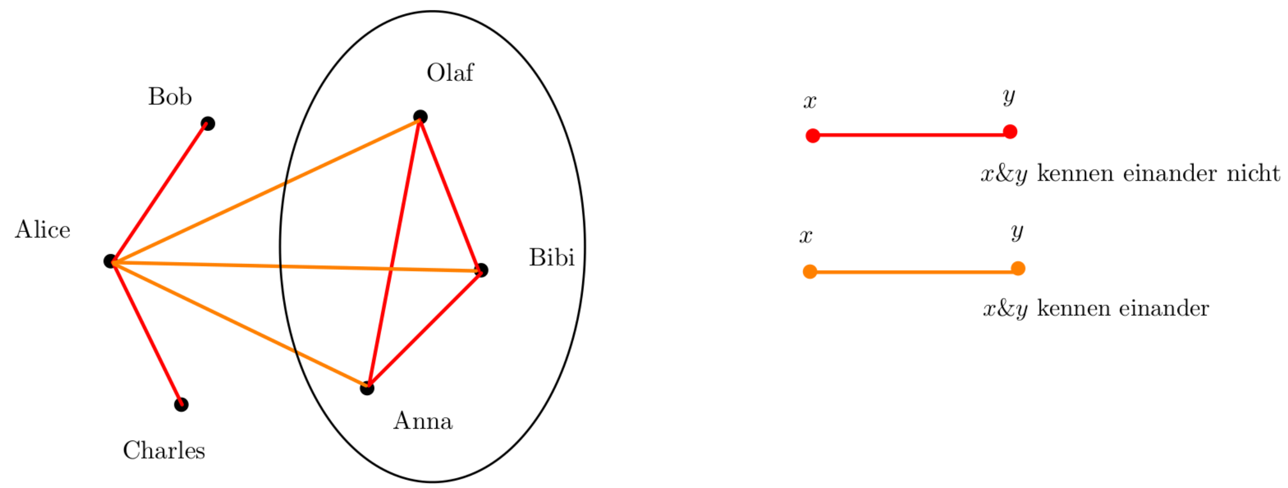
Jede Abbildung $\varphi : [m] \to [n] \quad (m > n)$ existieren $i \neq j \in [m]$ mit $\varphi(i) = \varphi(j)$, d.h. φ ist nicht injektiv.

Beispiel:

Unter 13 Menschen gibt es mindestens 2, die ihren Geburtstag im selben Monat haben.

Beispiel (Partysatz)

Auf einer Party mit mindestens 6 Personen, gibt es mindestens drei, die einander kennen, oder mindestens drei, die einander nicht kennen. (Disclaimer: kennen = beidseitig)



$$\binom{X}{k} := \{S : S \leq X,\ |S| = r\}$$

X eine Menge

$r \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{r} := \left|\binom{[n]}{r}\right| = \text{ Anzahl aller } r\text{-elementigen Teilmengen von } [n]$$

<u>Satz:</u>

Seien $n, r \in \mathbb{R}_0$. Dann gilt:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1},$$

$((n, r) \neq (0, 0))$

wobei

$$\binom{0}{0} := 1, \quad \binom{n}{r} := 0, \text{ falls } r < 0$$

<u>Bemerkung:</u> $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} = 11 = |\{\emptyset\}|$$

$$n < r : \quad \binom{n}{r} = 0$$

<u>Beweis:</u> $n \geq r \geq 1$ $\boxed{n \in T \Leftrightarrow T \ni n}$

$$\binom{[n]}{r} = \binom{[n-1]}{r} \dot{\bigcup} \{T : T \ni n,\ |T| = r,\ T \leq [n]\}$$

"$\leq$" Jede r-elem. Teilmenge $T \in \binom{[n]}{r}$ entweder enthält n nicht $\left(T \in \binom{[n-1]}{rr}\right)$ oder T enthält n. $(T \ni n,\ |T| = r,\ T \leq [n])$

"$\geq$" ✓

$$\left|\binom{[n]}{r}\right| = \binom{n}{r}$$

$$\left|\binom{[n-1]}{r}\right| = \binom{n-1}{r}$$

$$\Big\{T : T \ni n,\ |T| = r,\ T \geq [n]\}| = \left|\binom{[n-1]}{r-1}\right|$$

denn:

$$\Psi : \begin{cases} \{T : T \ni n,\ |T| = r,\ T \leq [n]\} \to \binom{[n-1]}{r-1} \\ T \mapsto T \quad \{n\} \end{cases} \qquad \boxed{\text{bijektiv}}$$

Also (mit Summenregel):

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad \square$$

$$\text{Fall } r = 0 : \binom{n}{0} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{-1}$$

<u>Satz:</u>

Seien $n \geq r \geq 0,\ n, r \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n^{\underline{r}}}{r!}$$

(<u>Erinnerung:</u> $0! := 1$)

<u>Bemerkung:</u>

1)

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+x)}^{n^{\underline{r}}} \cdot \overbrace{(n-r) \cdot \ldots \cdot 1}^{(n-r)!}}{(n-r)!r!}$$

2)

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \left[\varphi : \begin{cases} \binom{[n]}{r} \to \binom{[n]}{n-r} \\ A \mapsto [n] \quad A (= A^C) \end{cases} \right. \quad \text{Bijektion}$$

<u>Beweis:</u>

1. per Induktion nach n.
2. <u>Abzählen</u>

   <u>Anzahl der Injektionen von $[r]$ nach $[n]$:</u>

   $\binom{n}{r}$ = Anzahl der Möglichkeiten die r Bilder für eine Injektion zu wählen

   $r!$ = Anzahl der Möglichkeiten, r Elemente aus $[r]$ den r Bildern zuzuweisen (bijektiv)

$$\binom{n}{r} \cdot r! = n^{\underline{r}}$$