X Menge $\quad |X| = n \in \mathbb{N} \quad k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{X}{k} = \{S : \ S \subseteq X, \ |S| = k\}$$

$$\binom{n}{k} := \left|\binom{X}{k}\right| = \left|\binom{[n]}{k}\right|$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \binom{n}{n-k}$$

$$n^{\underline{k}} := \prod_{\varepsilon=0}^{k-1}(n-i) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}_{k \text{ Terme}} \quad \text{fallende Faktorielle}$$

$$n^{\underline{k}} = n! = \prod_{i=1}^{n} n = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1 \quad \text{"}n\text{-Fakultät"}$$

Bijektionsbeweis für

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\left|\binom{[n]}{k}\right| = \left|\binom{[n]}{n-k}\right|$$

Beispiel: $\quad n = 3, \ k = 1 :$

$$\binom{3}{1} \quad = \quad \binom{3}{2}$$

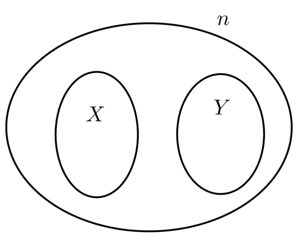
$$\begin{array}{ccccc} \binom{[3]}{1} & = & \{\{1\}, & \{2\}, & \{3\}\} \\ & & | & | & | \\ \binom{[3]}{2} & = & \{\{2,3\}, & \{1,3\}, & \{1,2\}\} \end{array}$$

Bijektion:

$$f : \begin{cases} \binom{[n]}{k} \to \binom{[n]}{n-k} \\ X \mapsto X^c \, (:= [n] \ \ X) \end{cases}$$

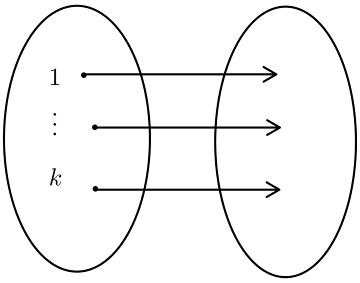
injektiv, weil $\overset{f(x)}{X^c} = Y^c \Leftrightarrow X = Y$

surjektiv: $(X^c)^c = X \qquad f(1)$



$n^{\underline{k}}$ = Anzahl der injektiven Abbildungen von einer Menge mit k-Elementen in eine Menge mit n Elementen

$$= |\{f | f : [k] \to [n]\} \qquad f \text{ injektiv}$$



Sprechweise: k-Menge:= eine k-elementige Menge

Spezialfall: $k = n$

$n^{\underline{k}} = n! =$ Anzahl der $\boxed{\text{bijektiven}}$ injektiven Abbildungen von $[n]$ nach $[n]$.

$f : [k] \to [n]$ Injektion

$f([k]) := \{f(i) : i \in [k]\}$

$|f([k])| = k$ weil f injektiv

D.h.

$$h : \begin{cases} [k] \to f([k]) \\ i \mapsto f(i) \end{cases}$$

h tut dasselbe wie f, hat aber einen anderen Wertebereich: $f([k])'$ (falls $k < n$)

h ist bijektiv.

D.h. um eine injektive Abbildung $f : [k] \to [n]$ zu konstruieren, gehen wir wie folgt vor:

1) wir wählen das Bild für f, d.h. wir wählen eine k-Menge S für $f([k])$ $\left(\text{dafür gibt es } \binom{n}{k} \text{ Möglichkeiten}\right)$

2) wir müssen eine Bijektion zwischen $[k]$ und $S(= f([k]))$ festlegen (dafür gibt es k' Möglichkeiten). Jede Menge S aus 1) und jede Bijektion: $[k] \to S$ aus 2) bestimmen eine Injektion $f : [k] \to [n]$ eindeutig.

D.h. Anzahl der Inj. $[k] \to [n] = \boxed{\binom{n}{k} \cdot k!}$

Andererseits: wir wissen:

Die Anzahl der Inj. $[k] \to [n] = \boxed{n^{\underline{k}}}$

Binomischer Lehrsatz:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

Es gilt: für $n \in \mathbb{N}_0$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

kombinatorische Interpretation:

Um den Koeffizienten vor $a^k \cdot b^{n-k}$ zu bestimmen:

Wir haben $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten a aus n Termen k-oft auszuwählen (und somit $(n-k)$-oft b aus den restlichen Termen auszuwählen)

$$(a+b)^3 = \overset{\text{1. Term}}{(a+b)} \cdot \overset{\text{2. Term}}{(a+b)} \cdot \overset{\text{3. Term}}{(a+b)}$$

$$\binom{3}{1} a \cdot b^2$$

$\rightarrow$ kann auch mit vollst. Induktion gezeigt werden:

dort nutzt man die Identität

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{aus}$$

Beweis: (Induktion nach n)

$$n = 0: \quad (a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{0} a^k \cdot b^k$$

$$\left[r^0 = 1 \text{ für } r \in \mathbb{R}, \ \binom{0}{0} = 1 \right]$$

Ind. Schritt: $n \rightarrow n+1$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n$$

$$\overset{\text{Induktionsvoraussetzung}}{=} (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{k+1} \cdot \underbrace{b^{n-k}}_{b^{(n+1)-(k+1)}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n+1-k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} \cdot b^{(n+1)-(k+1)}}_{\text{Indexverschiebung: ersetzten } n \text{ durch } k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n+1-k}$$

$\rightarrow$ wir erweitern die Summe um den Summanden $\binom{n}{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot b^0 = 0$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k \cdot b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k \cdot b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$\left(\binom{n}{-1} \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} = 0 \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \cdot a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} \quad \square$$

$a = b = 1$

$$\boxed{2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} \quad \text{folgt aus BL}$$

<u>kombinatorischer Beweis:</u>

$$2^n = |P([n])| = |2^{[n]}|$$

$$P([n]) = \dot{\bigcup_{k=0}^{n}} \binom{[n]}{k}$$

<u>Summenregel:</u>

$$|P([n])| = \sum_{k=0}^{n} \left| \binom{[n]}{k} \right|$$

$a = -1, \ b = 1$

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k$$

<u>D.h.</u>

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + ... \pm \binom{n}{n}$$

<u>wenn k gerade:</u> $\binom{n}{k}$

k ungerade: $-\binom{n}{k}$

$$\sum_{\substack{k=0\\k \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{k} = \text{Anzahl von Teilmengen von } [n] \text{ mit gerader Kardinalität}$$

$$\sum_{\substack{k=0\\k \text{ ungerade}}}^{n} \binom{n}{k} = \text{Anzahl von Teilmengen von } [n] \text{ mit ungerader Kardinalität}$$

d.h.

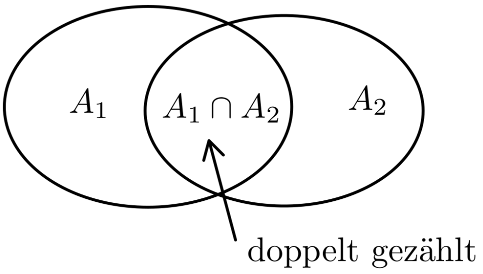
$$\sum_{\substack{k=0\\k \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0\\k \text{ ungerade}}}^{n} \binom{n}{k} = 0$$

<u>Siebformel</u> (Prinzip von Inklusion - Exklusion)

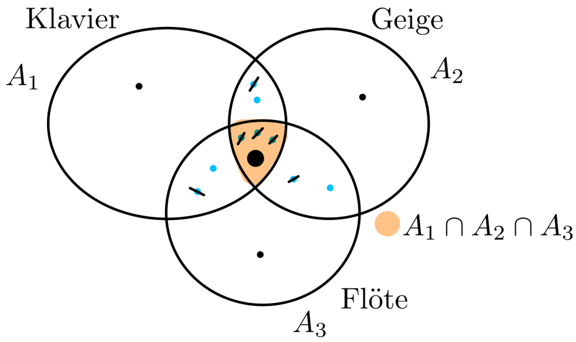
$A_1, A_2, ..., A_n$ endliche

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = ?$$

<u>$n = 2$:</u> $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$



<u>$n = 3$:</u> $A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$



Beispiel:

1. Jahr: 73 Studierende

52	spielen	Klavier
25		Geige
20		Flöte
17		Klavier&Geige
12		Klavier&Flöte
7		Geige&Flöte
1		Geige&Flöte&Klavier

Frage: wie viele Studierende spielen keins der drei Instrumente?

$(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ = Anzahl von Studierenden, die mindestens eins der drei Musikinstrumente spielen.

=52+25+20	+97
-17-12-7	-36
+1	+1
= $\boxed{62}$	

73-62=11 spielen keins der drei Instrumente

Siebformel:

Seien $A_1, ..., A_n$ endliche Mengen.

Dann gilt:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \cdot \left|\bigcap_{k \in J} A_k\right|$$

$\rightarrow$ Summe wird über alle nicht leeren Teilmengen J von $[n]$ gebildet

$$= \underbrace{|A_1| + ... + |A_n|}_{J \in \{\{1\},\{2\},...\{n\}\} = \binom{[n]}{1}} - \underbrace{|A_1 \cap A_2| - ... - |A_{n-1} \cap A_n|}_{J \in \binom{[n]}{2}} + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + ...$$

$$+ |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \sum_{J \in \binom{[n]}{s}} \left| \bigcup_{k \in J} A_k \right|$$

<u>Beweis:</u> von

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ j \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \cdot \left| \bigcap_{k \in J} A_k \right|$$

linke Seite:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|$$

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n}$$

<u>Frage:</u> in wie vielen Mengen der Form $\bigcap\limits_{k \in J} A_k$ ist x enthalten?

"Wir zählen, wie oft x in den Mengen $\bigcap\limits_{k \in J} A_k$ vorkommt (inklusive des Vorzeichens)." (Beweisidee)

Sei l die Anzahl der Mengen aus $A_1, ..., A_n$ welche x enthalten:

$$l := |\{A_i : A_i \ni x\}|$$

x kann nur in Schnitten von diesen l Mengen vorkommen:

x wird genau so oft auf der rechten Seite gezählt:

$$\binom{l}{1} - \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - \binom{l}{4} \quad (-1)^{l-1} \binom{l}{l}$$

o.B.d.A. seien $A_1, ..., A_l$ die l Mengen, die x enthalten ($A_{l+1}, ..., A_n \not\ni x$)

$$\sum_{\substack{J \subseteq [l] \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{\substack{k \in J \\ \ni x}} A_k \right|$$

D.h. x wird genau:

$$\sum_{\substack{J \subseteq [l] \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} = \underbrace{\sum_{s=1}^{l} \binom{l}{s} \cdot (-1)^{s-1}}_{(-1) \cdot \sum_{s=1}^{l} \binom{l}{s} (-1)^s} = 1$$

$$\sum_{s=0}^{l} \binom{l}{s} (-1)^s = 0$$

der einzige Term, der fehlt ist $\binom{l}{0} \cdot (-1)^0 = 1$

d.h.

$$\sum_{s=1}^{l} \binom{l}{s} (-1)^s = -1$$

D.h. jedes $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ wird auf der rechten Seite genau einmal gezählt. $\square$

(Bemerkung: $(-1)^{s+1} = (-1)^{s-1}$)

Eine andere/alternative Form für die Siebformel:

$A_1, ..., A_n \subseteq X, \quad |X| < \infty$

$$\bigcap_{j \in \emptyset} A_j := X \quad \text{(Notation)}$$

Dann gilt:

$$\left| X \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{J \subseteq [n]} (-1)^{|J|} \cdot \left| \bigcap_{k \in J} A_k \right|$$

$$\left(= |X| - \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \left| \bigcap_{j \in \emptyset} A_j \right| - \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{k \in J} A_k \right| \right)$$

Anwendung:

Sei $n \geq 2$, sei $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$ mit p_i Primzahlen, $e_i \geq 1$ die (eindeutige) Primfaktorzerlegung von n

Dann gilt:

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

$\rightarrow$ Eulersche φ-Fkt.

Beweis:

definiere Mengen $(A_1 ... A_r)$

$$A_j := \{d : d \in [n],\ p_j | d\} \leq [n]$$

Weil $p_1, ..., p_r$ verschieden Primzahlen sind gilt: "X"

$$\left|\bigcap_{k\in J} A_k\right| = \frac{n}{\prod_{k\in J} p_k}$$

für $J \subseteq [r]$

<u>Siebformel liefert:</u>

$$\varphi(n) = \left|[n] \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| = \sum_{J\subseteq[r]} (-1)^{|J|} \cdot \frac{n}{\prod_{k\in J} p_k} = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \quad \square$$