Di: Menge $A, B,\ a \in A,\ a \notin A,\ A \subseteq B,\ A = B$

$A = \{a, b, c, ...\}$

Aussagenlogik

Aussagen

wahr	oder	falsch
w		f
1		0

Junktoren

$\neg, \vee, \wedge$

Wahrheitstafeln:

a	$\neg a$
0	1
1	0

a	b	$a \vee b$	$a \wedge b$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Definition (weitere Verknüpfungen/Junktoren)

Implikation $\rightarrow$

$a \rightarrow b :$

'a impliziert b' oder 'aus a folgt b' oder 'wenn a, dann b'

Äquivalenz $\leftrightarrow$

$a \leftrightarrow b :$

'a genau dann, wenn b' oder 'a ist äquivalent zu b'

xor 'Exklusives Oder'

$a\ xor\ b :$

'entweder a oder b'

a	b	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$	$a\ xor\ b$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	0

Beispiel:

'Es regnet $\rightarrow$ die Straße ist nass' ist eine wahre Aussage

Beispiel:

a	b	c	$(b \vee c)$	$a \wedge (b \vee c)$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Wahrheitstafelverfahren

Satz:

Die Aussage $a \wedge (b \vee c)$ ist äquivalent zur Aussage $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Bedeutung

a logischer Ausdruck

Satz:

Seien a und b Aussagen. Die Aussage $a \rightarrow b$ ist zur Aussage $\neg b \rightarrow \neg a$ äquivalent.

Beweis:

a	b	$a \rightarrow b$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg b \rightarrow \neg a$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

Beispiel:

"Wenn es neblig ist, ist die Sicht schlecht."

ist äquivalent zu:

"Wenn die Sicht schlecht ist, ist es nicht neblig."

Bemerkung:

Die Zeichen $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ werden normalerweise nur in formalen Ausdrücken verwendet, während wir im normalen mathematischen Text die Zeichen $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ benutzen. (wobei die Bedeutung dieselbe ist)

Beispiel:

$(a-b)^2 = x \Leftrightarrow a^2 - 2b + b^2 = x$

Wir haben gesehen:

$(a \to b) \leftrightarrow (\neg b \to \neg a)$ ist immer wahr

Die Aussagen (/Formeln), die immer wahr sind, heißen Tautologien.

Eine Aussage, die immer falsch ist, heißt Kontradiktion.

Bsp.:

$\neg((a \to b) \leftrightarrow (\neg b \to \neg a))$ ist immer falsch

Definition:

Zwei Aussagen/logische Formeln heißen genau dann äquivalent, wenn $a \leftrightarrow b$ eine Tautologie ist. Wir schreiben dann: $a \equiv b$

Folgendes gilt: (Beweise: Übungsaufgaben)

Kommutativität: $(a \wedge b) \equiv (b \wedge a)$

$(a \vee b) \equiv (b \vee a)$

Assoziativität: $a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c$

deswegen kann man auch $a \wedge b \wedge c$ schreiben

$a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$

Distributivität $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Idempotenz $a \wedge a \equiv a$

$a \vee a \equiv a$

$\neg(\neg a) \equiv a$

de Morgans Regeln:

$\neg(a \wedge b) \equiv (\neg a) \vee (\neg b)$

$\neg(a \vee b) \equiv (\neg a) \wedge (\neg b)$

Tautologieregeln:

Ist a eine Tautologie, so gelten:

$a \wedge b \equiv b \quad a \vee b \equiv a$

$(\neg(\neg a \land b)) \land (a \lor b) \equiv ((\neg(\neg a)) \lor (\neg b)) \land (a \lor b) \equiv (a \lor (\neg b)) \land (a \lor b) \overset{D.}{\equiv} a \lor ((\neg b) \land b) \equiv a \lor$'f'$\equiv a$

Vereinfachung der Klammerschreibsweise:

Negation bindet am stärksten (stärker als $1, \lor \rightarrow, \leftrightarrow, xor$)

d.h. für $(\neg a) \land b \equiv \neg a \land b$

Konjunktion bindet stärker als Disjunktion

d.h.: $a \land b \lor a \land c \equiv (a \land b) \lor (a \land c)$

Definition

Eine Aussageform (Prädikat) ist eine Aussage, in der eine (oder mehrere) Konstanten durch eine (oder mehrere) Variablen ersetzt wurden.

Beispiel:

(1) $a =$ '2 ist eine Primzahl' Aussage (w)
$a(x) =$ 'x ist eine Primzahl' Aussageform

(2) $a =$ '$2 + 3 < 6$'
$a(x, y) =$ '$x + y < 6$'

Durch logische Verknüpfungen erhalten wir aus Aussageformen weitere Aussageformen.

Beispiel:

- $(2 + x \leq 5) \land (x > 0)$
- $\neg(2 + x \leq 5) \equiv 2 + x \nleq 5 \equiv 2 + x > 5$
- $(x = 2) \rightarrow (x^2 = 4)$ Für $\overset{\text{Aussage!}}{\underline{\text{alle nat. } x}}$ gilt: $(x = 2) \rightarrow (x^2 = 4)$

Def.

Sei $a(x)$ eine Aussageform und M eine Menge, dann ist

$$(\forall x \in M) a(x)$$

die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $a(x)$ für alle Elemente $x \in M$ gilt (wahr ist).

Das Zeichen $\forall$ heißt Allquantor

Beispiel:

$(\forall x \in \mathbb{N})(x = 2) \rightarrow (x^2 = 4)$

<u>Bem.</u>

Um die Lesbarkeit zu erhöhen, schreiben wir auch:

$\boxed{\forall x \in M : a(x)}$:..."gilt"

<u>Def.</u>

Sei $a(x)$ Aussageform, M eine Menge. Dann ist

$$(\exists x \in M)a(x)$$

die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn es mindestens ein Element $x \in M$ gibt, so dass $a(x)$ wahr ist.

Das Zeichen $\exists$ heißt Existenzquantor

$$\exists x \in M : a(x)$$

wir sagen: "Es gibt ein x in M mit $a(x)$" oder "Es gibt ein x in M, so dass $a(x)$ gilt."

$$\forall x \in M : a(x)$$

wir sagen: "Für alle x in M (aus M) gilt $a(x)$" oder "Für jedes x in M (aus M) gilt $a(x)$"

$\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 4$ wahr

$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 > 0$ wahr

$\neg(\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 4) \equiv \forall x \in \mathbb{N} : x^2 \neq 4$

<u>Regel:</u>

$\neg(\exists x \in M : a(x)) \equiv \forall x \in M : \neg(a(x))$

$\neg(\forall x \in \mathbb{N} : x^2 > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{N} : x^2 \not> 0 (x^2 \leq 0)$

<u>Regel:</u>

$\neg(\forall x \in M : a(x)) \equiv \exists x \in M : \neg(a(x))$

$\forall x \in \mathbb{N}(\exists y \in \mathbb{N} : x^2 > y)$ falsch (z.B. wähle $x = 1$ dann gibt es kein y)

Negation: $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : y \leq y$