Wiederholung

$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, xor; P \equiv Q$ $\rightarrow$falls $P \leftrightarrow Q$ immer wahr (Tautologie)

Aussagen $\rightarrow$ Aussageformen/Prädikate

Beispiel:

$P(x)$:='x ist eine Primzahl' $\rightarrow$ >1, lässt sich nur durch 1 und sich selbst teilen $(2, 3, 5, 7, 11, ...)$

$\boxed{(\forall x \in \mathbb{N})\ P(x)}$

bedeutet: für alle x gilt $P(x)$

$\forall$ $\rightarrow$ Allquantor

$(\exists x \in \mathbb{N})P(x) =$ "Es gibt ein (mindestens ein) $x \in \mathbb{N}$ so dass x eine Primzahl ist.

Schreibweise:

$\forall x \in \mathbb{N} P(x)$

oder $\forall x \in \mathbb{N} : P(x)$

$\forall_{\mathbb{N}} x : P(x)$ (sehr selten)

Bemerkung:

Ist $A(x)$ eine Aussageform und M eine Menge, so sind $\boxed{\forall x \in M : A(x)}\boxed{/\exists x \in M : A(x)}$ Aussagen und M wird auch manchmal Universum genannt.

Genauer:

$A(x)$ ist dann eine Aussageform über das Universum M.

Negation:

1) $\neg(\forall x \in M : A(x)) \equiv \exists x \in M : \neg(A(x))$

2) $\neg(\exists x \in M : A(x)) \equiv \forall x \in M : \neg(A(x))$

Beispiel:

$\neg$('An mindestens einem Tag im Jahr regnet es')$\equiv$ An allen Tagen im Jahr regnet es nicht.

$A(x, y)$:="x ist durch y ohne Rest teilbar" $= y|x$:="y teilt x"

$M := \{n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} = \{2, 3, 4, 5, ...\}$

$\forall x \in M \exists y \in M : A(x, y)$ "$y|x$"

Bedeutung:

Zu jedem $x \geq 2$ existiert ein $y \geq 2$ (beide nat. Zahlen), so dass x durch y ohne Rest teilbar ist. Diese Aussage ist wahr: denn man kann $y = x$ wählen.

Vertauschen der Quantoren führt in der Regel zu einer anderen Aussage

$$\underbrace{\exists y \in M \forall x \in M : y|x}_{\text{Es existiert mindestens ein } y \geq 2 \text{, welches alle } x \geq 2 \text{ teilt}}$$

Falsch:

denn ein $y \geq 2$ teilt nie $\underline{y+1}$

Bemerkung:

Zwei aufeinanderfolgende Allquantoren dürfen vertauscht werden. Ebenso zwei aufeinanderfolgende $\exists$.

Beispiel:

$\forall x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : x + y \geq 2$

deswegen wird das oft zu $\forall x, y \in \mathbb{N} : x + y \geq 2$ zusammengefasst.

$\exists x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : x + y \geq 2 \rightarrow \exists x, y \in \mathbb{N} : x + y \geq 2$

$\neg(\forall x \in M \exists y \in M : A(x, y))$

$= \exists x \in M \forall y \in M : \neg(A(x, y))$

$$\underbrace{\forall x \in M : \underbrace{(\exists y \in M : A(x, y))}_{=:B(x)}}_{\boxed{\forall x \in M : B(x)}}$$

$\neg(\forall x \in M : B(x)) \equiv \exists x \in M : \neg(B(x)) \equiv \exists x \in M \forall y \in M : \neg(A(x, y))$

$\neg(B(x)) \equiv \neg(\exists y \in M : A(x, y))$

$\equiv \forall y \in M : \neg(A(x, y))$

$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists m \geq n : |a_m - a| \leq \varepsilon}$

$((a_n) = a_1, a_2, a_3, ...) a_i \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}$ später: Analysis: a ist ein Häufungspunkt der Folge (a_n)

$\exists \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall m \geq n : |a_m - a| > \varepsilon$

Notationen:

oft schreibt man anstelle von Mengen/Universum bei Quantoren eine "charakterisierende Ungl."

$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \text{ gemeint ist } \forall \varepsilon \in \mathbb{R} > 0,}$ wobei $\mathbb{R} = \{r : r \in \mathbb{R}, r > 0\}$

d.h. oft ist implizit bekannt, aus welcher Menge ε stammt und die Ungl. $\varepsilon > 0$ schränkt die Menge weiter ein.

$\exists m \geq n$ gemeint ist: $\exists m \in M_n$, wobei $M_n := \{k : k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$

<u>Bem.</u>

In mathematischen Texten werden in der Regel Quantoren vermieden/durch Text ersetzt

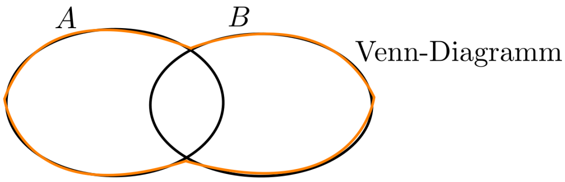
$\rightarrow$ zu jedem $\overset{\forall \varepsilon \rightarrow \mathbb{R}>0}{\underline{\text{reellen}}}$ $\varepsilon > 0$ und zu $\overset{\forall n \in \mathbb{N}}{\text{jeder}}$ natürlichen Zahl n $\overset{\exists m \in M_n}{\text{existiert}}$ eine nat. Zahl $m \geq n$, so dass $|a_m - a| \leq \varepsilon$ gilt.

<u>**Mengenoperationen:**</u>

<u>Def.:</u>

Seien A und B Mengen. Die Vereinigung von A und B wird durch $\{x : x \in A \land x \in B\}$ definiert und durch $A \cup B$ bezeichnet.

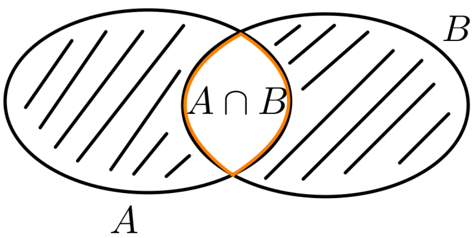
$A \cup B := \{x : (x \in A) \lor (x \in B)\}$ $\cup$..."union"



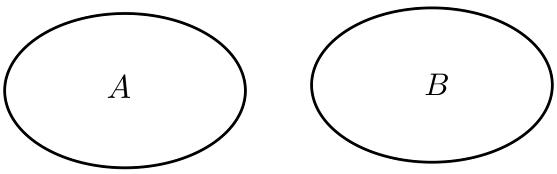
Vereinigung

Der Schnitt von A und B ist

$A \cap B := \{x : x \in A \land x \in B\}$

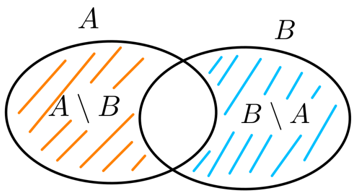


Zwei Mengen A und B heißen <u>disjunkt</u>, falls $A \cap B = \emptyset$



Die (mengentheoretische) Differenz von A und B ist die Menge

$A \quad B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$



<u>Definition:</u>

Für eine Menge M ist

$P(M) : \{A : A \leq M\}$

die Potenzmenge von M.

<u>Erinnerung:</u>

$A \subseteq B$ bedeutet A ist eine Teilmenge von B

<u>Beispiel:</u>

$P(\{1, 2\}) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$

$P(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

<u>Definition:</u>

Sei M eine Menge. Hat M endlich viele Elemente, so bezeichnen wir die Anzahl der Elemente von M durch $|M|$ und wir nennen $|M|$ die Kardinalität, oder auch die Mächtigkeit von M.

<u>Bem.:</u>

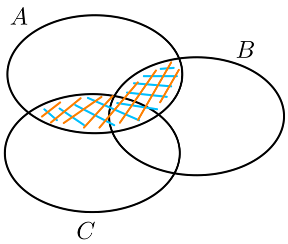
Ist M eine endliche Menge, so gilt: $\boxed{|P(M)| = 2^{|M|}}$ weswegen die Potenzmenge von M gelegentlich durch 2^M bezeichnet wird.

<u>Satz:</u>

Seien A, B und C Mengen. Es gilt:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

("Distributivgesetz für Mengen")



Beweis:

Wir müssen zeigen, dass die Mengen $A \cap (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ aus denselben Elementen bestehen.

$A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\}$

und $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{x : (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\}$

Sei x ein beliebiges Element.

Definiere folgende Aussagen:

$a :=' x \in A'$

$b :=' x \in B'$

$c :=' x \in C'$

Nach dem Distributivgesetz für $\vee$ und $\wedge$ gilt: $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Also gilt:

$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

Also bestehen die Mengen $A \cap (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ aus denselben Elementen, sind somit gleich. $\square$

Bemerkung:

Sei $A(x)$ eine Aussageform über eine Menge/Universum M. Dann ist die Menge

$\{x : x \in M \text{ und } A(x) \text{ gilt }\}$

eine Teilmenge von M.

D.h. wir können Mengen mithilfe von Aussagen beschreiben.

Bemerkung:

Um die Gleichheit von zwei Mengen A und B zu zeigen, kann man oft wie folgt vorgehen: Man beweist, dass sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$ gelten.

Beispiel:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

"$\subseteq$" Sei $x \in A \cap (B \cup C)$ dann ist $x \in A$ und $(x \in B \vee x \in C)$

Ist $x \in B$, so gilt: $x \in A \wedge x \in B$, also muss x in $A \cap B$ liegen, und somit auch in der Menge $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Ist $x \notin B$, aber $x \in C$ dann gilt: $x \in A \wedge x \in C$, also $x \in (A \cap C)$. Somit ist $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Also gilt: $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

"$\supseteq$" ähnlich