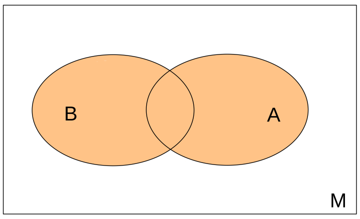
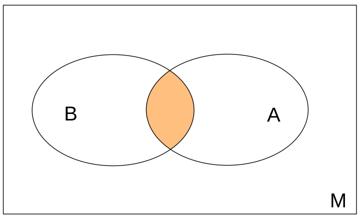
Mengenoperationen:

A, B Mengen

$A \cup B := \{x : x \in A \underbrace{\vee}_{\text{oder}} x \in B\}$



$A \cap B := \{x : x \in A \underbrace{\wedge}_{\text{und}} x \in B\}$



$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

Venn-Diagramm

$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow:$ A und B heißen disjunkt

Notation:

wir verwenden $:\Leftrightarrow$ um etwas zu definieren

Satz:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Beweis: bestand aus einer Folge von logischen Schlüssen.

Was ist ein Beweis?

$\boxed{\text{Axiome/Postulare}}$ Grundwahrheiten A, B, C wahr (Axiome)	Was ist mit D (irgendeine Aussage)? Angenommen, wir wissen: $\boxed{A \to D}$ ist immer wahr $\boxed{A \text{ wahr}}$

Weil eine Implikation der Form $E \to F$ nur falsch sein kann, wenn E wahr und F falsch ist, muss D wahr sein.

$(A \land (A \to D)) \to D$ $\boxed{\textit{Tautologie}}$ (Übungsblatt 1)

Modus Ponens

Ein typischer Beweis besteht also aus einer Abfolge von wahren Implikationen der Form $A_i \to A_{i+1}$.

<u>Genauer:</u>

Möchte man zeigen, dass aus E(wahre Auss.) die Aussage F folgt, und F wahr ist, so reicht es, eine Folge von wahren Implikationen der Form

$E \to A_1, A_1 \to A_2, A_2 \to A_3, ..., A_n \to F$

zu finden.

$$\begin{array}{rl} E & \text{wahr} \\ E \to A_1 & \text{wahr} \\ A_1 \to A_2 & \text{wahr} \\ \vdots & \\ A_{n-1} \to A_n & \text{wahr} \\ A_n \to F & \text{wahr} \end{array}$$

<u>Def.</u>

Seien A und B Mengen. Dann bezeichnet die Menge $A \times B$ alle geordneten Paare (a, b) mit der Eigenschaft, dass $a \in A$ und $b \in B$.

<u>D.h.</u>

$A \times B := \{(a, b) : a \in A \land b \in B\}$

$A \times B$ heißt das <u>Kartesische Produkt</u> von A und B.

<u>Notation:</u>

$A^2 := A \times A$

<u>Definition:</u>

Sei A eine Menge. Die Menge $A^3 := \{(a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in A\}$

Allgemein, für eine nat. Zahl n definiert man

$A^n := \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A \text{ für alle } i \in \{1, ..., n\}\}$

Beispiel:

$\{0,1\} \times \{2,3,4\} = \{(0,2),(0,3),(0,4),(1,2),(1,3),(1,4)\}$

$\{0,1\}^3 = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

Abbildungen

Def.

Eine Abbildung von einer Menge A in eine Menge B ist eine Zuordnung die jedem Element von A ein einziges Element von B zuordnet. Ist f eine Abbildung von A in B (oder auch "von A nach B") so schreiben wir:

$f : A \to B$

Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so nennen wir die Menge A den Definitionsbereich von f, die Menge B wird der Wertebereich von f genannt.

Bem:

Abbildungen von A nach B werden auch Funktionen genannt.

Notationen:

Sei $f : A \to B$ eine Abb.

Ist $a \in A$, so schreiben wir $f(a)$ für das Element aus B, welches f dem Element a zuordnet.

Sprechweise:

Gilt $f(a) = b$ für ein $b \in B$, so sagen wir "f bildet a auf b ab"

Das Element b heißt der Wert von f an der Stelle a (in a).

Def.

Ist $f : A \to B$ eine Abb., so wird die Menge $\{f(a) : a \in A\}$ das Bild von f genannt.

Bem:

Oft schreibt man $f(A)$ für das Bild von f, d.h. $f(A) := \{f(a) : a \in A\}$.

Beispiele:

1) Wir können eine Abb./Funktion durch eine Formel definieren:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) := n^2$$

alternative Schreibweise: $\boxed{n \mapsto n^2}$ $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 \end{cases}$ $n \mapsto n^2$... Abbildungsvorschrift

2) $g : \begin{cases} \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \\ (n,m) \mapsto n+m \end{cases}$

3) Ist der Definitionsbereich endlich, so können wir die Funktion in Form einer Tabelle angeben:

a	Thüringen	Bayern	Hessen	...
$f(a)$	Erfurt	München	Wiesbaden	...

$f : A \to B$

<u>Allgemein:</u>

weder injektiv noch surjektiv

<u>Definition</u>

Eine Abbildung heißt

(a) <u>injektiv</u>, falls für alle $a, y \in A$ gilt:

Ist $x \neq y$, so ist $f(x) \neq f(y)$

(b) <u>surjektiv</u>, falls es für alle $b \in B$ mindestens ein $a \in A$ gibt, so dass $f(a) = b$ gilt

(c) <u>bijektiv</u>, falls f <u>injektiv und surjektiv</u> ist

<u>Beispiele:</u>

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3\}$

1)

a	1	2	3
$f(a)$	1	2	2

f weder injektiv, noch surjektiv

2) $g : A \to B,\ g(1) = 1,\ g(2) = 3,\ g(3) = 2 \quad g$ bijektiv

3) $C = \{4, 5\},\ h : A \to C\ h(1) = 4,\ h(2) = 5,\ h(3) = 4$

4) $D = \{1, 2, 3, 4\}\ f : A \to D,\ f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 4 \quad f$ injektiv, aber nicht surjektiv

5) $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 \end{cases}$ g injektiv, aber nicht surjektiv

6) $h : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n^2 \end{cases}$ $\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ h weder injektiv noch surjektiv.

<u>Bem.</u>

Ist $f : A \to B$ eine surjektive Abb, so ist der Wertebereich von f gleich dem Bild von f.

Def.:

Für eine nat. Zahl n und eine Menge M heißt die Abbildung $f : M^n \to M$ manchmal auch eine n-stellige Verknüpfung oder n-stellige Operation.

Motivation:

$\mathbb{N}$ nat. Zahlen

$+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, +(a, b) :=$ "$a + b$"

$\cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \cdot(a, b) :=$ "$a \cdot b$" ...a wird b-mal mit sich selbst addiert

Falls $n = 2 :$ binäre Operation/binäre Verknüpfung

bis jetzt:

Mengenoperationen: $\cap, \cup$, Komplement

logische Verknüpfungen: $\wedge, \vee, \neg$

Komplement einer Menge A

Def.

Sei M eine Menge und sei $A \subseteq M$. Dann heißt die Menge $M \backslash A$ das Komplement von A in M.

Bezeichnung:

$A^c (:= M \backslash A)$

$a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge) \vee (a \wedge c)$

$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$\neg(\neg a) \equiv a$ ...Logik

Mengen:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Üb. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$(A^c)^c = A$

$\boxed{BoolescheAlgebra}$

$B, + \ni 0, 1$

$\neg : B \to B \quad \sqcup : B^2 \to B \quad \sqcap : B^2 \to B$

$\to$ "Gesetze"