Boolesche Algebra

Def.

Gegeben sei eine Menge B, die mindestens zwei verschiedene Elemente 1 und 0 enthält, zusammen mit der einstelligen Verknüpfung $\overset{\kappa}{\neg} : B \to B$, und den zweistelligen Verknüpfungen $\overset{\otimes}{\sqcap}, \overset{\oplus}{\sqcup} : B^2 \to B$. $(B, \sqcap, \sqcup, \neg, 0, 1)$ heißt eine Boolesche Algebra, wenn für alle $a, b, c \in B$ die folgenden Gleichungen gelten:

(A1) Assoziativgesetze

- $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$
- $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$

(A2) Kommutativgesetze

- $a \sqcap b = b \sqcap a$
- $a \sqcup b = b \sqcup a$

(A3) Distributivgesetze

- $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$
- $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$

(A4) Beschränktheit

- $a \sqcap 1 = a$
- $a \sqcup 0 = a$

(A5) Komplementierung

- $a \sqcap (\neg a) = 0$
- $a \sqcup (\neg a) = 1$

Bemerkung:

$\sqcup, \sqcap$ Abb. $\sqcup(a, b) := \boxed{a \sqcup b}$

Die Aussagen (A1)-(A5) sind die Booleschen Algebren.

Beispiele

1) Schaltalgebra

   $B = \{0, 1\}$ die Wahrheitswerte

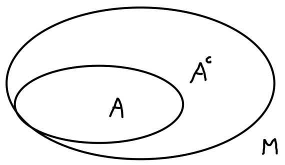
   $\sqcap = \wedge, \sqcup = \vee, \neg = \neg$ log. Verkn.

   Schaltalgebra ist eine Boolesche Algebra

2) Sei $M \neq \emptyset,\ B := P(M)$

$\sqcup = \cup,\ \sqcap = \cap,\ \neg =$ Komplementbildung

$A \in B = P(M)\ \neg A = A^C = M \quad A$



$(P(M), \cup, \cap, \neg, \underset{\text{"0"}}{\emptyset}, \underset{\text{"1"}}{M})$

heißt Potenzalgebra

(A4): $A \subseteq M$ $(A \in P(M))$

$$A \cap M = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

(A5):

$$A \cap A^C = \emptyset$$

$$A \cup A^C = M$$

3) $B = \{0,1\}^8 =$ alle 8−Tupel mit Einträgen aus $\{0,1\}$

$$1 := \{1,1,1,1,1,1,1,1\}$$

$$0 := \{0,0,0,0,0,0,0,0\}$$

Für alle $a, b \in B$ mit $a = (a_1, ..., a_8)$, $b = (b_1, ..., b_8)$ definieren wir:

$$a \sqcap b := (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2, ..., a_8 \wedge b_8)$$

$$a \sqcup b := (a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2, ..., a_8 \vee b_8)$$

$$\neg a := (\neg a_1, \neg a_2, ..., \neg a_8)$$

$(B, \sqcup, \sqcap, \neg, 0, 1)$ ist eine Boolesche Algebra

Satz:

Sei $(B, \sqcap, \sqcup, \neg, 0, 1)$ eine Boolesche Algebra. Für alle $a \in B$ gilt:

$$a \sqcap a = a,\ a \sqcup a = a$$

Beweis:

Es gilt:

$$a \sqcap a \overset{(A4)}{=} (a \sqcap a) \sqcup 0 \overset{(A5)}{=} (a \sqcap a) \sqcup (a \sqcap \neg a) \overset{(A3)}{=} a \sqcap (a \sqcup \neg a) \overset{(A5)}{=} a \sqcap 1 \overset{(A4)}{=} a$$

$$a \sqcup a \overset{(A4)}{=} (a \sqcup a) \sqcap 1 \overset{(A5)}{=} (a \sqcup a) \sqcap (a \sqcup \neg a) \overset{(A3)}{=} a \sqcup (a \sqcap \neg a) \overset{(A5)}{=} a \sqcup 0 \overset{(A4)}{=} a \quad \square$$

<u>Satz:</u> (Dualitätsprinzip für Boolesche Algebra)

Jede Aussage, die eine Folgerung aus den Axiomen (A1)-(A5) ist, geht in eine gültige Aussage über, wenn man in ihr überall die Zeichen $\sqcap$ und $\sqcup$ sowie die Zeichen 0 und 1 vertauscht.

<u>Beweis:</u>

die Axiome (A1)-(A5) bestehen aus Paaren von Gleichungen, die jeweils durch diese beschriebenen Vertauschungen auseinander hervorgehen. $\square$

<u>Satz:</u>

Sei $(B, \sqcup, \sqcap, \neg, 0, 1)$ eine Boolesche Algebra. Für alle $a \in B$ gilt:

$$a \sqcap 0 = 0$$

$$a \sqcup 1 = 1$$

<u>Beweis:</u>

$$a \sqcap 0 \overset{A5}{=} a \sqcap (a \sqcap \neg a) \overset{A1}{=} (a \sqcap a) \sqcap \neg a \overset{\text{"Satz"}}{=} a \sqcap \neg a \overset{A5}{=} 0$$

Die Behauptung $a \sqcup 1 = 1$ folgt aus dem Dualitätsprinzip:

$$(a \sqcup 1 = a \sqcup (a \sqcup \neg a) = (a \sqcup a) \sqcup \neg a = a \sqcup \neg a = 1) \quad \square$$

<u>Satz:</u> (De Morgansche Regeln)

Sei $(B, \sqcup, \sqcap, \neg, 0, 1)$ B. A. Für alle $a, b \in B$ gilt:

$$\neg(a \sqcap b) = \neg a \sqcup \neg b$$

$$\neg(a \sqcup b) = \neg a \sqcap \neg b$$

<u>Beweis:</u> Übung/Buch

Potenzmengenalgebra: $P(M) : A, B \in P(M)$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

<u>Summen- und Produktzeichen</u>

<u>Def.</u>

Für reelle Zahlen $a_1, ..., a_n$ sei

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + ... + a_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_i b_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Das Prinzip der mathematischen/vollständigen Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussageform. Gilt $A(1)$ und gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Implikation $A(n) \rightarrow A(n+1)$ dann gilt für alle $n \in \mathbb{N} : A(n)$.

$$A(1) \rightarrow A(2) \rightarrow A(3) \rightarrow A(4) \rightarrow \ldots$$

$$A(n) : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis:

$$(A1) : \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

d.h. $A(1)$ gilt

Induktionsschritt: $A(n) \rightarrow A(n+1)$

$$A(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(Ind.Behauptung)

Wir benutzen die Induktionsvoraussetzung:

$$A(n) : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) \overset{A(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \square$$

$$\sum_{i=1}^{n} = 1 \qquad +2+3 \qquad +\ldots+n$$

$$\sum_{i=1}^{n} (n+1-i) = n \qquad +(n+1)+(n+2) \qquad +\ldots+1$$

$$= (n+1) \qquad +(n+1)+(n+1) \qquad +\ldots+(n+1)$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{"a_i"} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (n+1-i)}_{"b_i"} = \sum_{i=1}^{n} (i + (n+1-i)) = \sum_{i=1}^{n} (n+1) = n(n+1)$$

Sei $q \in \mathbb{R}\ \ \{1\}$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad q^0 := 1\ (0^0 := 1)$$

$$(1-q)\left(\sum_{i=0}^{n} q^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (1-q) \cdot q^i = \sum_{i=0}^{n} \left(q^i - q^{i+1}\right) = (1-q) + (q-q^2) + (q^2-q^3) + ... + (q^n - q^{n+1})$$

<u>Teleskopsumme</u>

$$= 1 - q^{n+1}$$

Teilen durch $(1-q)$ von beiden Seiten:

$$\sum_{i=0} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

<u>Induktionsbeweis:</u>

$$A(n) : \sum_{i=0}^{1} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$A(0) : \sum_{i=0}^{0} q^i = 1 = \frac{1-q}{1-q}$$

<u>Ind.Schritt:</u> $A(n) \rightarrow A(n+1)\ \forall n \in \mathbb{N}_0$

$$(A(0) \rightarrow A(1) \rightarrow A(2) ...)$$

Es gelte:

$$A(n) : \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

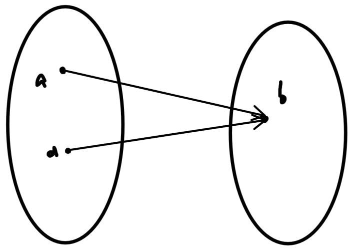
Wir zeigen, dass $A(n+1)$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} \overset{A(n)}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \quad \square$$

Abbildungen:

$$f : A \to B$$



Wir können f als eine Teilmenge von $A \times B$ auffassen, welche gewisse Eigenschaften besitzt.

"Graph von f"

$$\{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B$$

Allgemeiner:

$$A \subseteq A \times B$$

Relation

Wir können eine Abb. von $A \to B$ als eine spezielle Reltation R auffassen, nämlich, dass für jedes a ein einziges b ex., so dass $(a, b) \in R$.

(D.h. Gilt $(a, b), (a, b') \in R \to b = b'$)