Relationen

Definition

Eine (binäre) Relation zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge R von $A \times B$.

$$A \times B := \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

R Relation zwischen A und B $:\Leftrightarrow$

$$R \subseteq A \times B$$

Definition

Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation, dann ist

$$R^{-1} := \{(b,a) \in R\} \subseteq B \times A$$

ist eine Relation zwischen B und A, die zu R inverse Relation.

Beispiele:

$A = \{1,2,3\},\ B = \{0,1\} \quad R_1, R_2, R_3, R_4 \subseteq A \times B$

(1) $R_1 = \{(1,0),(2,0),(2,1)\}$

(2) $R_2 = \{(1,1),(2,0),(3,0),(3,1)\}$

(3) $R_3 = A \times B$

(4) $R_4 = \emptyset$

Beispiele (Vergleichsrelationen)

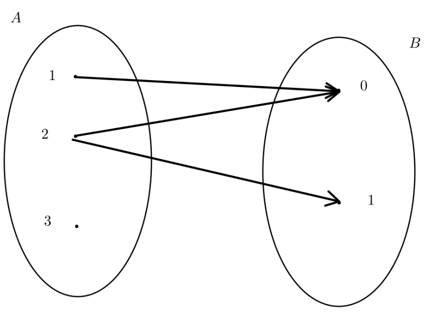
$$R = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{N} \text{ mit } a < b\}$$

$$S = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{N} \wedge a \leq b\}$$

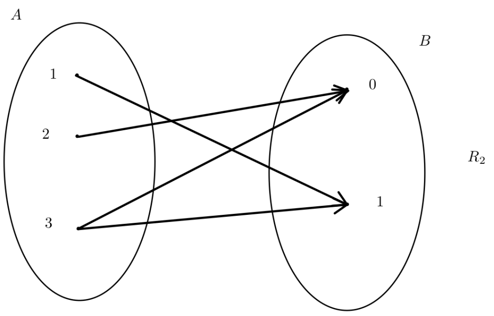
$$T = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{N} \text{ und } a = b\}$$

Wir würden R mit $<$, S mit $\leq$, T mit $=$ identifizieren.

Wir können Pfeildiagramme benutzen, um die Relationen zu veranschaulichen.



R_1



Definition

0) Sei A eine Menge, eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt eine Relation auf A.
   Sei $R \subseteq A \times A$

1) a) R heißt reflexiv $:=$ für alle $a \in A$ gilt $(a, a) \in R$
   b) R heißt irreflexiv $\Leftrightarrow$ für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \notin R$
   c) R heißt symmetrisch: $\Leftrightarrow$ für alle $(a, b) \in R$ gilt: $(b, a) \in R$
   d) R heißt antisymmetrisch: $\Leftrightarrow$ aus $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ folgt: $a = b$
      (M.a.W.: Ist $a, b \in R$ und $a \neq b$, dann gilt: $(b, a) \notin R$)
   e) R heißt transitiv: $\Leftrightarrow$ Aus $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ folgt: $(a, c) \in R$.

Schreibweise:

Ist $R \subseteq A \times B$ eine Relation, und gilt $(a, b) \in R$, so schreiben wir auch aRb.

Das erleichtert die Lesbarkeit.

Bsp: $R =' <'$ - Relation

Beachte: $bRa \Leftrightarrow (b, a) \in R$

Definition:

Eine Relation R auf einer Menge A heißt Äquivalensrelation, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiel:

1) '=' (T aus Beispiel davor) ist eine Äquivalensrelation auf $\mathbb{N}$

2) '$\leq$' reflexiv, transitiv ($a \leq b \wedge b \leq c - a \leq c$) ABER nicht symmetrisch!
   Also '$\leq$' keine Äquivalensrelation.

Def.

Ist R eine Äquivalensrelation auf A, so bezeichnet man für jedes $a \in A$ mit $[a]_R$ die Menge $\{b : b \in A, \underbrace{(a, b) \in R}_{'aRb'}\}$

Wir nennen die Menge $[a]_R$ die Äquivalensklasse von a.

Beispiel:

$T =$'$=$' auf $\mathbb{N}$

Für jedes $a \in \mathbb{N}$ ist

$$[a]_T = \{a\}$$

Beispiel:

Sei $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine Relation auf $\mathbb{Z}$, definiert durch $aRb :\Leftrightarrow a - b$ ist gerade (durch 2 teilbar ohne Rest in $\mathbb{Z}$)

R reflexiv ✓

R symmetrisch ✓

R transitiv: $\left.\begin{array}{c} a-b \text{ gerade } (=2k) \\ b-c \text{ gerade } (=2l) \end{array}\right| a-c = 2k+2l$ gerade $\;k,l \in \mathbb{Z}$

Also ist R eine Äquivalensrelation auf $\mathbb{Z}$ und

$[0]_R := \{b : b \in \mathbb{Z}, b - 0$ gerade $\} = \{b$ gerade Zahlen in $\mathbb{Z}\}$

$[1]_R := \{b : b \in \mathbb{Z}, b - 1$ gerade $\} = \{$ ungerade ganze Zahlen$\}$.

$[2]_R := \{b : b \in \mathbb{Z}, b - 2$ gerade $\} = \{$ gerade ganze Zahlen$\} = [0]_R$

$[3]_R := ... = [1]_R$

Satz:

Sei A eine Menge und R eine Äquivalensrelation auf A. Dann gilt für alle $a, b \in A$ entweder $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ oder $[a]_R = [b]_R$.

Der Fall $[a]_R = [b]_R$ tritt genau dann ein, wenn aRb gilt

Beweis: $\left(\text{Erinnerung: Äquivalensrelation} \Leftrightarrow \begin{array}{rc} \text{reflexiv: } \forall a \in A: & aRa \\ \text{symmetrisch: } \forall a,b \in A: & aRb \Rightarrow bRa \\ \text{transitiv: } \forall a,b,c \in A: & (aRb) \wedge (bRc) \Rightarrow (aRc) \end{array}\right)$

$$[a]_R := \{c \in A : aRc\}$$

Seien $a, b \in A$ mit $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$.

Sei $c \in [a]_R \cap [b]_R$ mit aRc, bRc

Weil R symmetrisch ist, gilt: cRb.

Weil R transitiv ist, gilt: aRb.

Also gilt: $b \in [a]_R, a \in [b]_R$

Das bedeutet also: Für jedes Element $d \in A$ für welches aRd gilt, muss auch bRd gelten (Transitivität von $R : aRd, bRa \Rightarrow bRd$)

Analog gilt die Argumentation:

$$aRb, dRb \Rightarrow aRd$$

Also bestehen die Äquivalensklassen $[a]_R$ und $[b]_R$ aus denselben Elementen. $\Rightarrow [a]_R = [b]_R$

<u>Sprechweise:</u>

Ist R eine Äquivalensrelation auf A und gilt aRb, so sagen wir a und b sind R-äquivalent. (wenn R aus dem Kontext klar ist, sagen wir: "a und b sind äquivalent")

<u>Schreibweise:</u> (Äquivalensrelation)

Sei R eine Äquivalensrelation auf A.

Gilt aRb, so schreibt man oft $a \sim_R b$.(Wenn R klar ist: $a \sim b$)

$a \sim_R b$:⇔'a und b sind R-äquivalent'

<u>Def.</u>

Sei A eine Menge, sei I eine Indexmenge und für alle $i \in I$ sei $K_i \subseteq A$ und $K_i \neq \emptyset$. Dann heißt die Menge $P = \{K_i : i \in I\}$ eine Partition von A, falls gelten:

(1) Für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt: $K_i \cap K_j = \emptyset$

(2) $\bigcup_{i \in I} K_i = A$

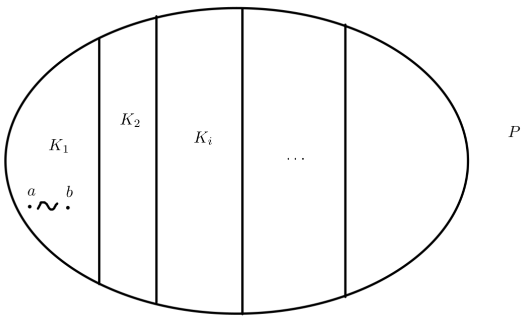
$$\bigcup_{i \in I} K_i = \{x : \text{ es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in K_i\}$$

<u>Beispiel</u>

Für eine Äquivalensrelation R auf eine Menge A ist $\{[a]_R : a \in A\}$ eine Partition von A:

1) jedes $a \in A$ liegt in $[a]_R$

2) $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$



Umgekehrt: Sei P eine Partition von A ($A \neq \emptyset$). Wir können eine Äquivalensrelation auf A definieren, deren Äquivalensklasse genau die Mengen aus P sind. Wir definieren R wie folgt:

$R := \{(a, b) \in A \times A : \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } a, b \in K_i\}$

D.h. wir nennen a und b äquivalent, falls sie in derselben Menge $K_i \in P$ liegen.

Folgerung

Es sei A eine Menge, $A \neq \emptyset$. Für jede Äquivalensrelation auf A bilden die Äquivalensklassen eine Partition von A. Umgekehrt gibt es für jede Partition von A eine Äquivalensrelation, deren Äquivalensklassen genau die Mengen in der Partition sind. $\square$

Definition

Sei A eine Menge ($A \neq \emptyset$) und R eine Relation auf A. Dann heißt R eine Ordnungsrelation, falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
Bemerkung

Ordnungsrelationen heißen auch Halbordnung oder partielle Ordnung.

Schreibweise:

Ordnungsrelationen werden oft mit $\leq$-Zeichen bezeichnet.

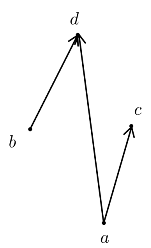
Beispiel:

$A = \{a, b, c, d\}$

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (a, d), (b, d), (c, d)\}$$

R ist reflexiv, transitiv, antisymmetrisch.

$(aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$



Beispiel:

(1) Die Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ist eine Ordnungsrelation.

(2) Für jede Menge A ist $\leq$ eine Ordnungsrelation auf $P(A)$

(3) Die Teilbarkeitsrelation ($a|b :\Leftrightarrow b$ durch a ohne Rest teilbar) ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$. $(2|4, 2|6, 6 \nmid 8)$

Def.

Eine Ordnungsrelation R auf einer Menge A heißt lineare Ordnung, falls für alle $a, b \in A$ mit $a \pm b$ entweder aRb oder bRa gilt.

Bem.

Lineare Ordnungen heißen auch totale Ordnungen.

Beispiel

1) Die kleiner-gleich Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ist eine lineare Ordnung.

2) Ist M eine 1-elementige Menge ($|M| = 1$) so ist $\subseteq$ auf $P(M)$ eine lineare Ordnung. Enthält dagegen M mehr als ein Element, so ist $\leq$ auf $P(M)$ keine lineare Ordnung!

$|M| = 1, \quad P(M) \leq P(M) = \{\emptyset, M\} \quad \emptyset \leq M \quad$ lin.Ord.

$M = \{1, 2\}$

$P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2, \}\}$ keine lin. Ordnung: $\{1\} \quad \{2\}$

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist die Menge aller Brüche $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Da wir jede ganze Zahl m mit dem Bruch $\frac{m}{1}$ identifizieren können, fallen hier $(\mathbb{N} \subseteq)\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ auf (Wir können $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ einbetten)

Erinnerung:

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + m'n}{n \cdot n'}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{n \cdot n'}$$

Die folgenden Regeln gelten in $\mathbb{Q}$ und müssten bekannt sein:

Seien $a, b, c \in \mathbb{Q}$

(K1) Assoziativgesetze:

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(K2) Kommutativgesetze:

$$a+b = b+a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(K3) Distributivgesetz:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(K4) Die Existenz neutraler Elemente in $\mathbb{Q}$ bezüglich der Addition und der Multiplikation:

$$a+0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

(K5) Existenz inverser Elemente bez. der Addition und der Multiplikation:

- Es gibt ein Element d mit $a+d=0$ (Bem: d wird mit $-a$ bezeichnet)
- Für $a \neq 0$ gibt es ein e mit $a \cdot e = 1$ (Bem: e wird mit a^{-1} bezeichnet)

Definition

Sei K eine Menge mit mindestens zwei Elementen, welche 0 und 1 (zwei verschiedene Elemente) enthält. Seien $+ : K \times K \to K$, $\cdot : K \times K \to K$. Dann heißt K mit $0, 1, B, \cdot$ ein Körper, falls die Axiome (K1)-(K5) für alle $a, b, c \in K$ erfüllt sind.