$(K, +, \cdot, 0, 1) \qquad +, \cdot : K \quad \underbrace{K \times K}_{K^2} \to K$

(K1) Assoziativgesetze für $+$ und $\cdot$

(K2) Kommutativgesetze für $+$ und $\cdot$

(K3) Distributivgesetz: $a(b+c) = ab + ac$

(K4) Neutrale Elemente 0 und 1

(K5) Inverse Elemente $-a$ und a^{-1}

K ist ein Körper

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + m'n}{n \cdot n'}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{m \cdot m'}{n \cdot n'}$$

(K1) $(a \underset{\cdot}{+} b) \underset{\cdot}{+} c = a \underset{\cdot}{+} (b \underset{\cdot}{+} c)$

(K2) $a \underset{\cdot}{+} b = b \underset{\cdot}{+} a$

(K3) .

(K4) 0 ist neutral bez. der Addition: $0 + a = a = a + 0$
1 ist neutral bez. der Multiplikation: $1 \cdot a = a = a \cdot 1$

(K5) $(-a) + a = 0 = a + (-a) \quad -a$ ist das inverse Element bez. der Add.
$a^{-1} \cdot a = 1 = a \cdot a^{-1} \quad a^{-1}$ ist das inverse Element bez. der Mult.

$\mathbb{Z}$ sind kein Körper, denn (K5) für inverse Elemente bez. der Multiplikation gilt nicht.

$$2 \cdot b = 1 \quad b = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \qquad a \in \mathbb{Z}, (-a) + a = 0$$

Beispiel: für einen Körper mit 2 Elementen $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbb{F}_2$ ist ein Körper.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind durch die Kleiner-Bezeichnung ('<') angeordnet, d.h. es gelten folgende Regeln:

Seien $a, b, c \in \mathbb{Q}$

1) Es gilt entweder $a = b$ oder $a < b$ oder $b < a$
2) $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$
3) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
4) $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ für $c > 0$
5) $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ für $c < 0$

Def. ($\leq$)

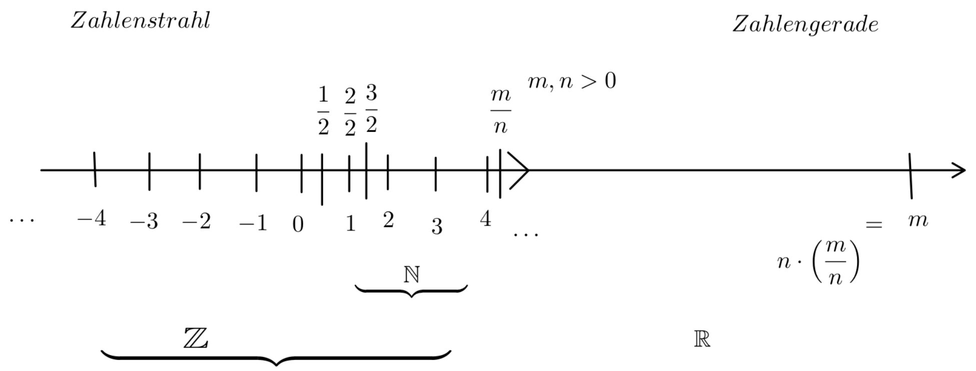
Wir schreiben $a \leq b$ (Sprechweise: 'a ist kleiner-gleich b') falls $a < b$ oder $a = b$ gilt.

$\leq$ ist eine lineare Ordnung auf $\mathbb{Q}$ (reflexiv, transitiv und antisymmetrisch) und es gelten:

1) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
2) $a \leq b \Rightarrow a \cdot b \leq b \cdot c$ für $c \geq 0$
3) $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$ für $c \leq 0$

Bemerkung:

Wir schreiben auch $b > a$ genau dann, wenn $a < b$ gilt.



Die rationalen $\mathbb{Q}$ liegen direkt auf der Zahlengeraden, aber es gibt Lücken

$$\emptyset = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} \cap \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \geq 2\}$$

Lemma

Sei m eine ganze Zahl. Falls m^2 gerade ist, ist auch m selbst gerade.

Beweis:

m gerade $\Rightarrow m$ gerade

$\Leftrightarrow m$ ungerade $\Rightarrow m^2$ ungerade

(denn es gilt: $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ Kontraposition)

Sei m ungerade. Dann lässt sich $m = 2k + 1$ schreiben (für ein $k \in \mathbb{Z}$)

$m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

Also ist m^2 ungerade $\square$

Satz:

Es gibt keine rationale Zahl a mit $a^2 = 2$.

Beweis:

(Widerspruchsbeweis: D.h. Wir nehmen an, dass die Behauptung des Satzes nicht gilt und zeigen, dass dann eine als wahr angenommene Tatsache falsch sein müsste (Widerspruch).)

Wir nehmen an, dass es ein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2$ gibt.

Dann lässt sich $a = \frac{m}{n}$ schreiben, wobei $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Ferner können wir annehmen, dass m und n keine gemeinsamen Teiler größer als 1 haben, also insbesondere nicht beide gerade sind. (sonst könnten wir den Bruch $\frac{m}{n}$ kürzen).

Es gilt $a^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$

Also gilt: $m^2 = 2n^2$

Lemma:

m ist gerade, d.h. $m = 2 \cdot k$ für $k \in \mathbb{Z}$

Einsetzen von $m = 2k$ in $(*)$ liefert:

$(2k)^2 = 2n^2$

$4k^2 = 2n^2$ | kürzen beider Seiten um 2 liefert: $2k^2 = n^2$

Lemma:

n ist gerade

$\frac{m}{n}$ gekürzter Bruch $\square$

Rückblick

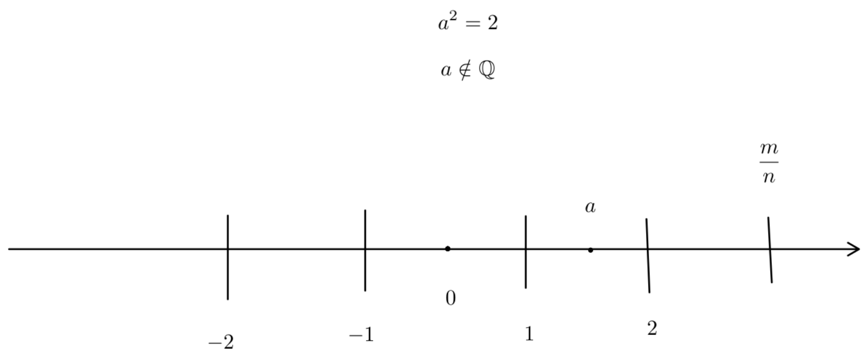
$B : a = \frac{m}{n}$ m, n haben keine Teiler größer als 1 B wahr

A: Es gibt eine rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2$

Annahme: A wahr

$A \Rightarrow \neg B$ wahr

Zahlengerade:



Wir können also die rationalen Zahlen zu reellen Zahlen erweitern. Die etwas aufwendige Konstruktion lassen wir weg. Wir begnügen uns mit der Vorstellung, dass sich jede reelle Zahl a als (eventuell unendlicher) Dezimalbruch darstellen lässt.

Die Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R}$

$$a = b_1 b_2 ... b_n, a_1 a_2 a_3 ...$$

$$a_1, ..., b_1, ... b_n \in \{0, 1, ..., 9\}$$

Die Menge der Zahlen $\mathbb{R} | \mathbb{Q}$ heißt die Menge der irrationalen Zahlen.

Beispiele: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, ...$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} (\subseteq \mathbb{C})$$

bis jetzt:

$|A| :=$ Anzahl der Elemente von A, falls A endlich ist.

Ist A unendlich, so schreibt man auch: $|A| = \infty$ "unendlich"

Bei endlichen Mengen: $A \subsetneq B$

$|A| \leq |B|$

Def.

Zwei Mengen A und B sind gleichmächtig, wenn es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt.

Bemerkung:

Sind A und B endlich, so gilt:

$|A| = |B| \Leftrightarrow$ es gibt $f : A \to B$ bijektiv

Beispiel:

$f : \mathbb{Z} \to \{\text{gerade Zahlen}\}$

$a \mapsto 2a$

f ist bijektiv

Definition

Eine Menge M heißt abzählbar, wenn M entweder endlich ist oder es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M$ gibt. Eine Menge, die nicht abzählbar ist, heißt überabzählbar.

Bemerkung:

$\mathbb{N}$ ist abzählbar:

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n \end{cases} \quad \text{"Identität"}$$

Bemerkung:

Eine Menge M ist genau dann abzählbar, wenn M entweder leer ist oder es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

Def.

Eine Surjektion $f : \mathbb{N} \to M$ heißt eine Aufzählung von M.

Bemerkung:

Ist M eine unendliche Menge (d.h. M hat unendlich viele Elemente) und existiert $f : \mathbb{N} \to M$ eine Aufzählung von M, so existiert eine Bijektion $f' : \mathbb{N} \to M$. (Also ist M abzählbar)

Beispiel:

Aufzählung von $\mathbb{Z}$:

$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3...$

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto \begin{cases} 0, n \in \{1, 2\} \\ \frac{n-2}{2}, n > 2 \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2}, n > 2 \text{ ungerade} \end{cases} \end{cases}$$

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8...
$\mathbb{Z}$	0	0	-1	1	-2	2	-3	3

Bem.

Eine Aufzählung $f : \mathbb{N} \to M$ können wir auch als $f(1), f(2), f(3), ...$ notieren.

Satz:(Cantor)

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar

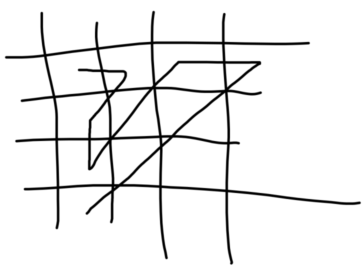
Beweis:

Wir zeigen zuerst, dass $\mathbb{Q}_{>0} := \{x : x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$ abzählbar.

	1	2	3	4	5	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	...
2	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	...
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	...
4	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	...
5	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Wir stellen uns eine unendliche Tabelle vor in der Zeilen und Spalten durch Elemente aus $\mathbb{N}$ numeriert sind.

Bruch $\frac{\text{Zeileneintrag}}{\text{Spalteneitrag}}$



Bem.

Jede rationale Zahl aus $\mathbb{Q}_{>0}$ kommt in der Aufzählung mehrfach vor.

Unsere Aufzählung von $\mathbb{Q}_{>0}$ sieht wie folgt aus:

$$q_1 = 1, q_2 = \frac{1}{2}, q_3 = 2, q_4 = 3, q_5 = 1, ...$$

Aus dieser Aufzählung erhalten wir leicht eine Aufzählung der Menge $\mathbb{Q}$ wie folgt:

$$0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, q_3, -q_3, ...$$

$$f(1), f(2), f(3), f(4), ...$$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ Aufzählung der rationalen Zahlen. $\square$

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind abzählbar.

Satz:

Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis:

Es reicht zu zeigen, dass die Menge $(0, 1) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ überabzählbar ist.

Wir führen den Widerspruchsbeweis durch.

D.h. Annahme: $(0, 1)$ ist abzählbar.

Sei $S : \mathbb{N} \to (0, 1)$ eine Aufzählung in Dezimaldarstellung.

$S_1 = 0, S_{11}, S_{12}, S_{13}...$

$S_2 = 0, S_{21}, S_{22}, S_{23}...$

$S_3 = 0, S_{31}, ...$

$\vdots$

Wir geben jetzt eine Zahl a an, die in dieser Darstellung nicht auftritt.

$a = 0, a_2 a_2 a_3...$

$$a_i := \begin{cases} 4, S_{ii} \neq 4 \\ 5, S_{ii} = 4 \end{cases}$$

a kommt nicht in der Aufzählung vor.