Kapitel I: Differentialrechnung für Fkt. $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Abbildungen aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

(1.1) Zahlenbereiche

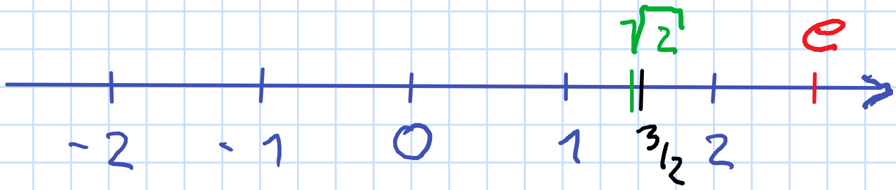
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$: Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$: Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$: Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$



- $x = \sqrt{2} \iff x^2 = 2,\ x > 0 \iff x^2 - 2 = 0,\ x > 0$
- $x = e \iff$?

(1.2) Abbildungen

Definition:
Eine Abbildung bzw. Funktion f aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt durch

(A1) Angabe einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ (Definitionsbereich von f)

(A2) eine eindeutige Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y = f(x)$ aus $\mathbb{R}$ zuordnet

Schreibweisen:

$x \in D \longmapsto y = f(x) \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\underbrace{f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad f: D \to \mathbb{R}}_{f \text{ ist Abb./Fkt. von } D \text{ in } \mathbb{R}}$

$\uparrow$ wird zugeordnet

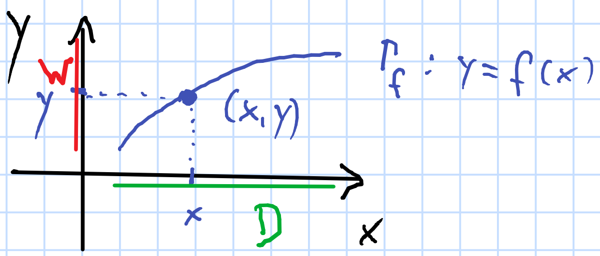
Sprechweisen:

- x : Argument von f, unabhängige Variable
- y : abhängige Variable
- $f(a)$: Funktionswert von f an der Stelle $x = a$
  Bild von f an der Stelle $x = a$

Bezeichnungen:

- Graph von f

$$\Gamma_f = \{(x,y) \mid x \in D,\ y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$



- Wertebereich von f

$$W = \{f(x) \mid x \in D\}$$

- Nullstellen

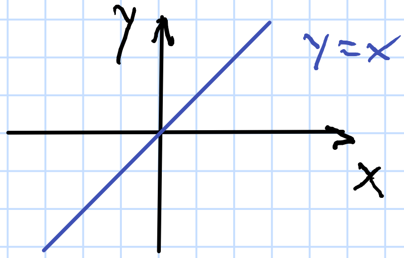
Argumente $x \in D$ mit $f(x) = 0$

(1.3) Beispiele

(a) Identische Abbildung

$id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $id_{\mathbb{R}}(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

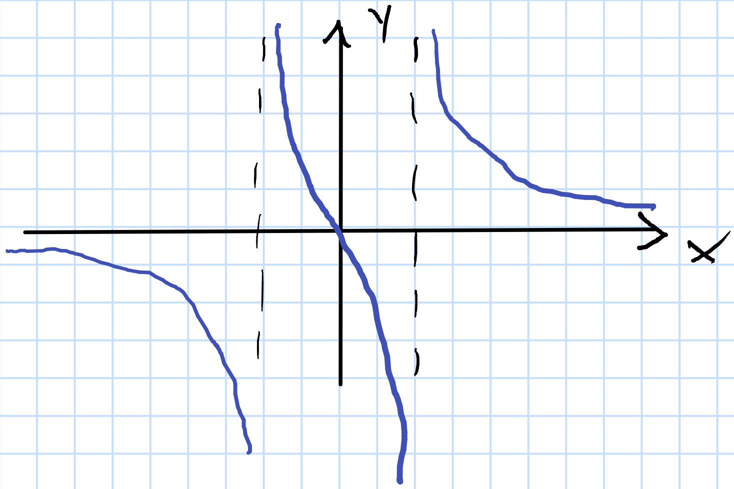
$D = W = \mathbb{R}$



(b) $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$

$D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, $W_1 = \mathbb{R}$

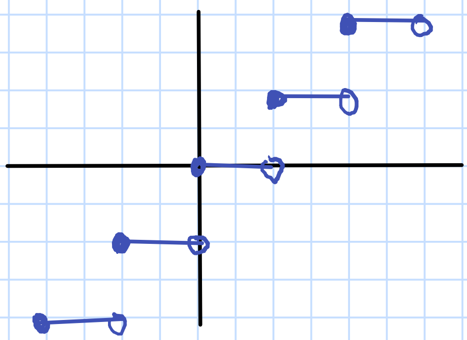
$D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} = [3, \infty)$, $W_2 = \{f(x) \mid x \geq 3\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{8} \geq y > 0\}$
$= (0, \frac{3}{8}]$



(c) Floor-Funktion

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lfloor x \rfloor$ = größte ganze Zahl $\leq x$

$D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{Z}$



$\lfloor 1{,}001 \rfloor = 1$

$\lfloor \pi \rfloor = 3$

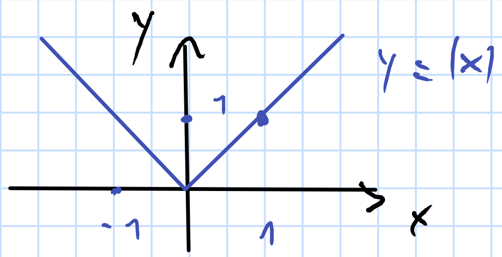
$\lfloor -0{,}01 \rfloor = -1$

analog: Ceiling-Funktion $\lceil x \rceil$ = kleinste ganze Zahl $\geq x$

d) Betragsfunktion

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

$D = \mathbb{R}$ $\quad W = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$



(1.4) Arithmetische Operationen für Funktionen

Sind $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Fkt., so lassen sich neue Funktionen bilden:

(a) Summe / Differenz

$f + g : D \to \mathbb{R}$ $\qquad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$f - g : D \to \mathbb{R}$ $\qquad (f-g)(x) := f(x) - g(x)$

Operation für Funktionen $\qquad$ „normale" Operation in $\mathbb{R}$

(b) Produkt

$f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ $\qquad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$

(c) Vielfache

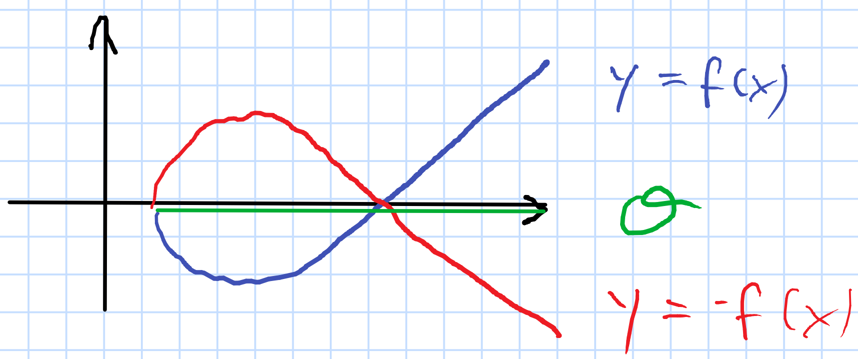
$\alpha \cdot f : D \to \mathbb{R}$ $\qquad (\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x)$

(d) Nullfunktion

$\mathcal{O} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{O}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Regel

- $f + \mathcal{O} = \mathcal{O} + f = f$
- $f + (-f) = \mathcal{O}$



4.5) Spezielle Funktionsklassen

(a) Polynomabbildungen

Eine Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad n, falls $a_n \neq 0$ ist.
Die Werte $a_0, \dots, a_n$ heißen dann die Koeffizienten des Polynoms f.

Nullpolynom : $f(x) = 0 \ \forall x$ (alle Koeff. $= 0$, $\operatorname{grad}(f) := -\infty$)
konstantes Polynom : $f(x) = a$ ($a \neq 0$, $\operatorname{grad}(f) = 0$)
lineares Polynom : $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$, $\operatorname{grad}(f) = 1$)

Satz

Ein Polynom vom Grad $n \geq 0$ hat höchstens n Nullstellen in $\mathbb{R}$.

(b) Exponentialfunktionen

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$ für ein $a > 0$ heißt allgemeine Exponentialfunktion

Satz:

Sind $a, b > 0$ reelle Zahlen, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $a^x = b^{x \cdot \log_b a}$

(c) weitere Funktionsklassen

- rationale Fkt. : $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ p, q Polynome
- Logarithmusfkt. : $\log_b x$ ($y = \log_b x \Leftrightarrow b^y = x$)
- trigonometr. Fkt. : $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$

2. Folgen

(2.1) Definition und Darstellung

(1) Definition

Eine Abbildung

$$a: \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

heißt (unendliche) Folge über $\mathbb{R}$. Man nennt dann

$$a_n := a(n)$$

das n-te Folgenglied der Folge a und n den Index; man schreibt dann

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_n)_{n \geq 1} = (a_n)$$

(2) Bildungsvorschriften

(a) verbal

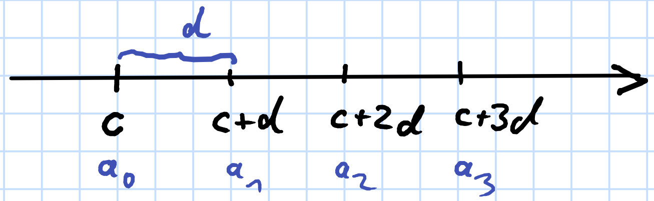
z. B. $\quad a_n = n\text{-te Primzahl}$

$$a = (2, 3, 5, 7, 11, \dots) \qquad a_{99} = ?$$

(b) explizit

- $a_n = c + d \cdot n \qquad c, d \in \mathbb{R}$ (arithmetische Folge)

  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots) = (c, c+d, c+2d, c+3d, \dots)$



- $a_n = a \cdot x^n \qquad n \geq 0 \qquad a, x \in \mathbb{R}$ (geometrische Folge)

  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots) = (a, ax, ax^2, ax^3, \dots)$

(c) rekursiv

- $\begin{cases} a_1 = 2 & \\ a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}} + \dfrac{a_{n-1}}{2} & n \geq 2 \end{cases}$ (Anfangsglied) (Rekursionsformel)

$a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$, ...

- $\begin{cases} a_1 = 1 \quad a_2 = 1 & \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & n \geq 3 \end{cases}$ Fibonacci-Folge, 1228

$a = (a_1, a_2, \ldots) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$

(2.2) Beweise durch vollständige Induktion

(1) Abspaltregel der Aussagenlogik

Sind die Aussagen A und $A \Rightarrow B$ wahr, so ist auch B wahr.

(2) Aussageform / Prädikat

- $A(n)$ $\quad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (keine Aussage, n Variable)
- $A(1)$ $\quad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (wahre Aussage)
- $A(2)$ $\quad 1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}$ (wahre Aussage)
- $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : A(n)}$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$
  Ist eine Aussage

(3) Beweis durch vollständige Induktion, Tiefe 1

$$\boxed{\begin{array}{l} A(1) \\ A(1) \Rightarrow A(2) \\ A(2) \Rightarrow A(3) \\ \vdots \end{array}} \quad \equiv \quad \boxed{\begin{array}{l} A(1) \\ A(2) \\ A(3) \\ \vdots \end{array}}$$

logisch äquivalent

$\leftarrow$ Abspaltregel $A(1),\ A(1) \Rightarrow A(2)$

$$\begin{array}{ccc} \| \! | & & \| \! | \\ \boxed{\underbrace{A(1)}_{\text{Induktionsanfang}} \wedge \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \Rightarrow A(n+1)}_{\text{Induktionsschritt}}} & & \boxed{\forall n \in \mathbb{N}: A(n)} \end{array}$$

I. Schritt

$$\underbrace{A(1)}_{\text{I. Anfang}} \to A(2) \to A(3) \to A(4) \to A(5) \to A(6) \to \ldots$$

Beispiel

Beh: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Bew: durch vollständige Induktion

Induktionsanfang $\quad (A(1)$ gilt$)$

Beh.: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

Bew: offensichtlich, da $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

Induktionsschritt $\quad (\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \Rightarrow A(n+1))$

Vor: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Beh: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Bew: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n+1$

$$\overset{\text{I.Vor.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\blacksquare$

(4) Beweis durch vollständige Induktion, Tiefe 2

$$\boxed{\begin{array}{l} A(1),\ A(2) \\ A(1) \wedge A(2) \Rightarrow A(3) \\ A(2) \wedge A(3) \Rightarrow A(4) \\ \vdots \end{array}} \equiv \boxed{\begin{array}{l} A(1),\ A(2) \\ A(3) \\ A(4) \\ \vdots \end{array}}$$

$$\boxed{A(1) \wedge A(2) \wedge \forall n \in \mathbb{N}: A(n) \wedge A(n+1) \Rightarrow A(n+2)} \qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}: A(n)}$$

Beispiel

Es sei $a = (a_1, a_2, \dots)$ die Fibonacci-Folge, d.h.

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

Dann gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$

$$a_n \geq \sqrt{2}^{\,n-2}$$

Beweis durch vollst. Induktion nach $n \geq 1$

Induktionsanfang ($A(1)$ und $A(2)$ gelten)

Beh: $a_1 \geq \sqrt{2}^{\,-1}$, $a_2 \geq \sqrt{2}^{\,0}$

Bew:
- $a_1 = 1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\,-1}$
- $a_2 = 1 \geq \sqrt{2}^{\,0}$

Induktionsschritt ($\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \wedge A(n+1) \Rightarrow A(n+2)$)

Vor: $a_n \geq \sqrt{2}^{\,n-2}$

$a_{n+1} \geq \sqrt{2}^{\,n-1}$

Beh: $a_{n+2} \geq \sqrt{2}^{\,n}$

Bew: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (Rekursionsvorschrift)

$\overset{\text{I.Vor.}}{\geq} \sqrt{2}^{\,n-1} + \sqrt{2}^{\,n-2} = \sqrt{2}^{\,n-2} \cdot (\sqrt{2} + 1)$

$\geq \sqrt{2}^{\,n-2} \cdot 2 = \sqrt{2}^{\,n-2} \cdot \sqrt{2}^{\,2} = \sqrt{2}^{\,n}$ $\blacksquare$

(5) Allgemeine vollständige Induktion

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: A(n)} \equiv \boxed{A(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N}: (A(1) \wedge \dots \wedge A(n)) \Rightarrow A(n+1)}$$

(2.3) Grenzwerte, Konvergenz von Folgen

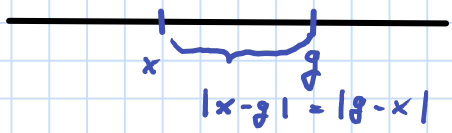
(1) Limesschreibweise

$$\lim_{n \to \infty} a_n = g \quad \text{oder} \quad a_n \to g \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow{n \to \infty} g$$

- Limes (Grenzwert) von a_n für n gegen unendlich ist gleich g.
- Folge (a_n) konvergiert für n gegen ∞ gegen g

(2) Approximation einer Zahl $g \in \mathbb{R}$

(a) $x \in \mathbb{R}$ heißt ε-Näherung von g, falls $|x-g| < \varepsilon$ ist



Abstand von x zu g

$|x-g|$: absoluter Fehler der Näherung x bzgl. g

ε : Fehlerschranke, $\varepsilon > 0$

Bsp:

$g = \sqrt{2} \approx 1{,}41142\ldots$

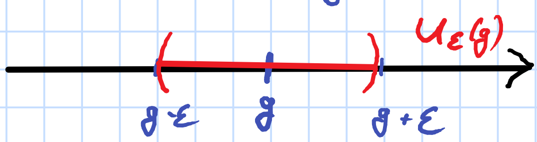
$x = \frac{17}{12} = 1{,}41\bar{6}$

$|x-g|$ lässt sich nicht exakt als Dezimalzahl angeben

$|x-g| < 0{,}003 = 3 \cdot 10^{-3} = \varepsilon$

(b) $|x-g| = \varepsilon \iff x-g = \pm\varepsilon \iff x = g \pm \varepsilon$

$|x-g| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x-g < \varepsilon \iff g-\varepsilon < x < g+\varepsilon$



$U_\varepsilon(g) = (g-\varepsilon, g+\varepsilon)$ ε-Umgebung von g

$x \in U_\varepsilon(g) \iff g-\varepsilon < x < g+\varepsilon \iff |x-g| < \varepsilon$

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ bedeutet

- für großes n wird der absolute Fehler $f_n = |a_n - g|$ beliebig klein

- für jede Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ gilt

$$a_n \in U_\varepsilon(g)$$

<u>für fast alle n</u> (= für alle bis auf endlich viele Ausnahmen), d.h. es gibt einen Index $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt $a_n \in U_\varepsilon(g)$

$$\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_N}_{\text{keine Forderung}}, \underbrace{a_{N+1}, a_{N+2}, \dots}_{\text{alle aus } U_\varepsilon(g)\text{, d.h. alles } \varepsilon\text{-Näherungen von } g}$$

<u>(3) Definition</u>

Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, Zahl $g \in \mathbb{R}$

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = g \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}: n>N \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon$

Kurzschreibweise $\forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n>N: |a_n - g| < \varepsilon$

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall S\in\mathbb{R}\ \exists N=N(S)\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}: n>S \Rightarrow a_n > S$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall S\in\mathbb{R}\ \exists N=N(S)\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}: n>S \Rightarrow a_n < S$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall S\in\mathbb{R}\ \underbrace{\exists N=N(\varepsilon)\ \forall n>N:}_{\text{für fast alle } n \text{ gilt}}\ a_n > S$$

(4) Sprechweisen

Folge (a_n) heißt

- **konvergent**, falls (a_n) einen endlichen Grenzwert hat
- **divergent**, falls (a_n) keinen endlichen GW hat
  - **bestimmt divergent** falls $a_n \to \pm\infty$
  - **unbestimmt divergent** falls (a_n) keinen GW hat

Nullfolge Folge mit GW 0

(5) Beispiel

Es sei (a_n) die Folge mit $a_n = 2 + \frac{\cos(n)}{n} \quad n \geq 1$

Beh: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$

Bew:

- z.z. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n: \; n > N \Rightarrow |a_n - 2| < \varepsilon$
- $f_n = |a_n - 2| = \left|\frac{\cos(n)}{n}\right| = \frac{|\cos(n)|}{n}$
- $f_n < \varepsilon$ lässt sich nicht nach n auflösen
- $f_n = \frac{|\cos(n)|}{n} \leq \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$
- $N(\varepsilon) := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$
- $n > N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{n} \geq |a_n - 2|$

  Also ist $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$.

- $\varepsilon = \frac{1}{10} \Rightarrow N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil = 10$

  Ab dem 11. Folgenglied ist der absolute Fehler $f_n < \frac{1}{10}$

- $\varepsilon = \frac{1}{100} \Rightarrow N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil = 100$

  Ab dem 101. Folgenglied ist $f_n < \frac{1}{100}$

(2.4.) Grenzwertregeln

Es seien (a_n), (b_n), (c_n) Folgen über $\mathbb{R}$ und es seien $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

(G1) $a_n \to a$ $\quad b_n = a_n \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad b_n \to a$

(G2) Hat (a_n) den GW a, so hat jede Teilfolge (b_n) von (a_n) den GW a

Typische Teilfolgen von $(a_n) = (a_1, a_2, \dots)$

$(b_n) = (a_2, a_4, a_6, \dots)$: $b_n = a_{2n}$ $\quad n \geq 1$ (gerade Folgenglieder)
$(b_n) = (a_1, a_3, a_5, \dots)$: $b_n = a_{2n-1}$ $\quad n \geq 1$ (ungerade Folgenglieder)
$(b_n) = (a_5, a_6, a_7, \dots)$: $b_n = a_{n+4}$ $\quad n \geq 1$ (verschobener Anfang)

Bsp: $a_n = (-1)^n \cdot n \qquad (a_n) = (-1, 2, -3, 4, -5, \dots)$

- Teilfolge $b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} \cdot 2n = 2n \qquad b_n \to \infty$
- Teilfolge $c_n = a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} \cdot (2n-1) = -(2n-1) \qquad c_n \to -\infty$
- Teilfolgen (b_n) und (c_n) haben verschiedene GW, also kann (a_n) keinen GW haben

(G3) Grenzwertübergang

Besitzen die Folgen (b_n) und (c_n) einen GW, so gelten die folgenden Aussagen:

$$\boxed{b_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} c_n}$$

sowie

$$\boxed{b_n \leq a_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0, \ \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = g}$$

Bsp:

$$a_n = \frac{\sin(n)}{n}, \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad -\frac{1}{n} \to 0, \ \frac{1}{n} \to 0 \Longrightarrow a_n \to 0$$

(G4) Fehlerfolge

$$\boxed{a_n \to g \quad \Longleftrightarrow \quad f_n = |a_n - g| \to 0 \qquad (g \in \mathbb{R})}$$

(G5) Nullfolge, Kehrwert

$$\boxed{\begin{array}{llll} a_n \to 0, \ a_n > 0 \ \forall n \geq n_0 & \Longrightarrow & \frac{1}{a_n} \to +\infty \\ a_n \to 0, \ a_n < 0 \ \forall n \geq n_0 & \Longrightarrow & \frac{1}{a_n} \to -\infty \\ a_n \to \pm\infty & \Longrightarrow & \frac{1}{a_n} \to 0 \end{array}}$$

(G6) Rechnen mit Grenzwerten

Gilt $a_n \to a$ und $b_n \to b$, so gelten folgende Aussagen

	$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$	$a = \infty$, $b \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$	$a = \infty$, $b = \infty$
$(a_n + b_n) \to$	$a + b$	∞	∞	∞
$(a_n - b_n) \to$	$a - b$	∞	$-\infty$	?
$(a_n \cdot b_n) \to$	$a \cdot b$	∞ für $b > 0$ $-\infty$ für $b < 0$? für $b = 0$	analog ←	∞
$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to$	$\frac{a}{b}$ $b \neq 0$? $a = b = 0$ ∞ $b = 0, a \neq 0$ $\frac{a_n}{b_n} > 0$ $-\infty$ $b = 0, a \neq 0$ $\frac{a_n}{b_n} < 0$	∞ $b_n > 0$ $-\infty$ $b_n < 0$	0	?
$a_n^{b_n} \to$ $(a_n > 0)$	a^b $(a,b) \neq (0,0)$? $(a,b) = (0,0)$	∞ $b > 0$ 0 $b < 0$? $b = 0$	∞ $a > 1$ 0 $0 \leq a < 1$? $a = 1$	∞

Unbestimmte Ausdrücke

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

Beispiele

(a) $a_n = \frac{n+1}{2n+1} \to ?$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$

$$a_n = \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \to \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

b) $a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{1/n} \to 2^0 = 1$

c) $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n} \to \infty^0$ unbestimmt

Beh: $a_n \to 1$

Bew: • Fehler $f_n = |a_n - 1| = |\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1$

• Abschätzung

$(f_n + 1)^n = (\sqrt[n]{n})^n = n$

$$n = (f_n+1)^n \underset{\substack{\nearrow \\ \text{binom.} \\ \text{Lehrsatz}}}{=} 1 + \binom{n}{1} f_n + \underline{\binom{n}{2} f_n^2} + \ldots + \binom{n}{n} f_n^n$$

$\Rightarrow \quad n > \binom{n}{2} f_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} f_n^2 \qquad \forall n \geq 2$

$\Rightarrow \quad f_n^2 < \frac{2}{n-1}$

$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \leq f_n \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}$ Grenzübergang $n \to \infty$, (G3), (G4)

$\Rightarrow \quad f_n \to 0$ und somit $a_n \to 1$

d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to (1+0)^\infty = 1^\infty$ Unbestimmt

(G7) Grenzwerte von Wurzeln

Sei (a_n) Folge mit $a_n \geq 0 \; \forall n \geq 1$. Ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Bsp: $\lim\limits_{n\to 0} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} = 1+0 = 1$

(2.5.) Monotonie und Beschränktheit

(1) Monotonie

Eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\text{streng monoton wachsend}} \\ \underline{\text{monoton wachsend}} \\ \underline{\text{streng monoton fallend}} \\ \underline{\text{monoton fallend}} \end{array}\right\} \quad \text{falls } \forall x_1, x_2 \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \left\{\begin{array}{c} < \\ \leq \\ > \\ \geq \end{array}\right\} f(x_2)$$

Für Zahlenfolgen (a_n) gilt dann

$$(a_n) \text{ ist } \left\{\begin{array}{c} \text{str. m. w} \\ \text{m. w.} \\ \text{str. m. f.} \\ \text{m. f.} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n \left\{\begin{array}{c} < \\ \leq \\ > \\ \geq \end{array}\right\} a_{n+1}$$

Bsp: (a_n) mit $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

- $(a_1, a_2, \ldots) = (2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots)$ monoton fallend
- $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq n+1$ gilt für alle n

(2) Beschränktheit

S heißt $\left\{\begin{array}{l} \underline{\text{obere}} \\ \underline{\text{untere}} \end{array}\right\}$ Schranke von (a_n), falls gilt $\left\{\begin{array}{l} a_n \leq S \\ a_n \geq S \end{array}\right\} \forall n \geq 1$

(a_n) heißt nach oben/unten beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists$ obere/untere Schranke von (a_n)

(a_n) heißt beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists$ obere und untere Schranke von (a_n)

Bsp: (a_n) mit $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$

- $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \quad \forall n \geq 1$
- $S = 1$ untere Schranke von (a_n)
- $S = 2$ obere Schranke von (a_n)

$\Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt

(3) Konvergenzverhalten

(a) (a_n) ist monoton wachsend und nach oben beschränkt

$\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent (d.h. hat endlichen GW)

(b) (a_n) ist monoton wachsend und nach oben unbeschränkt

$\Rightarrow a_n \to \infty$

(c) (a_n) ist monoton fallend und nach unten beschränkt

$\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent

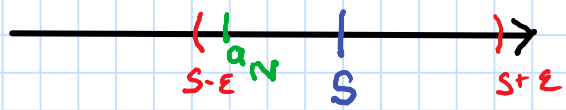
(d) (a_n) ist monoton fallend und nach unten unbeschränkt

$\Rightarrow a_n \to -\infty$

(e) (a_n) konvergent $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt

Beweis

a) • Sei S die kleinste obere Schranke von (a_n)



$\Rightarrow$ Für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist $S-\varepsilon$ keine obere Schranke

$\Rightarrow$ Es gibt ein N mit $a_N > S-\varepsilon$

• S ist obere Schranke von (a_n) also $a_n \leq S \;\forall n$

• Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$n > N \Rightarrow a_N \leq a_n$ (Monotonie)

$\Rightarrow S-\varepsilon < a_N \leq a_n \leq S < S-\varepsilon$

$\Rightarrow S-\varepsilon < a_n < S+\varepsilon$

$\Rightarrow |a_n - S| < \varepsilon$

Insgesamt: $\forall \varepsilon > 0 \;\exists N \;\forall n: \; n > N \Rightarrow |a_n - S| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = S$

b) (a_n) nach oben unbeschränkt $\Rightarrow \nexists$ obere Schranke S

$\Rightarrow \forall S \in \mathbb{R}$: S ist keine obere Schranke

$\Rightarrow \forall S \in \mathbb{R}$: $\neg \forall n : a_n \leq S$

$\Rightarrow \forall S \in \mathbb{R} \quad \exists N : a_N > S$

$\Rightarrow \forall S \in \mathbb{R} \quad \exists N \quad \forall n : \quad n > N \Rightarrow a_n \geq a_N > S$

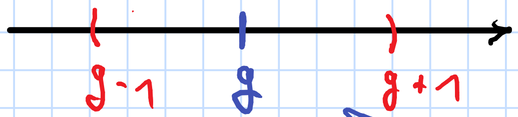
Monotonie

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$

c) analog zu a

d) analog zu b

e) (a_n) konvergent mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$



nur $a_1, .., a_N$ evtl. außerhalb

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N : \quad |a_n - g| < \varepsilon$

gilt auch für $\varepsilon = 1$

$\Rightarrow \quad \exists N : \forall n > N \quad g - 1 \leq a_n \leq g + 1$

$\Rightarrow$ obere Schranke $= \max \{a_1, .., a_N, \; g+1\}$

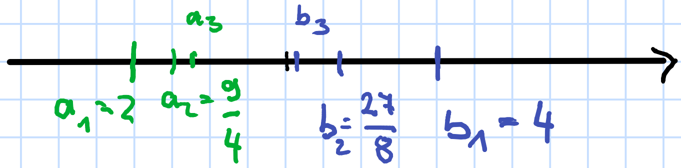
untere Schranke $= \min \{a_1, .., a_N, \; g-1\}$

(2.6.) Die Eulersche Zahl e

Betrachten die Folgen (a_n) und (b_n) mit

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

für $n \geq 1$



(1) Zwei Ungleichungen

(a) Für $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ gilt

$$\underbrace{\sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m}}_{\text{arithmetisches Mittel}}$$

b) Für $x \geq 0$ aus $\mathbb{R}$ und $n \geq 1$ aus $\mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n+1]{x^n} \leq \frac{1+nx}{n+1}$$

Folgt aus a) mit $m = n+1$ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, $x_{n+1} = 1$

(2) Beh: Folge (a_n) ist monoton wachsend

Bew:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1 + n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} \qquad \left((b) \text{ mit } x = 1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$$

∎

(3) Beh: Folge (b_n) ist monoton fallend

Bew: analog, siehe Lehrbücher

(4) $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot a_n > a_n$ da $1+\frac{1}{n} \geq 1$

(5) $a_n \overset{(4)}{\leq} b_n \overset{(3)}{\leq} b_1 = 4 \Rightarrow (a_n)$ nach oben beschr.

$\overset{(2)}{\Rightarrow} (a_n)$ konvergent

Definition $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (Eulersche Zahl)

Folgerung $\quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \to e \cdot 1 = e$

- $b_n - a_n = a_n \left(1+\frac{1}{n}\right) - a_n = a_n \cdot \frac{1}{n} \qquad 2 \leq a_n \leq 4$
- $\frac{2}{n} \leq b_n - a_n \leq \frac{4}{n}$
- $|a_n - e| \leq \frac{4}{n}$

Bsp: $a_{500} = 2{,}715\ldots$, $e = 2{,}7182 \quad |a_{500} - e| \leq \frac{4}{500}$

(6) Satz

Ist $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, so ist $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$

Beispiele

(a) $$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n/2}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 \to e^2 \qquad \left(x_n = \frac{n}{2} \to \infty\right)$$

(b) $$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{-2} \to e^{-2} \qquad \left(x_n = -n \to -\infty\right)$$

(c) $$\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{5n-2} = \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}}_{\to e}\right)^{\underbrace{\frac{5n-2}{3n+1}}_{\to 5/3}} \to e^{5/3}$$

(7) Eine schnelle e-Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ mit

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Dann gilt (siehe Lehrbücher)

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq s_n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$$

Da $a_n \to e$ und $b_n \to e$ folgt $s_n \to e$

Bsp: $e = 2{,}71828$ $\qquad s_7 = \underline{2{,}7182}5$ $\qquad a_7 = \underline{2}{,}546$

(2.7.) Landau - Notation

(1) Anwendung

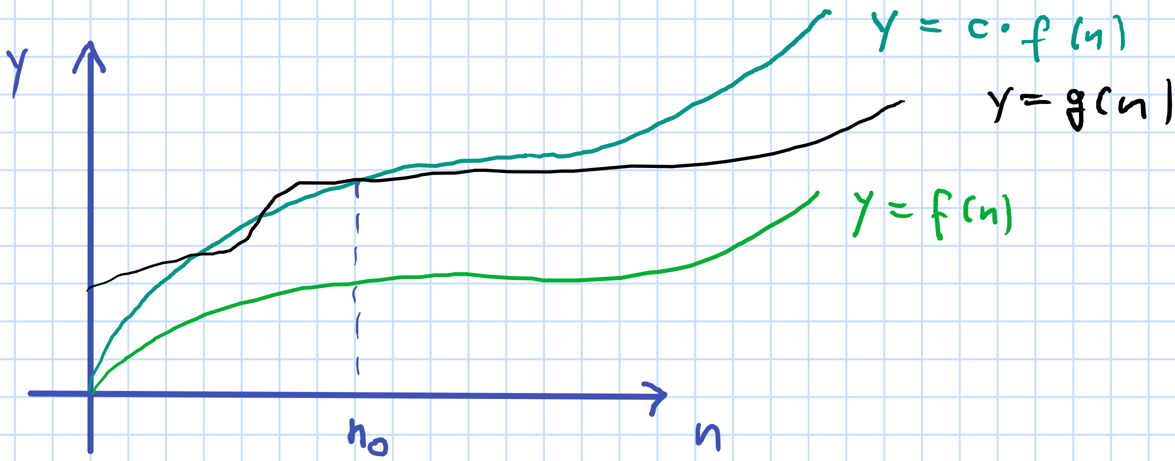
(a) Laufzeitanalyse $T(n)$ von Algorithmen
$T(n)$ = Anzahl der „Elementarschritte"
des Algorithmus bei Eingabe eines
Beispiels der „Größe" n, $T: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

(b) Asymptotisches Verhalten von Folgen $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
also Verhalten für $n \to \infty$

(2) Die Groß - $\mathcal{O}$ - Notation

Für eine Folge $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert man die Klasse

$$\boxed{\mathcal{O}(f) = \{ g: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : |g(n)| \leq c \cdot |f(n)| \}}$$



Bemerkung

Statt $g \in \mathcal{O}(f)$ bzw $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$
schreibt man auch $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ und
liest

$$\boxed{g(n) \text{ ist groß-}\mathcal{O} \text{ von } f(n)}$$

Kriterium

(K1) Ist $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| = g \in \mathbb{R}$, so ist $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$

(K2) Ist $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| = \infty$, so ist $g(n) \neq \mathcal{O}(f(n))$ also $g \notin \mathcal{O}(f)$

Beweis von (K1)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| = g \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : \left|\ \left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| - g\ \right| < \varepsilon$$

Gilt auch für $\varepsilon = 1$: $\exists n_0\ \forall n > n_0 : g - 1 < \frac{|g(n)|}{|f(n)|} < g + 1$

$$\Rightarrow \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ |g(n)| < \underbrace{(g+1)}_{=:c} \cdot |f(n)|$$

$$\Rightarrow \exists c\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : |g(n)| < c \cdot |f(n)|$$

Beweis von K2

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| = \infty \Rightarrow \forall S\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ \frac{|g(n)|}{|f(n)|} > S$$

$$\Rightarrow \forall S\ \forall n_0\ \exists n > n_0\ \ |g(n)| \geq S \cdot |f(n)|$$

$$\Rightarrow \forall c\ \forall n_0\ \exists n > n_0\ \ |g(n)| \geq c \cdot f(n)$$

$$\Rightarrow g \notin \mathcal{O}(f)$$

$\blacksquare$

Beispiele

(a) $5n^3 + 7n^2 - 70 = \mathcal{O}(n^3)$, da

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{5n^3 + 7n^2 - 70}{n^3}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(5 + \frac{7}{n} - \frac{70}{n^3}\right)}{\cancel{n^3} \cdot 1} = 5 \in \mathbb{R}$$

(b) $n^3 = \mathcal{O}(5n^3 + 7n^2 - 70)$, da $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{5n^3 + 7n^2 - 70} = \frac{1}{5} \in \mathbb{R}$

(c) $n^3 = \mathcal{O}(n^4)$, da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^4} = 0 \in \mathbb{R}$

(d) $n^4 \neq \mathcal{O}(n^3)$, da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^3} = \infty$

(e) $g(n) = \mathcal{O}(1) \Leftrightarrow \exists c > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ |g(n)| < c$

$\Leftrightarrow g(n)$ ist beschränkt

Regeln

(R1)
$$\left.\begin{array}{l} g_1(n) = \mathcal{O}(f_1(n)) \\ g_2(n) = \mathcal{O}(f_2(n)) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} g_1(n) \cdot g_2(n) = \mathcal{O}(f_1(n) \cdot f_2(n)) \\ g_1(n) + g_2(n) = \mathcal{O}(\max\{f_1(n), f_2(n)\}) \end{array}$$

(R2) $c \cdot f(n) = \mathcal{O}(f(n)) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

(R3) $h(n) = \mathcal{O}(g(n))$, $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow h(n) = \mathcal{O}(f(n))$

(R4) $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Leftrightarrow \mathcal{O}(g(n)) \subseteq \mathcal{O}(f(n))$

Bemerkung

Ist $g(n) = 5n \ g_1(n) + (1-n) \ g_2(n)$ mit $g_1(n) = \mathcal{O}(1)$ und $g_2(n) = \mathcal{O}(n^2)$ so schreibt man

$$g(n) = (5n) \ \mathcal{O}(1) + (1-n) \ \mathcal{O}(n^2)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} g(n) &= (5n) \ \mathcal{O}(1) + (1-n) \ \mathcal{O}(n^2) \\ &= \mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{O}(n^2) \\ &= \mathcal{O}(n \cdot 1) + \mathcal{O}(n \cdot n^2) && \text{(R1)} \\ &= \mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n^3) \\ &= \mathcal{O}(n^3) && \text{(R1)} \end{aligned}$$

Vorsicht

Ist $g(n) = \mathcal{O}(n)$ so ist $g(n) = \mathcal{O}(n^3)$ da $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^3)$ da $n = \mathcal{O}(n^3)$. Es gilt aber nicht $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^3)$ da $\mathcal{O}(n^3) \not\subseteq \mathcal{O}(n)$ da $n^3 \neq \mathcal{O}(n)$ ist.

Komplexitätsklassen

$g(n)$	Laufzeit
$\mathcal{O}(1)$	konstant
$\mathcal{O}(\log_a n)$	logarithmisch, $a > 1$
$\mathcal{O}(n)$	linear
$\mathcal{O}(n^2)$	quadratisch
$\vdots$	
$\mathcal{O}(n^k)$	polynomial
$\vdots$	
$\mathcal{O}(a^n)$	exponentiell, $a > 1$

$$\mathcal{O}(1) \subseteq \mathcal{O}(\log_a n) \subseteq \mathcal{O}(n) \subseteq .. \subseteq \mathcal{O}(n^k) \subseteq .. \subseteq \mathcal{O}(a^n)$$

(3) Weitere Landau-Symbole

(a) $\Omega(f) = \{ g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{O}(g) \}$ (Groß-Omega)

(b) $\Theta(f) = \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f)$ (Groß-Theta)

(c) $o(f) = \{ g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \}$ (klein-o)

(d) $\omega(f) = \{ g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f \in o(g) \}$ (klein-Omega)

(e) $g \sim f \iff \lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1$ (f und g asymptotisch gleich)

Bemerkung

Statt $g(n) \in \Omega(f(n))$, $g(n) \in o(f(n))$, ...
schreibt man wieder $g(n) = \Omega(f(n))$, $g(n) = o(f(n))$ u.s.w.

Kriterium

(K3) $g(n) = \Omega(f(n)) \iff f(n) = O(g(n))$

(K4) $g(n) = \Theta(f(n)) \iff g(n) = O(f(n))$ und $f(n) = O(g(n))$

(K5)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \begin{cases} 0 & \Rightarrow g(n) = o(f(n)),\ g(n) = O(f(n)),\ f(n) = \omega(g(n)),\ f(n) = \Omega(g(n)) \\ g \neq 0 & \Rightarrow g(n) = O(f(n)),\ g(n) = \Omega(f(n)),\ g(n) = \Theta(f(n)) \\ & \quad f(n) = O(g(n)),\ f(n) = \Omega(g(n)),\ f(n) = \Theta(g(n)) \\ \infty & \Rightarrow g(n) = \omega(f(n)),\ g(n) = \Omega(f(n)),\ f(n) = o(g(n)),\ f(n) = O(g(n)) \end{cases}$$

Beispiel

Ist $p(n)$ Polynom vom Grad $k \geq 0$, so gilt $p(n) = \Theta(n^k)$

Insbesondere gilt dann auch $O(p(n)) = O(n^k)$

Beweis

- $p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$, $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$
- Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k\left(a_k + a_{k-1}\cdot\frac{1}{n} + \dots + a_0 \cdot \frac{1}{n^k}\right)}{n^k} = a_k \neq 0$$

- Aus (K5) folgt dann $p(n) = \Theta(n^k)$

Regeln

(R5) $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$ folgt aus K1

(R6) $g(n) \sim f(n) \Rightarrow g(n) = \Theta(f(n))$ folgt aus K5

(4) Stirlingsche Formel

(a) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

(b) $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

3. Reihen

(3.1.) Einführung

(1) Definition

Ist $(a_k) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ eine Folge, so heißt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

die n-te Partialsumme über (a_k). Die Folge (s_n) wird dann (unendliche) <u>Reihe</u> über (a_k) genannt.

Bemerkungen

(1) Die Summe kann auch bei $k = 1, 2, \dots$ anfangen

(2) Reihen sind spezielle Folgen $\Rightarrow$ alles über Folgen anwendbar

(2) Bezeichnungen

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$: <u>Reihe</u> über (a_k) (= Partialsummenfolge (s_n))
  a_k heißt <u>k-tes Glied</u> der Reihe

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$: $S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$, S heißt dann <u>Summe der Reihe</u> oder <u>Reihenwert</u>

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist
  - <u>konvergent</u>, falls $\lim_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$
  - <u>bestimmt divergent</u>, falls $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$
  - <u>unbestimmt divergent</u>, falls GW nicht existiert

Bsp: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$, Reihe ist konvergent

(3) Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $x \in \mathbb{R}$

(a) Partialsumme: $s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \ldots + x^n = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & x \neq 1 \\ n+1, & x = 1 \end{cases}$

Beweis

- $x = 1 \Rightarrow s_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$
- $x \neq 1$ $\quad s_n \cdot (1-x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot (1-x) = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1}$

$$= (1 + \cancel{x} + \ldots + \cancel{x^n}) - (\cancel{x} + \cancel{x^2} + \ldots + \cancel{x^n} + x^{n+1})$$

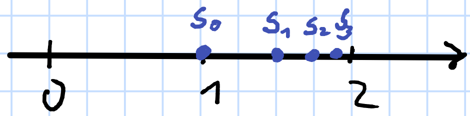
$$= 1 - x^{n+1}$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x| < 1 \quad \text{da } x^{n+1} \to 0 \\ \infty & x \geq 1 \\ \text{nicht existent} & x \leq -1 \end{cases}$$

(b) Summe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$

Bsp: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$



(4.) Notwendiges Konvergenzkriterium

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow$ (a_k) ist Nullfolge, d.h. $a_k \to 0$

Beweis

- $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergent $\Rightarrow s_n \to S \in \mathbb{R}$
- $s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k$ auch konvergent $\Rightarrow s_{n+1} \to S \in \mathbb{R}$
- $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$

$$\downarrow \qquad \downarrow\ n\to\infty \qquad \downarrow$$

$$S = S + \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(5) Satz

Es sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge. Dann gilt für beliebiges $m \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{k=m}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

Beweis

Sei $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\tilde{s}_n = \sum_{k=m}^{\infty} a_k$

Dann gilt $s_n = \tilde{s}_n + \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} a_k}_{=: d \in \mathbb{R}}$

$(\Rightarrow)$ $\lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n = \lim_{n\to\infty} s_n + d$

$(\Leftarrow)$ $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n - d$

(3.2) Reihen mit nichtnegativen Gliedern

(1) Konvergenzverhalten

Betrachten Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{mit} \quad a_k \geq 0 \quad \text{für alle } k$$

Dann gilt für $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

d.h. die Reihe (= Partialsummenfolge s_n) ist monoton wachsend

$\Rightarrow$ Ist die Reihe nach oben beschränkt, so ist sie konvergent, ansonsten ist sie bestimmt konvergent gegen ∞.

(2) Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ bestimmt divergent

Beweis:

- $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

- Für $n \geq 2^m$ mit $m \in \mathbb{N}$ gilt dann:

$$s_n \geq s_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ Summanden}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ Summanden}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ Summanden}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1} \text{ Summanden}}$$

$$s_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \dots + \frac{2^{m-1}}{2^m} = 1 + \frac{m}{2}$$

$\Rightarrow$ $s_n \geq 1 + \frac{m}{2}$ für beliebiges m also ist s_n nach oben nicht beschränkt $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = \infty$

$\square$

(3) Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent

Beweis:

- $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

- $k(k-1) < k^2 \Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$\Rightarrow$ $s_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$

$s_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$

$\Rightarrow$ s_n nach oben beschränkt also Reihe konvergent

$\lim_{n \to \infty} s_n \leq 2$

(4) Vergleichskriterium

Gegeben seien 2 Reihen (a_k), (b_k) mit $0 \le a_k \le b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Weiterhin bezeichnen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $\tilde{s}_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ die entsprechenden Partialsummen. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} s_n \le \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n$

also $0 \le \sum_{k=0}^{\infty} a_k \le \sum_{k=0}^{\infty} b_k$

Daraus ergibt sich.

(a) Majorantenkriterium

$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent $(<\infty)$ $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent

($\sum b_k$ heißt dann konvergente Majorante von $\sum a_k$)

b) Minorantenkriterium

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bestimmt divergent gegen ∞ $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ bestimmt divergent

($\sum a_k$ ist divergente Minorante von $\sum b_k$)

Beispiele

1) $\sqrt{k} < k \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{k}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ divergente Minorante

2) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \le \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\text{konvergente Majorante}} \le 2$$

Ähnliche Rechnung geht auch für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{10}k^3 + k}$

aber die Ungleichung gilt erst ab einem bestimmten

$\Rightarrow$ komplizierte Rechnerei

Besser: Nutzen $\mathcal{O}$-Notation

Satz 1

Gegeben seien zwei Reihen $\sum\limits_{k=n_a}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=n_b}^{\infty} b_k$ mit $a_k, b_k \geq 0$ für fast alle k. Weiterhin sei $a_k = \mathcal{O}(b_k)$ $\{\Rightarrow b_k = \Omega(a_k)\}$. Dann gelten folgende Aussagen

(a) modifiziertes Majorantenkriterium

$$\sum b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum a_k \text{ konvergent}$$

(b) modifiziertes Minorantenkriterium

$$\sum a_k \text{ bestimmt divergent} \Rightarrow \sum b_k \text{ bestimmt divergent}$$

Beweis

- a_k und b_k sind ≥ 0 für fast alle $k \in \mathbb{N}$
  $\Rightarrow \exists N : \forall k > N : \quad a_k \geq 0, \; b_k \geq 0$
- $a_k = \mathcal{O}(b_k) \overset{(3.1)}{\Longrightarrow} \exists c > 0 \; \exists n_0 > N \; \forall k \geq n_0 \quad 0 \leq a_k \leq c \cdot b_k$

(a) $\sum\limits_{k=n_b}^{\infty} b_k$ konvergent $\Rightarrow \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} b_k$ konvergent mit $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} b_k = S$

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k \qquad \tilde{s}_n = \sum_{k=n_0}^{n} c \cdot b_k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n = \tilde{S} = c \cdot S$$

(s_n) und $(\tilde{s}_n)$ sind monoton wachsend

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} c\, b_k = \tilde{s}_n$$

$$\Rightarrow s_n \leq \tilde{s}_n \leq \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n = \tilde{S} \qquad (*)$$

$\Rightarrow (s_n)$ ist monoton wachsend und beschränkt also konvergent

$\overset{\text{Satz (3.1)}}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=n_a}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent

(b) $\sum\limits_{k=n_a}^{\infty} a_k$ divergent $\Rightarrow \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ divergent $\Rightarrow (s_n)$ unbeschränkt $\overset{(*)}{\Rightarrow} (\tilde{s}_n)$ unbeschränkt $\Rightarrow \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} c\, b_k$ div. $\Rightarrow \sum\limits_{k=n_b}^{\infty} b_k$ divergent $\square$

Satz 2

Seien (a_k) und (b_k) zwei Folgen, die fast überall nichtnegativ sind. Gilt $a_k = \Theta(b_k)$, so gilt

$$\sum a_k \text{ konvergent} \iff \sum b_k \text{ konvergent}$$

Beweis: Ergibt sich direkt aus Satz 1

Beispiele

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{10}{k^3+k}$

$$a_k = \frac{10}{k^3+k} \qquad a_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \qquad \text{da } \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{10}{k^3+k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{10k^2}{k^3+k} = 0$$

$a_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$, $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergent $\Rightarrow \sum a_k$ konvergent

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\ln k}$

- $a_k = \dfrac{1}{k+\ln k} = \Theta\left(\frac{1}{k}\right)$ da $\dfrac{\frac{1}{k+\ln k}}{\frac{1}{k}} = \dfrac{k}{k+\ln k} \to 1 \neq 0$
- $\sum \frac{1}{k}$ divergent $\Rightarrow \sum a_k$ divergent

(3.3) Cauchykriterium

(1) Betrachten beliebige Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \underbrace{a_0 + a_1 + \dots + a_n}_{\text{Partialsumme}} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots}_{\text{Restreihe}} = S \quad ?$$

Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Restreihe

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

$$s_n + r_n = S \qquad r_n = S - s_n$$

absoluter Fehler

$$f_n = |s_n - S| = |S - s_n| = |r_n|$$

(2) Cauchykriterium

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\iff \lim_{n\to\infty} r_n = 0$

$\iff \lim_{n\to\infty} f_n = 0$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m, n > n_0 : |s_m - s_n| < \varepsilon$

(3.4.) Alternierende Reihen

(1) Alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \overset{?}{=} S$$

Restreihe / Fehler

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

- $$r_1 = \underbrace{\underline{-\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{3}}_{\leq 0} \underbrace{- \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}}_{\leq 0} \underbrace{- \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7}}_{\leq 0} - \tfrac{1}{8} + \dots$$
  $$\left(\underbrace{\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}}_{\geq 0},\ \underbrace{\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}}_{\geq 0},\ \underbrace{\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8}}_{\geq 0}\right)$$

  $$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq r_1 \leq 0 \qquad f_1 = |r_1| \leq \frac{1}{2}$$

- $$r_2 = \underbrace{\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}}_{\geq 0} + \underbrace{\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}}_{\geq 0} + \underbrace{\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8}}_{\geq 0} + \tfrac{1}{9} - \dots$$
  $$\left(\underbrace{-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}}_{\leq 0},\ \underbrace{-\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7}}_{\leq 0},\ \underbrace{-\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9}}_{\leq 0}\right)$$

  $$\Rightarrow \quad 0 \leq r_2 \leq \frac{1}{3} \qquad f_2 = |r_2| \leq \frac{1}{3}$$

- allgemein: $\quad 0 \leq f_n = |r_n| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

  $\Rightarrow$ Reihe ist konvergent und $f_n = |s_n - S| = |r_n| \leq \frac{1}{n+1}$

(2) Leibnizkriterium

Gegeben sei eine alternierende Reihe, d.h. Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{mit} \quad a_k \cdot a_{k+1} < 0 \quad \text{für alle } k$$

(wechselndes Vorzeichen). Ist $(|a_k|)$ eine monoton fallende Nullfolge, d.h. $|a_{k+1}| \le |a_k|$ für alle k und $\lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$, so ist die Reihe konvergent. Ist

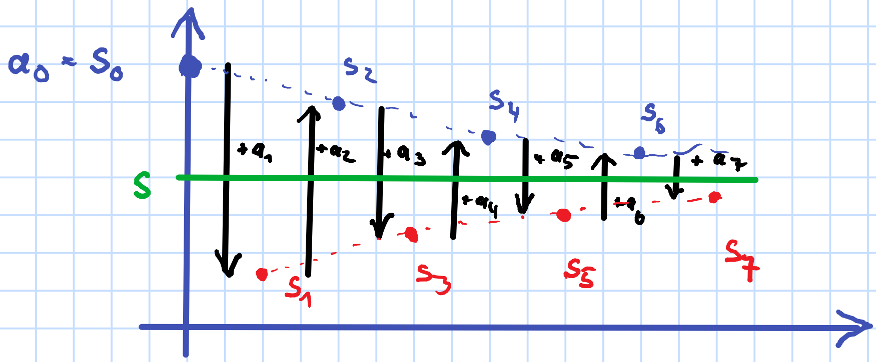
$$\sum_{k=0}^{n} a_k = S$$

so gilt für den absoluten Fehler $f_n = |r_n| = |S_n - S| \le |a_{n+1}|$

Beweis:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

o.B.d.A $\quad a_0 \ge 0$



Beobachtung:

- blaue Folge (S_{2n}) ist monoton fallend $\quad S_{2n+2} = S_{2n} + \underbrace{a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\le 0} \le S_{2n}$
- rote Folge (S_{2n+1}) ist monoton wachsend $\quad S_{2n+3} = S_{2n+1} + \underbrace{a_{2n+2} + a_{2n+3}}_{\ge 0} \ge S_{2n+1}$
- $S_{2n+1} = S_{2n} + \underbrace{a_{n+1}}_{<0} < S_{2n}$

$\Rightarrow \quad a_0 = S_0 > S_{2n} > S_{2n+1} > S_1 > 0$

$\Rightarrow$ beide Folgen monoton und beschränkt also konvergent

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n + \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n =: S$$

s liegt immer zwischen 2 aufeinanderfolgenden Partialsummen

$$\Rightarrow \quad |s_n - s| \leq |s_n - s_{n+1}| = |a_{n+1}|$$

$\blacksquare$

Bsp:

	$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$	$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$
1	1	1
2	0,5	0,75
3	$0,8\overline{3}$	$0,86\overline{1}$
4	$0,58\overline{3}$	$0,79\overline{86}$
5	$0,78\overline{3}$...	0,8386...
6	$0,61\overline{6}$	0,8108...
⋮	⋮	⋮
		0,82251
		0,82009

(3.5) Konvergenzkriterien für beliebige Reihen

(1) Betragskriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

Beweis:

- Hilfsmittel: Dreiecksungleichung für Beträge
  - (1) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |x+y| \leq |x| + |y|$ Beweis: Fallunterscheidung
  - (2) $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}: |x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$ Beweis: vollständige Induktion

- $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent $\Rightarrow$ Restreihe $R_n \to 0$ mit

$$R_n = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \ldots$$

- Dann gilt $f_n = |r_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots = R_n$

  somit $f_n \to 0$ da $0 \leq f_n \leq R_n$ und $R_n \to 0$

Aus dem Cauchykriterium folgt $\sum a_k$ konvergent $\blacksquare$

Definition:

$\sum a_k$ heißt <u>absolut konvergent</u>, falls $\sum |a_k|$ konvergent ist.

Bemerkung

(a) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent

(b) Für Reihen mit nichtnegativen Gliedern gilt

konvergent $\Leftrightarrow$ absolut konvergent

Bsp: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

- $\sum |a_k| = \sum \frac{1}{k} = \infty$ divergent (harmonische Reihe)
- $\sum a_k$ konvergent (siehe (3.4))
- $\sum a_k$ ist konvergent aber nicht absolut konvergent

(2) Quotienten- / Wurzelkriterium

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine beliebige Reihe

Falls der Grenzwert $q = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ $\left(\text{bzw. } q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\right)$

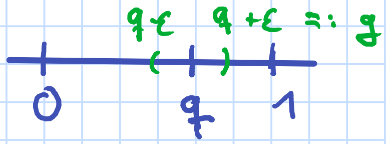
existiert, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{ist absolut konvergent, also konvergent} & \text{, falls } q<1 \\ \text{ist divergent} & \text{, falls } q>1 \\ \text{keine Aussage} & \text{, falls } q=1 \end{cases}$$

Beweis für das Wurzelkriterium

$$q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \quad \text{falls GW existiert}$$

a) $q < 1$



Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $g := q + \varepsilon < 1$

Für fast alle k gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \le q + 1 = g < 1$

$\Rightarrow$ Für fast alle k gilt $|a_k| \le g^k$

$\Rightarrow$ $|a_k| = \mathcal{O}(g^k)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} g^k = \frac{1}{1-g} \quad \text{(geometrische Reihe)}$$

modifiziertes $\Rightarrow$ Majorantenkrit. $\quad \sum |a_k| < \infty \quad \Rightarrow \sum a_k$ absolut konvergent

(b) $q > 1$

$\Rightarrow$ Für fast alle k gilt $\sqrt[k]{|a_k|} > 1$

$\Rightarrow$ Für fast alle k gilt $|a_k| > 1$

$\Rightarrow$ (a_k) ist keine Nullfolge

$\Rightarrow$ $\sum a_k$ divergent (notwendiges Kriterium nicht erfüllt)

∎

Beispiele

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ $\qquad a_k = \frac{k}{2^k} \geq 0$

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe ist absolut konvergent und damit konvergent

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{2^{\cancel{k+1}}}{\underbrace{(k+1)!}_{=(k+1)\cdot k!}} \cdot \frac{k!}{\cancel{2^k}} = \frac{2}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0 = q < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe ist absolut konvergent

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ $\qquad a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \Rightarrow |a_k| = \frac{1}{k^2}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{1} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \xrightarrow{k\to\infty} 1 = q$$

$\Rightarrow$ keine Aussage

(Reihe ist aber trotzdem absolut konvergent
siehe 3.2)

(3.6) Rechnen mit konvergenten Reihen

(R1) Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = t$ konvergente Reihen, so gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k + \beta b_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \alpha s + \beta t$$

(R2) In einer konvergenten Reihe können beliebig Klammern gesetzt werden, ohne den Reihenwert zu ändern

Bsp: • $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots$$

• $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-\dots = 0$

$$= 1(-1+1)(-1+1)(-1+1)-\dots = 1$$

Reihe nicht konvergent

(R3) Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist absolut konvergent und hat dieselbe Summe.

Umordnung = Vertauschung der Reihenfolge der Glieder

Bemerkung: Die Aussage ist falsch für Reihen, die konvergent aber nicht absolut konvergent sind.

Bsp: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \approx 0{,}693$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)}_{>\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)}_{>\frac{1}{4}} - \frac{1}{6} + \dots > 1$$

beliebige Reihenwerte können erzielt werden

(R4) Produktreihe

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s \,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = t$ absolut konvergente Reihen

$\Rightarrow \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k \cdot b_l = s \cdot t$ ist absolut konvergente Reihe

Cauchyprodukt

	b_0 +	b_1 +	b_2 + ...
a_0	$a_0 b_0$	$a_0 b_1$	$a_0 b_2$
+			
a_1	$a_1 b_0$	$a_1 b_1$	
+			
a_2	$a_2 b_0$		
+			

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \ldots + a_k b_0$$

$$c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$$

Bsp: $a_k = b_k = x^k$ $\qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \,, \ |x|<1$

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 = x^0 x^k + x^1 x^{k-1} + \ldots + x^k x^0 = (k+1) \cdot x^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(3.6) Zusammenfassung

Aufgabe: Konvergenzuntersuchung für Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

1) notwendiges Kriterium testen

- $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$
- $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ $\Rightarrow$ Reihe divergent

2) Wurzel-/Quotientenkriterium

$q = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ oder $q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

- $q < 1$ $\Rightarrow$ Reihe konvergent, sogar absolut konvergent
- $q = 1$: weitere Untersuchung
- $q > 1$ $\Rightarrow$ Reihe divergent

3)

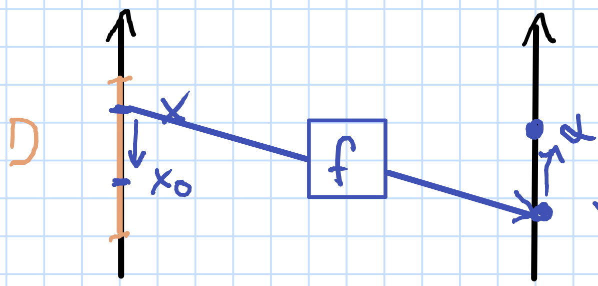
- Vergleichskriterium für Reihen mit (fast überall) nichtnegativen Gliedern
- Leibnizkriterium für alternierende Reihen
- Betragskriterium
- Cauchykriterium

Vergleichsreihen

- $\sum \frac{1}{k} = \infty$, $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergent

  $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$
- $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ falls $|x| < 1$

4. Grenzwerte und Stetigkeit von Fkt. $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ oder $f(x) \to \alpha$ für $x \to x_0$

$y = f(x)$

(4.1) Definition der Grenzwerte

(a) GW von f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \overset{\text{Def}}{\iff} \forall$ Folgen (a_n) mit $a_n \neq x_0$ aus D_f und $a_n \to x_0$ gilt $f(a_n) \to a$

$a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

äquivalente Definition

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ falls $a \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff \forall S \; \exists \delta = \delta(S) : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > S$

__Bemerkung__

- f muss in x_0 nicht definiert sein, aber in einer Umgebung von x_0
- Umgebung von x_0 = offenes Intervall, welches x_0 enthält

(b) Links- bzw. rechtsseitiger GW von f an der Stelle x_0

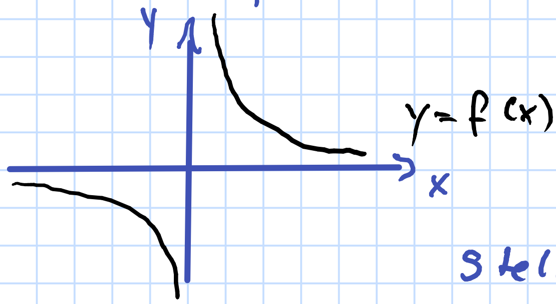
$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$ $(x \to x_0 + 0)$ $\overset{\text{Def}}{\iff} \forall$ Folgen (a_n) mit $a_n < x_0$ $(a_n > x_0)$ und $a_n \to x_0$ gilt $f(a_n) \to a$

alternativ: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 \leq x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

$(0 \leq x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$

Beispiel

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



Stelle $x_0 = 0$

$\forall$ Folgen (a_n) gilt:

- $a_n > 0$ für alle n und $a_n \to 0 \Rightarrow f(a_n) = \frac{1}{a_n} \longrightarrow \frac{1}{+0} = \infty$
- $a_n < 0$ für alle n und $a_n \to 0 \Rightarrow f(a_n) = \frac{1}{a_n} \longrightarrow \frac{1}{-0} = -\infty$

Also $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = -\infty$

und $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht

Satz: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \iff \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = a \wedge \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = a$

Beweisidee: $(\Rightarrow)$ klar

$(\Leftarrow)$ Betrachte Teilfolgen von (a_n) mit $a_n > x_0$, $a_n < x_0$

(c) Grenzwert von f für $x \to \pm\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x \to -\infty}} f(x) = a \overset{\text{Def}}{\iff} \forall$ Folgen (a_n) mit $a_n \to \infty$ ($a_n \to -\infty$) gilt $f(a_n) \to a$

alternativ:

$\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x \to -\infty}} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \hat{x} \; \forall x > \hat{x}$ ($\forall x < \hat{x}$) $: |f(x) - a| < \varepsilon \qquad (a \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x \to -\infty}} f(x) = \infty$ ($-\infty$) $\iff \forall S \; \exists \hat{x} \; \forall x > \hat{x}$ ($\forall x < \hat{x}$) $\quad f(x) > S$ ($f(x) < S$)

(4.2) Grenzwertregeln

Gilt $f(x) \to a$ und $g(x) \to b$ für $x \to x_0$, so gelten für den GW $x \to x_0$ folgende Aussagen

	$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$	$a = \infty$, $b \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$	$a = \infty$, $b = \infty$
$f(x) + g(x) \to$	$a + b$	∞	∞	∞
$f(x) - g(x) \to$	$a - b$	∞	$-\infty$	?
$f(x) \cdot g(x) \to$	$a \cdot b$	∞ für $b>0$ $-\infty$ für $b<0$? für $b=0$	analog $\Leftarrow$	∞
$\frac{f(x)}{g(x)} \to$	$\frac{a}{b}$ $b \neq 0$? $a=b=0$ ∞ $b=0, a\neq 0$ $\frac{a_n}{b_n}>0$ $-\infty$ $b=0, a\neq 0$ $\frac{a_n}{b_n}<0$	∞ $b_n>0$ $-\infty$ $b_n<0$	0	?
$f(x)^{g(x)} \to$ $(f(x)>0)$	a^b $(a,b)\neq(0,0)$? $(a,b)=(0,0)$	∞ $b>0$ 0 $b<0$? $b=0$	∞ $a>1$ 0 $0\le a<1$? $a=1$	∞

Analog für die GW $x \to x_0 \pm 0$ $x \to \pm\infty$

Unbestimmte Ausdrücke: $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, 1^∞, 0^0, ∞^0

Beispiele

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty = 1^\infty$ unbestimmt
Satz (2.6) $\longrightarrow e$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{1}{\infty}\right)^\infty = 0^\infty = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{e^x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{\infty+1}\right)^{\frac{1}{\infty}} = 0^0$ unbestimmt (GW $\frac{1}{e}$

Bemerkung

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $x^0 = 1$ definiert. Auch $0^0 = 1$.
Das gilt aber nicht für Rechnen mit Grenzwerten

(4.3) Definition der Stetigkeit

(a) f ist **stetig an der Stelle x_0**, falls gilt

(a1) f ist in einer Umgebung von x_0 definiert

(a2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(b) f ist **links-/rechtsseitig stetig in x_0**, falls

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ bzw. $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$

(c) f ist stetig auf dem Intervall $I = [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

falls gilt

(c1) $I \subseteq D_f$

(c2) f stetig für alle $x \in (a, b)$

(c3) f ist rechtsseitig stetig in $x_0 = a$

Analog für $I = [a, b]$, $I = (a, b]$, $I = (a, b)$

(4.4) Hauptsatz über stetige Funktionen

(1) Folgende elementare Funktionen sind stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$

sofern sie in einer Umgebung von x_0 definiert sind:

- $f(x) = x^n$ $\quad (n \in \mathbb{Z})$
- $f(x) = \sqrt[m]{x}$ $\quad (m \geq 2)$
- $f(x) = c$ $\quad (c \in \mathbb{R}$ Konstante$)$
- $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = e^x$

(2) Sind g und h stetig in x_0, so ist f stetig in x_0 für

$f(x) = g(x) + h(x)$, $f(x) = g(x) - h(x)$, $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ $\quad h(x_0) \neq 0$

(3) Ist h stetig in x_0 und g stetig in $x_1 = h(x_0)$ so ist f mit $f(x) = g(h(x))$

stetig in x_0

Bemerkung

$f(x) = g(h(x))$: f Verkettung von g und h

g : äußere Funktion

h : innere Funktion

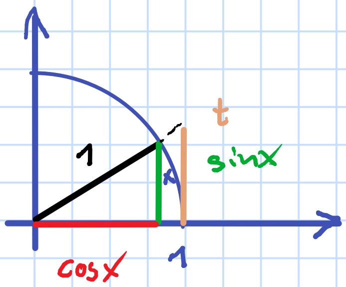
$f = g \circ h$ g nach h

Bsp 1: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- $h(x) = \frac{1}{x}$ stetig für alle $x \neq 0$
- $g(x) = e^x$ überall stetig
- $f(x) = g(h(x)) = g(\frac{1}{x}) = e^{\frac{1}{x}}$ stetig für alle $x \neq 0$

Bsp 2: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- f stetig für alle $x \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$ unbestimmt



Strahlensatz: $\frac{t}{1} = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\Rightarrow t = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Kurve x = Winkel im Bogenmaß

Es gilt $\sin x \leq x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\frac{\sin x}{x} \leq 1$ $\cos x \leq \frac{\sin x}{x}$

$\Rightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ (Beweis für $0 < x < \frac{\pi}{2}$, gilt aber auch für $-\frac{\pi}{2} < x < 0$)

$x \to 0$

$1 \leq \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

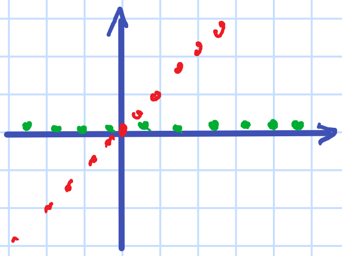
$\Rightarrow$ Die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

ist überall stetig

Bsp 3

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} & \text{(rational)} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} & \text{(irrational)} \end{cases}$$



$f(1) = 1$

$f(\sqrt{2}) = 0$

f ist nur in $x_0 = 0$ stetig

Bsp 4

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin Q \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in Q \quad \text{maximal gekürzt} \end{cases}$$

f stetig in allen irrationalen Zahlen

5. Ableitung und Differenzierbarkeit

(5.1) Definition der Ableitung

(1) Gegeben $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(2) Motivation

Geradlinige Bewegung Zeit $t \mapsto$ Ort $f(t)$

Geschwindigkeit zum ZP t_0

$$\xrightarrow[\qquad f(t_0) \qquad\qquad f(t_0+h) \qquad]{}$$

- Zeitspanne h
- Weg $f(t_0+h) - f(t_0)$

$\Rightarrow \quad v_0 = \dfrac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \dfrac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$ für $h \to 0$

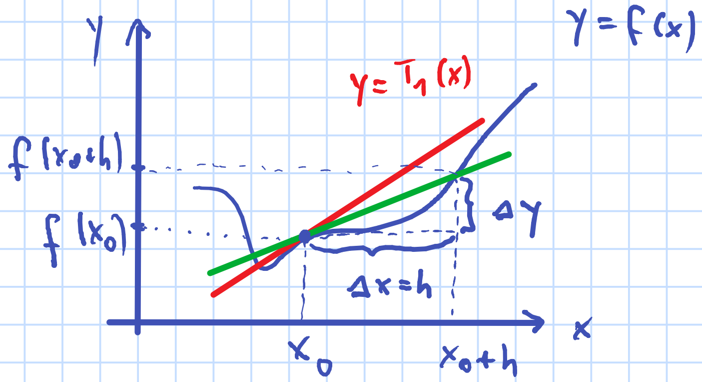
(3) Ableitung von f an der Stelle x_0

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

sofern GW existiert und endlich ist.

f heißt dann <u>differenzierbar</u> in $x = x_0$.

(4) Geometrische Interpretation



- $\Delta y := \Delta f(x_0, h) := f(x_0+h) - f(x_0)$ Funktionswertdiff.
- $\Delta x := x_0 + h - x_0 = h$ Argumentendiff.
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ Differenzenquotient
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = Anstieg der Geraden durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+h, f(x_0+h))$
- $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ <u>Anstieg</u> der Fkt in $x = x_0$

Die Gerade $\underline{y = T_1(x)}$ durch $(x_0, f(x_0))$ mit Anstieg $m = f'(x_0)$ heißt Tangente von f in $x = x_0$.
Die Gleichung der Tangenten ist

$$\boxed{T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

(5) Ableitung von f

f heißt <u>differenzierbar</u> auf einem Intervall $I \subseteq D$ falls $f'(x)$ für alle $x \in I$ existiert. Die Funktion

$$x \in I \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$$

heißt dann <u>Ableitung</u> bzw. <u>1. Ableitung</u> von f auf I

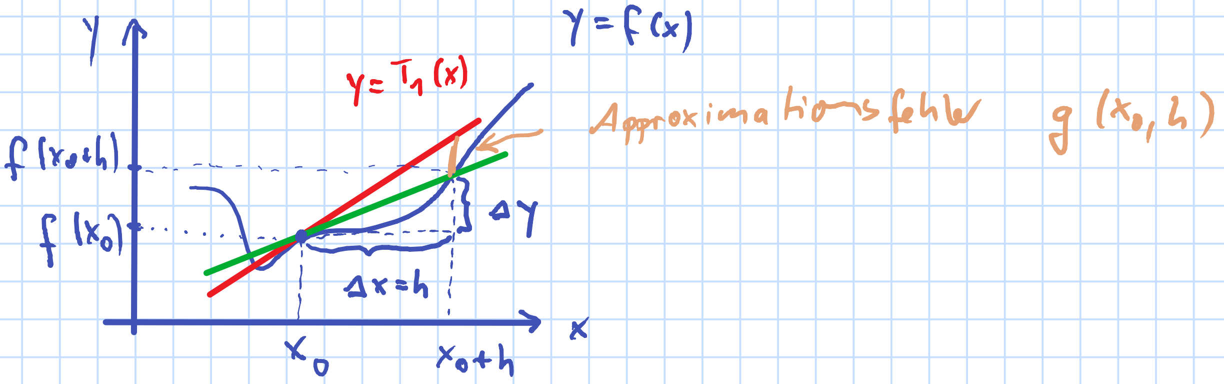
<u>Bemerkung</u>

Ist $I = [a, b]$, so muss bei $x = a$ für $f'(x)$ nur der rechtsseitige GW existieren, bei $x = b$ nur der linksseitige.

<u>Bezeichnungen</u>

- Ableitung von f: $\quad f', \; \dot{f}, \; D(f), \; \frac{df}{dx}$
- Ableitung von f an der Stelle x_0: $\; f'(x_0), \; \dot{f}(x_0), \; D(f)(x_0), \; \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$
- df Differential von f, $\quad dx$ Differential von x
  $\frac{df}{dx}$ Differentialquotient

Bemerkung



Betrachten die Näherung $T_1(x_0+h)$ für den Funktionswert $f(x_0+h)$

$$f(x_0+h) = T_1(x_0+h) + g(x_0,h) \quad \leftarrow \text{Fehler}$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + g(x_0,h)$$

$$\underbrace{f(x_0+h) - f(x_0)} = f'(x_0)\cdot h + g(x_0,h)$$

$$\Delta f(x_0,\Delta x) = f'(x_0)\cdot \Delta x + g(x_0,h) \qquad (*)$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{g(x_0,h)}{h}$$

$$\downarrow \quad h\to 0$$

$$f'(x_0) = f'(x_0) + \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0,h)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0,h)}{h} = 0$$

$$\Rightarrow g(x_0,h) = o(h)$$ viel kleiner als h

$$\left(\forall (h_n) \quad h_n \to 0 \quad g(x_0,h_n) = o(h_n)\right)$$

$$df(x_0,dx) = f'(x_0)\cdot dx \qquad (**)$$

Beispiel 1

$f(x) = \sin x \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad I = \mathbb{R}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \frac{2 \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h}$$

Additionstheorem

$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$= \frac{\sin\frac{h}{2}}{h/2} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$\downarrow h \to 0 \qquad \downarrow$$

$$1 \cdot \cos x$$

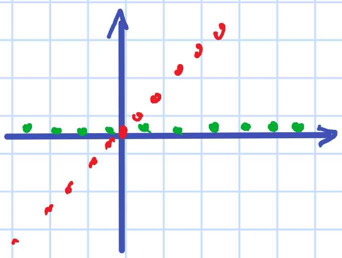
$\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$ $\qquad$ $\cos$ ist stetig

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ f ist differenzierbar auf $I = \mathbb{R}$, Ableitung f' ist $f'(x) = \cos x$

Beispiel 2

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irrational} \\ x, & x \text{ rational} \end{cases}$$



$f(1) = 1$

$f(\sqrt{2}) = 0$

- f ist nur in $x_0 = 0$ stetig $\quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$
- f nirgends diff'bar $\quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$ existiert nicht

(5.2) Ableitungsregeln

(1) Ableitung elementarer Funktionen

- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ $\quad$ n rational
- $c' = 0$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$

(2) Arithmetische Operationen

Sind $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x diff'bar, so gilt

- $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$ $\quad$ (Summenregel)
- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ $\quad$ (Produktregel)
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x)\, g'(x)}{(g(x))^2}$ $\quad$ (Quotientenregel)

(3) Kettenregel

Ist $g : D_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x diff'bar und $f : D_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\tilde{x} = g(x)$ diff'bar, dann gilt

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Beweis für die Produktregel

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x)\, g(x+h) + f(x)\, g(x+h) - f(x)\, g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad h \to 0 \qquad \downarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Diff'barkeit Stetigkeit von g

Satz: Ist $f: D \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 diff'bar, dann ist f in x_0 stetig.

Beweis: $f(x_0+h) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0)$

$$\downarrow \; h \to 0$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

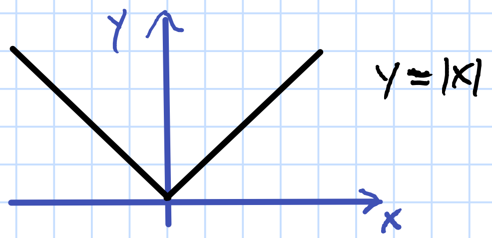
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ also f stetig in x_0

Bemerkung

Die Umkehrung gilt nicht, d.h. eine Funktion f, die stetig in x_0 ist, muss in x_0 nicht diff'bar sein.

Beispiel

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$



$f'(0) = ?$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \qquad \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ ex. nicht}$$

f ist in $x_0 = 0$ nicht diff'bar aber stetig

f ist diff'bar für alle $x \neq 0$ und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Beispiele für Ableitungsregeln

(a) $\sqrt{x}\,' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(b) $h(x) = e^{\frac{1}{x}} = f(g(x))$

- $f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$ äußere Fkt.
- $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad g'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ innere Fkt
- $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
  $= e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

(c) $h(x) = \cos\left(e^{\sin x}\right)$

$h'(x) = -\sin\left(e^{\sin x}\right) \cdot \left(e^{\sin x}\right)'$

$= -\sin\left(e^{\sin x}\right) \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x$

(5.3) Umkehrfunktion

<u>Gegeben</u> $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

<u>Def:</u> f heißt injektiv auf I, falls

$$\boxed{\forall x, x' \in I: \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')}$$

(äquivalent: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$)

Weiterhin $J = f(I) = \{ f(x) \mid x \in I \}$

das <u>Bild</u> von I bzgl. f

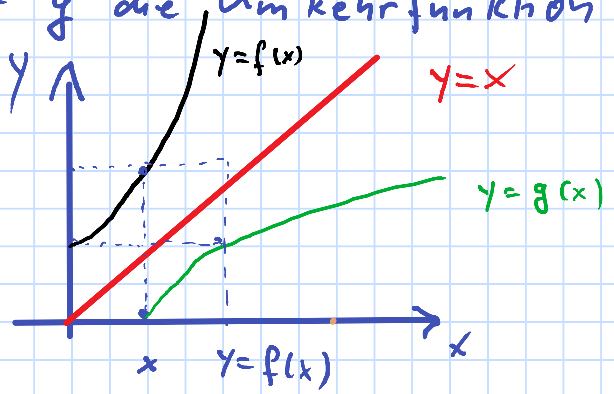
Satz:

Ist $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv auf I und $J = f(I)$ das Bild von I bzgl. f, so gibt es eine Fkt

$$g: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

mit $\boxed{\forall x \in I \ \forall y \in J: \quad y = f(x) \iff g(y) = x}$

Man nennt g die Umkehrfunktion von f, kurz $g = f^{-1}$



Spiegelung an $y = x$

Es gilt dann

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall x \in I: & g(f(x)) = x \\ \forall y \in J: & f(g(y)) = y \end{array}}$$

Insbesondere ist
$f: I \to J$ bijektiv
$g: J \to I$ bijektiv

Für die Ableitung von $g = f^{-1}$ gilt dann

$$\boxed{g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}}$$

für alle $y \in J$ mit $f'(g(y)) \neq 0$

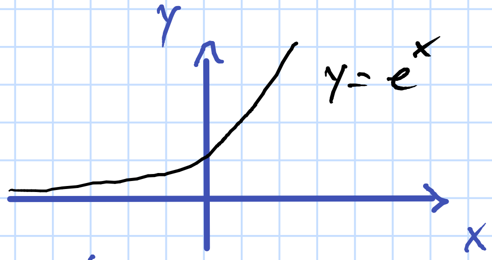
Beweis: $f(g(y)) = y \Rightarrow (f(g(y)))' = y' = 1$

$\Rightarrow f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1$ (Kettenregel)

$\Rightarrow g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$

Beispiel 1

$f(x) = e^x \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



- f injektiv auf $I = \mathbb{R} \qquad f'(x) = e^x$
- $J = f(I) = \{ e^x \mid x \in \mathbb{R} \} = (0, \infty)$
- Umkehrfunktion $\quad g: J \to I \qquad g(y) = \ln y$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in (0,\infty): \quad y = e^x \iff x = \ln y$

Die ln-Fkt. ist als Umkehrfunktion der e-Funktion definiert. Es gilt dann:

$$\forall y > 0: \ e^{\ln y} = y \quad , \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ \ln e^x = x$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y} \qquad \forall y > 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{(\ln y)' = \frac{1}{y}}} \ , y > 0 \qquad \left((\ln x)' = \frac{1}{x} \right)$$

- Außerdem gilt

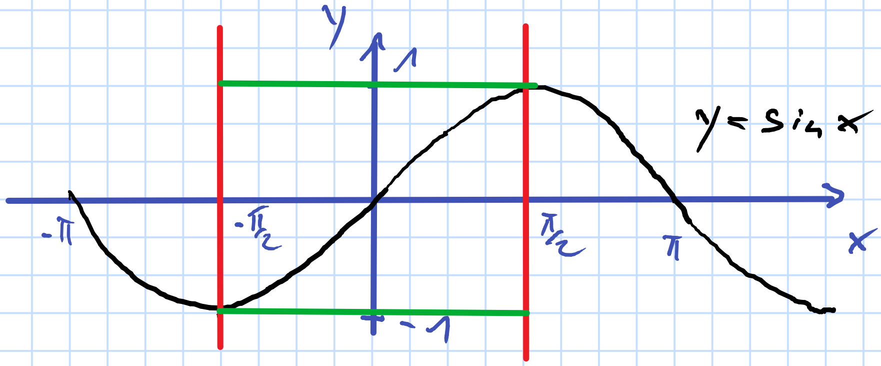
$$\boxed{\begin{aligned} \ln a^b &= b \cdot \ln a \\ a^b = e^{\ln a^b} &= e^{b \ln a} \end{aligned}}$$

Beispiel 2

$$f(x) = x^x \qquad x > 0$$
$$f(x) = e^{x \ln x}$$
$$f'(x) = \left(e^{x \ln x}\right)'$$
$$= e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \qquad \text{(Kettenregel)}$$
$$= x^x \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \qquad \text{(Produktregel)}$$
$$= x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Beispiel 3

$f(x) = \sin x \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



- f nicht injektiv auf $D = \mathbb{R}$ $\qquad f(0) = f(\pi) = 0$
- f injektiv auf $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $J = f(I) = [-1, 1]$
- f besitzt auf J eine Umkehrfunktion

$g: J \to I$ heißt Arcussinus : $g(y) = \arcsin y$

$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \; \forall y \in [-1, 1]: \; y = \sin x \iff x = \arcsin y$

- Ableitung $\qquad f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$f'(x) = 0$ für $x = -\frac{\pi}{2}, \; x = \frac{\pi}{2} \qquad y = -1$ bzw 1

$\Rightarrow$ g nicht diff'bar bei $y = -1, \; y = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \\ |\cos x| &= \sqrt{1 - \sin^2 x} \end{aligned}}$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{|\cos x|} \qquad (\cos x \geq 0 \text{ für } x \in I)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad \sin x = y$$

$$y \neq \pm 1$$

5.4) Höhere Ableitungen

- f diff'bar auf $I \subseteq \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists$ Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$
- f' diff'bar auf $I \subseteq \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists$ Ableitung $(f')' : I \to \mathbb{R}$

$$f'' := (f')' \quad \text{2. Ableitung von } f$$

- <u>n-te Ableitung von f</u>: $f^{(n)}$

$$f^{(0)}(x) := f(x)$$
$$f^{(n+1)}(x) := \left(f^{(n)}(x)\right)'$$

- <u>Differentialschreibweise</u>

$$f' = \frac{df}{dx} \qquad f'' = \frac{df'}{dx} = \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx} = \frac{d(df)}{dx\,dx} = \frac{d^2 f}{(dx)^2}$$

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{(dx)^n}$$

<u>Beispiel</u>

$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

extra betrachten
Definition benutzen

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$

$f''(0)$ existiert nicht

$$f'''(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \text{existiert nicht} & x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \text{existiert nicht} & x = 0 \end{cases}$$

6. Anwendung der Differentialrechnung

(6.1) Grenzwertregel von l'Hospital (1661 - 1704)

Sei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ bzw. $\pm\infty$. Dann gilt:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a}$$

Analog für $x \to x_0 \pm 0$ bzw $x \to \pm\infty$

Beispiele:

(1) $L = \lim\limits_{x \to 0+0} x \cdot \ln x \qquad (\text{Typ } 0 \cdot (-\infty))$

$$L = \lim_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{1/x} \qquad \left(\text{Typ } \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}\right)$$

$$\overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x \to 0+0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0+0} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0+0} -x = 0$$

(2) $L = \lim\limits_{x \to 0+0} x^x \qquad (\text{Typ } 0^0)$

$$= \lim_{x \to 0+0} e^{\ln x^x} = \lim_{x \to 0+0} e^{x \cdot \ln x}$$

Stetigkeit der e-Fkt. $\longrightarrow$ $= e^{\lim\limits_{x \to 0+0} x \cdot \ln x} = e^0 = 1$

Bemerkungen:

(1) Nicht mit Quotientenregel verwechseln!
Es wird nicht der Quotient abgeleitet, sondern Zähler und Nenner einzeln.

(2) Das Konvergenzverhalten ist nur gleich wenn der Grenzwert für $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ auch existiert

Bsp: • $L = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ (Typ $\frac{\infty}{\infty}$)

• $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x+\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ $\Leftarrow$ GW existiert nicht

• Der Originalgrenzwert existiert aber:

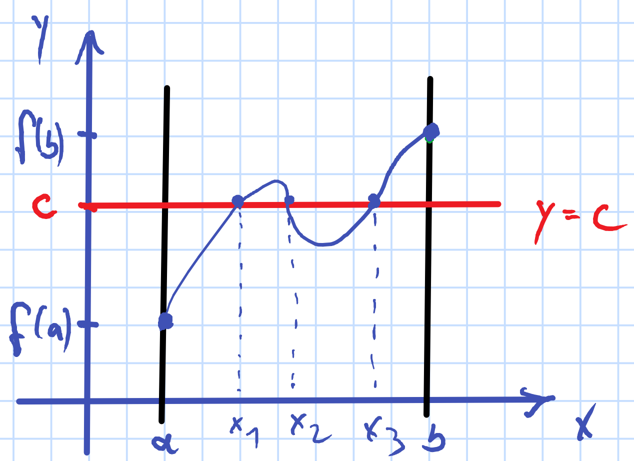
$$\frac{x + \sin x}{x} = 1 + \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \to \infty} 1 + 0 = 1$$

zwischen $-\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x}$

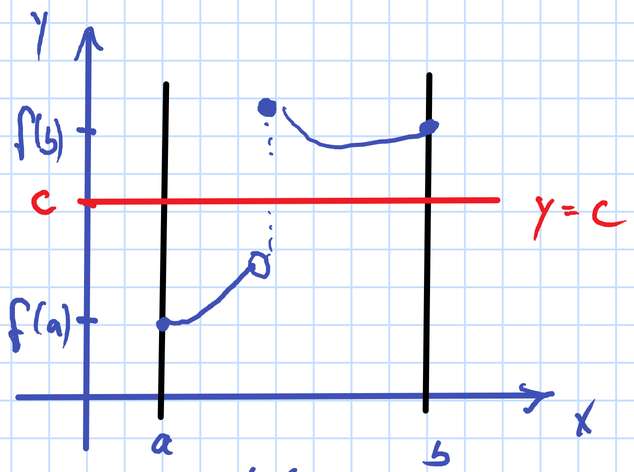
(6.2) Zwei Hauptsätze

(1) Zwischenwertsatz (ZWS)

Ist f stetig auf dem Intervall $I = [a,b]$ und gilt $f(a) < c < f(b)$ bzw. $f(a) > c > f(b)$, so hat die Gleichung $f(x) = c$ mindestens eine Lösung $x \in (a,b)$



f stetig



f unstetig

Beispiel: Gesucht ist eine Lösung der Gleichung

$$e^x \cdot x\cos(5x) = 2$$

- $f(x) = e^x \cdot x\cos 5x$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig auf $I = \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ $\quad f(1) = 2{,}43\ldots$ $\quad \overset{MWS}{\Longrightarrow} f(x) = 2$ hat Lsg $x \in [0,1]$
- $f(\tfrac{1}{2}) = 2{,}0\ldots > 2$ $\quad \Rightarrow f(x) = 2$ hat Lsg $x \in [0, \tfrac{1}{2}]$
- $f(\tfrac{1}{4}) = \ldots$

Intervallschachtelungsverfahren liefert Näherungslösung

Intervallschachtelung

Geg: • stetige Fkt f auf $I = [a,b]$
• $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

Ges: eine Nullstelle $x^* \in (a,b)$ $\quad f(x^*) = 0$ (existiert nach MWS)

$I_0 = I = [a,b]$ $\quad a_0 = a$ $\quad b_0 = b$

Für $k = 0, 1, \ldots$

$x_k := \frac{a_k + b_k}{2}$ $\quad$ Intervallmittelpunkt von $I_k = [a_k, b_k]$

- Ist $f(x_k) = 0$ $\Rightarrow$ Ausgabe $x^* = x_k$ STOP
- Ist $f(x_k) < 0$ $\Rightarrow$ $a_{k+1} := x_k$, $b_{k+1} := b_k$
- Ist $f(x_k) > 0$ $\Rightarrow$ $a_{k+1} := a_k$, $b_{k+1} := x_k$

Nach MWS existiert jeweils mindestens eine Nullstelle $x^* \in I_k$

$$I = [a,b] = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$$

Länge von $I_k = (b-a) \cdot \frac{1}{2}^k \quad \Rightarrow \quad |x_k - x^*| \le (b-a) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

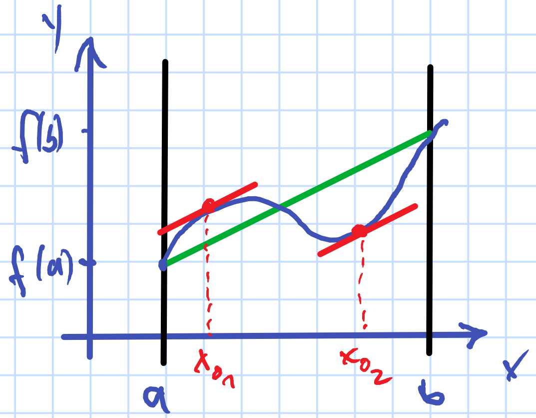
(2) Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist f stetig auf dem Intervall $I = [a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), so gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Anstieg der Tangenten an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$

Anstieg der Geraden durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$



(6.3) Monotonieverhalten

Voraussetzung: f sei stetig auf $I = [a,b]$ und diff'bar auf (a,b)

Aus dem MWS folgt: Sind $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$, so ist

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0) \qquad (*)$$

für ein $x_0 \in (x_1, x_2)$

1. Fall $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann folgt aus $(*)$ $\forall x_1, x_2 \in I: f(x_1) = f(x_2)$, d.h. $f(x) = const \ \forall x \in I$

2. Fall $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$ Dann folgt aus $(*)$

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in I : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

d.h. f ist <u>streng monoton wachsend</u> auf I

3. Fall $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$ Dann folgt aus $(*)$

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in I : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$

d.h. f ist <u>streng monoton fallend</u> auf I

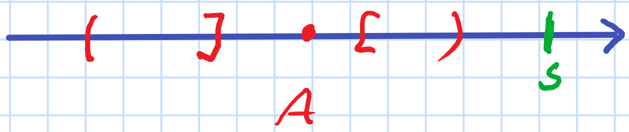
Injektivitätstest Sei f stetig auf I, dann gilt

f injektiv auf I $\Leftrightarrow$ f streng monoton wachsend oder f streng monoton fallend auf I

(6.4) Extremwerte für Funktionen $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(1) Maximum / Supremum bzw. Minimum / Infimum

<u>Geg</u> $A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad A \neq \emptyset$ $\quad s \in \mathbb{R}$



<u>Def 1</u>

(a) s heißt <u>obere Schranke</u> von A, falls gilt $\forall x \in A: \; x \leq s$

(b) s heißt <u>Supremum</u> von A $(\sup A = s)$ falls s kleinste obere Schranke ist, d.h. falls gilt

(b1) $\forall x \in A \quad x \leq s$

(b2) $\forall s' < s \quad \exists x \in A \quad x > s'$

<u>Bem</u>: Besitzt A keine obere Schranke schreibt man $\sup A := \infty$

(c) s heißt <u>Maximum</u> von A $(\max A = s)$ falls s größtes Element von A, d.h. falls gilt

(c1) $s \in A$

(c2) $\forall x \in A: x \leq s$

<u>Regeln</u> $\forall A \subseteq \mathbb{R} \quad A \neq \emptyset$ gilt

(R1) $\sup A$ existiert

(R2) $\sup A < \infty \iff$ A ist nach oben beschränkt, d.h. A hat obere Schranke $s \in \mathbb{R}$

(R3) $\sup A = s$, $s \in A \iff \max A = s$

<u>Bsp:</u>

- $\sup [0,1) = 1$ $\quad \nexists \max [0,1)$ da $1 \notin [0,1)$
- $\sup [0,1] = \max [0,1] = 1$
- $\sup (0,\infty) = \infty$ $\quad \nexists \max (0,\infty)$

Def 2

(a) s heißt unlere Schranke von A, falls gilt $\forall x \in A: \; x \geq s$

(b) s heißt Infimum von A ($\inf A = s$) falls s größte untere Schranke ist, d.h. falls gilt

(b1) $\forall x \in A \quad x \geq s$

(b2) $\forall s' > s \quad \exists x \in A \quad x < s'$

Bem: Besitzt A keine untere Schranke schreibt man $\inf A := -\infty$

(c) s heißt Minimum von A ($\min A = s$) falls s kleinstes Element von A, d.h. falls gilt

(c1) $s \in A$

(c2) $\forall x \in A : x \geq s$

Bsp:
- $\inf (0,1] = 0 \quad \nexists \inf (0,1]$
- $\inf [0,1] = \min [0,1] = 0$
- $\inf \{-1,-2,-3,-4\dots\} = \inf(-\mathbb{N}) = -\infty, \; \nexists \min(-\mathbb{N})$

(2) Globale / lokale Extremstellen von $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Geg:
- $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fkt.
- $I \subseteq D$ Menge (meist ein Intervall)

Globale Extremwerte von f auf I

Suchen

$$\max \{ f(x) \mid x \in I \} \quad \text{bzw.} \quad \min \{ f(x) \mid x \in I \}$$

Ist $x = a \in I$ und gilt

$$f(a) = \max \{ f(x) \mid x \in I \} \quad \text{bzw.} \quad f(a) = \min \{ f(x) \mid x \in I \}$$

so heißt
- $x = a$: globale Maximalstelle / Minimalstelle von f auf I
- $f(a)$: globales Maximum / Minimum von f auf I

Bezeichnung

$\max \{ f(x) \mid x \in I \}$ $\qquad \max\limits_{x \in I} f(x)$ $\qquad \max_{x\in I} f(x)$

analog für min / sup / inf

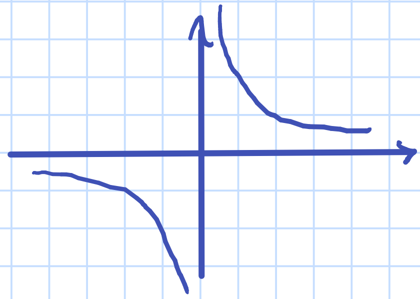
Bemerkung

$m = \max\limits_{x\in I} f(x) \iff \forall x \in I \; f(x) \le m \; \wedge \; \exists x_0 \in I \; f(x_0) = m$

analog für min

Beispiel

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



(a) $I = (0, \infty)$: $A = \{ f(x) \mid x \in I \} = (0, \infty)$

$\max\limits_{x\in I} f(x)$ ex nicht $\qquad \sup\limits_{x\in I} f(x) = \infty$

(b) $I = [1, \infty)$: $A = \{ f(x) \mid x \in I \} = (0, 1] \qquad f(1) = 1$

$\max\limits_{x\in I} f(x) = 1 \qquad \min\limits_{x\in I} f(x)$ ex. nicht

- $m = 1$ globales Maximum von f auf $I = [1, \infty)$
- $x = 1$ globale Maximalstelle von f auf I

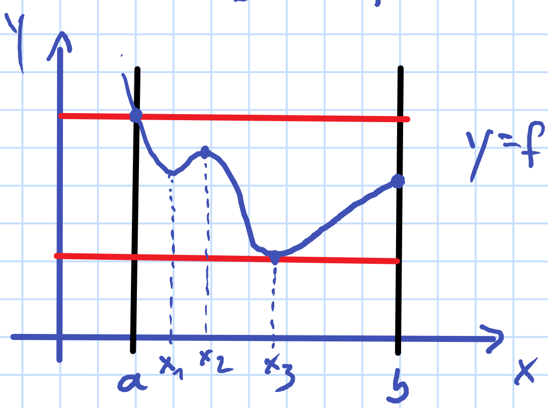
Lokale Extremwerte von f

Man nennt $x = a$ eine <u>lokale Maximalstelle</u> bzw <u>lokale Minimalstelle</u> von f, falls es eine Umgebung I_0 von a, d.h. ein offenes Intervall $I_0 = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ mit $I_0 \subseteq D$ gibt und es gilt

$$f(a) = \max_{x \in I_0} f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(a) = \min_{x\in I_0} f(x)$$

Dann heißt $f(a)$ <u>lokales Maximum</u> bzw. <u>lokales Minimum</u> von f.

Beispiel: $I = [a,b]$ $\quad f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subseteq D$



- $f(a) = \max\limits_{x \in I} f(x)$ globales Maximum von f auf I aber kein lokales
- $f(x_1)$ lokales aber kein globales Minimum von f auf I
- $f(x_2)$ lokales aber kein globales Maximum von f auf I
- $f(x_3)$ lokales Minimum und globales Minimum von f auf I

$$f(x_3) = \min_{x \in I} f(x)$$

Satz von Weierstraß

Ist $I = [a,b]$ ein abgeschlossenes (und beschränktes) Intervall und f stetig auf I, so gelten folgende Aussagen:

(a) $\quad A = \{ f(x) \mid x \in I \}$ ist ein abgeschlossenes Intervall

(b) $\quad \max\limits_{x \in I} f(x)$ und $\min\limits_{x \in I} f(x)$ existieren

(c) $\quad$ Ist $x_0 \in I$ und $f(x_0) = \max\limits_{x \in I} f(x)$ bzw $f(x_0) = \min\limits_{x \in I} f(x)$

so ist $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ oder $x_0 \in (a,b)$

ist lokale Maximalstelle / Minimalstelle von f.

Bemerkung

Der Satz gilt auch in allgemeinerem Kontext

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad$ (2. Semester)

Wiederholung

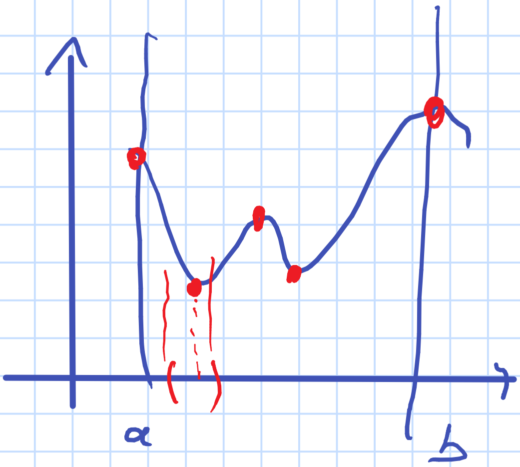
$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

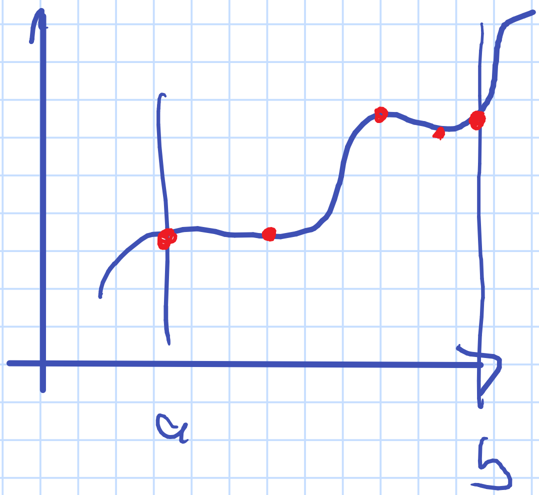
$I \subseteq D \qquad I = [a,b]$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ Fkt. streng m. wachsend

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ Fkt " " fallend

$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ Fkt konstant





Satz von Weierstraß

$I = [a,b] \subseteq D$

f stetig auf I

$\Rightarrow \quad \exists \max_{x \in I} f(x) \qquad \exists \min_{x \in I} f(x)$

Extremstellen sind lokale Extremstellen oder liegen am Rand

(3) Lokale Extremwerte, notwendige Bedingung

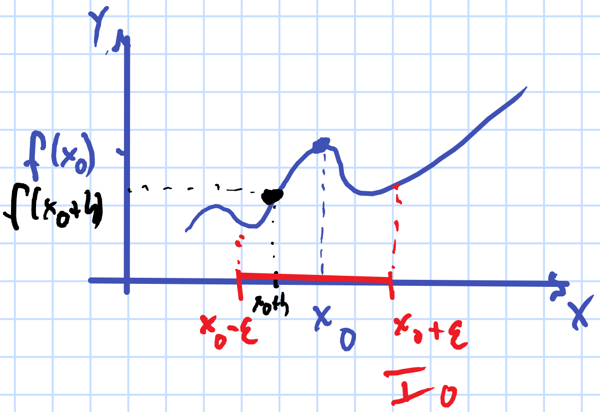
Vor: f in x_0 diff'bar

Beh:

$$\boxed{f(x_0) \text{ lokales Maximum / lok. Minimum} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0}$$

Beweis für lokales Maximum, d.h. $f(x_0) = \max\limits_{x \in I_0} f(x)$

$I_0 = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$



$$\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0 \quad \text{für alle } h$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta f(x_0,h)}{h} \begin{cases} \geq 0 & -\varepsilon < h < 0 \\ \leq 0 & 0 < h < \varepsilon \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x_0,h)}{h} = 0$$

■

Folgerung aus dem Satz von Weierstraß

Sei f stetig auf $I = [a,b]$ und diff'bar auf (a,b), Sei

$$B = \{ f(a), f(b) \} \cup \{ f(x) \mid x \in (a,b),\ f'(x) = 0 \}$$

Dann gilt $\max\limits_{x \in I} f(x) = \max B \qquad \min\limits_{x \in I} f(x) = \min B$

Bezeichnung

Ist $f'(x_0) = 0$ so heißt x_0 stationärer Punkt bzw extremwertverdächtige Stelle.

Bemerkung:

zur Bestimmung globaler Extremwerte braucht man (in der Regel) keine 2. Ableitung.

(4) Lokale Extremwerte, hinreichende Bedingung

$f(x_0)$ ist lokales Maximum / Minimum, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist (Typ I, Typ II)

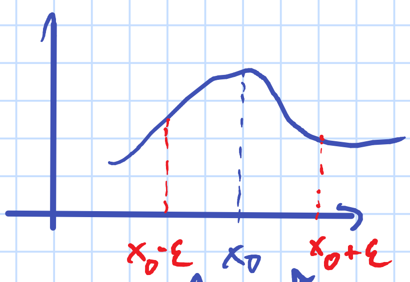
Typ I:

(1) $f'(x_0) = 0$ (nur falls f in x_0 diff'bar)

(2) $\exists\ \varepsilon > 0$ derart, dass gilt

$$\underbrace{f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ > 0 & \text{für } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{cases}}_{\text{lokales Minimum}} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{f'(x) \begin{cases} > 0 & x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ < 0 & x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{cases}}_{\text{lokales Maximum}}$$

Bew: für lokales Maximum



$f'(x) > 0$ $\Rightarrow$ f str. m.W. $\qquad$ $f'(x) < 0$ $\Rightarrow$ f str. m. fallend

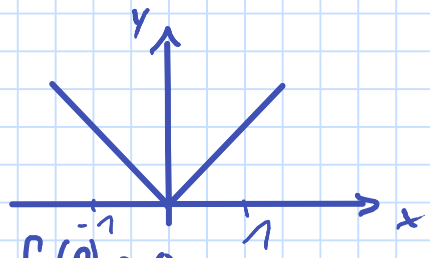
$\Rightarrow \max\{f(x) \mid [x_0 - \varepsilon, x_0]\} = f(x_0) = \max\{f(x) \mid x \in [x_0, x_0 + \varepsilon]\}$

$\Rightarrow f(x_0) = \max\{f(x) \mid x \in I_0 = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\}$

Bemerkung:

gilt auch, wenn f in x_0 nicht diff'bar ist.

Bsp: $f(x) = |x|$



$$\min\{f(x) \mid x \in [-1,1]\} = f(0) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Typ II

(1) $f'(x_0) = 0$

(2) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ ist lokales Minimum

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ ist lokales Maximum

Dabei muss f'' in einer Umgebung von x_0 d.h. in $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ existieren und stetig sein

Bew (für lokales Maximum)

- $f''(x_0) < 0$ und f'' stetig

  $\Rightarrow f''(x) < 0$ für $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ $\quad (\delta < \varepsilon)$

  $\Rightarrow f'$ ist streng monoton fallend in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

- Da $f'(x_0) = 0$ gilt

  für $x_0-\delta < x < x_0$: $f'(x) > f'(x_0) = 0$

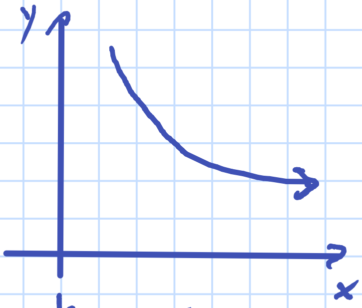
  für $x_0 < x < x_0+\delta$: $f'(x) > f'(x_0) = 0$

$\Rightarrow f$ erfüllt Typ I Bedingung

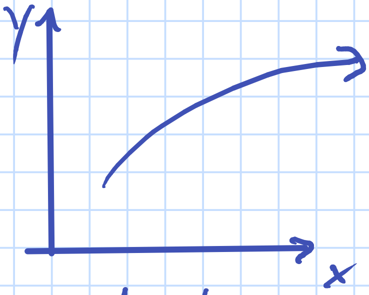
$\Rightarrow f(x_0)$ ist lokales Maximum

$\blacksquare$

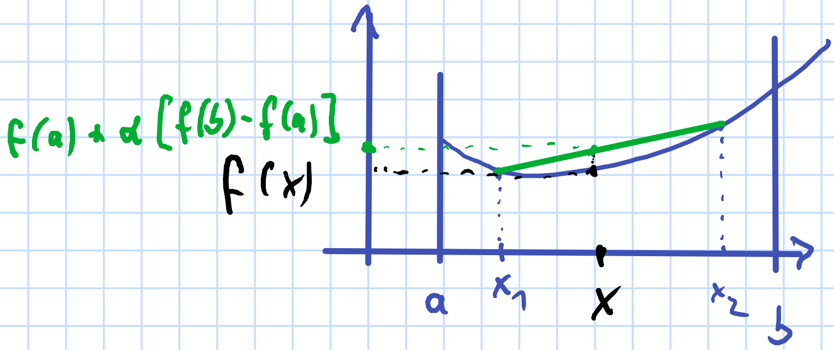
(6.5) Krümmung, Wendepunkte



konvex
(Linkskurve)



konkav
(Rechtskurve)



$$x \in (x_1, x_2) \Leftrightarrow x = x_1 + \alpha(x_2 - x_1) \quad \text{für ein } \alpha \in (0,1)$$

(1) Definition

Die Funktion f heißt $\left\{ \begin{matrix} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{matrix} \right\}$ bzw. $\left\{ \begin{matrix} \text{streng konvex} \\ \text{streng konkav} \end{matrix} \right\}$

auf dem Intervall I, falls $\forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$, $\forall \alpha \in (0,1)$

$$f(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) \left\{ \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \right\} f(x_1) + \alpha(f(x_2) - f(x_1))$$

bzw.

$$f(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) \left\{ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \right\} f(x_1) + \alpha(f(x_2) - f(x_1))$$

=

$$\left(f(\alpha x_2 + (1-\alpha) x_1) \leq \alpha f(x_2) + (1-\alpha) f(x_1) \right)$$

(2) Kriterium

Sei f stetig auf $[a,b]$ und $2\times$ stetig diff'bar auf (a,b). Dann gilt

(a) f (streng) konvex bzw (streng) konkav auf I

$\Leftrightarrow$

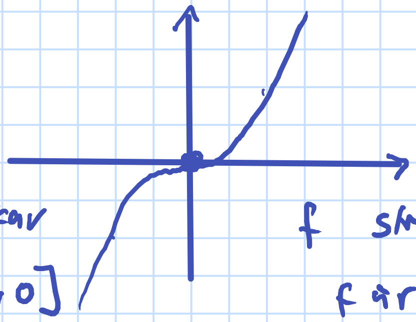
f' (streng) monoton wachsend bzw (streng) monoton fallend auf I

(b) $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ streng konvex auf $I = [a,b]$

(c) $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ streng konkav auf $I = [a,b]$

<u>Bsp:</u> $f(x) = x^3 \qquad f'(x) = 3x^2 \qquad f''(x) = 6x$

$$\Rightarrow \quad f''(x) \begin{cases} < 0 & x < 0 \\ > 0 & x > 0 \end{cases}$$



f streng konkav für $x \in (-\infty, 0]$

f streng konvex für $x \in [0, \infty)$

$x_0 = 0$ Wendestelle

(3) Satz

Ist $I = [a,b]$ abgeschlossenes Intervall und sei f stetig und streng konvex auf I, so gilt

$$\max_{x \in I} f(x) = \max\{f(a), f(b)\}$$

Ist f streng konkav und stetig auf I

$$\min_{x \in I} f(x) = \min\{f(a), f(b)\}$$

Beispiel

$f(x) = e^x - \ln x + x \qquad I = [1,2]$

- f stetig auf I
- $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} + 1 \qquad f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$
- $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 \implies f$ ist streng konvex auf I

$\overset{\text{Satz}}{\implies} \max_{x \in I} f(x) = \max\{f(1), f(2)\} = \max\{e+1, e^2 - \ln 2 + 2\}$

$= f(2)$

$\implies f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f'$ streng monoton wachsend auf I

$f'(1) = e > 0 \implies f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$

$\implies f$ streng monoton wachsend auf I

$\implies \min_{x \in I} f(x) = f(1) = e+1$

(4) Definition

x_0 ist <u>Wendestelle</u> von f, falls f an der Stelle x_0 bzgl. einer Umgebung von x_0 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ sein Konvexitätsverhalten ändert. Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ heißt dann <u>Wendepunkt</u>.

(5) Wendepunkt

<u>Vor:</u> f ist in Umgebung von x_0 diff'bar (evtl. mehrfach)

(a) Satz:

x_0 Wendestelle von $f \Leftrightarrow x_0$ ist lokale Extremstelle von f'

(b) Notwendige Bedingung (falls f 2x diff'bar)

x_0 Wendestelle von $f \Rightarrow f''(x_0) = 0$

(c) Hinreichende Bedingung

x_0 ist Wendestelle von f, falls f 2x stetig diff'bar und

(c1) $f''(x_0) = 0$
(c2) $f'''(x_0) \neq 0$

(6) Satz

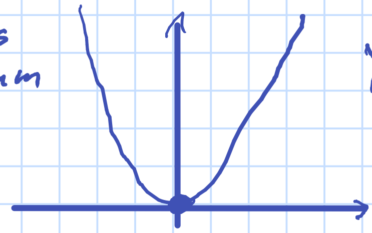
Sei $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ mit $n \geq 2$. Dann gilt:

(a) x_0 ist Wendestelle von $f \Leftrightarrow n$ ist ungerade
(b) x_0 ist lok. Minimalstelle von $f \Leftrightarrow n$ gerade, $f^{(n)}(x_0) > 0$
(c) x_0 ist lok. Maximalstelle von $f \Leftrightarrow n$ gerade, $f^{(n)}(x_0) < 0$

<u>Bsp</u>

$f(x) = x^4$ | $f(0) = 0$
$f'(x) = 4x^3$ | $f'(0) = 0$
$f''(x) = 12x^2$ | $f''(0) = 0$
$f'''(x) = 24x$ | $f^{(3)}(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = 24$ | $f^{(4)}(0) = 24 > 0$

$f(0)$ lokales Minimum



$y = x^4$

7. Taylorreihen und Potenzreihen

(7.1) Taylorpolynom

Gegeben · Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 \in D$,

· Werte $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \dots$

Gesucht · Näherung für $f(x)$ mit x nahe x_0

Satz

Sei $p(x) = a_n (x-x_0)^n + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \dots + a_1(x-x_0) + a_0$

ein Polynom vom Grad $\leq n$. Dann gilt für $0 \leq k \leq n$

$$p^{(k)}(x_0) = k!\, a_k \qquad \left(\text{bzw } a_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} \right)$$

Beweisskizze

$$p(x) = a_n (x-x_0)^n + \dots + a_2(x-x_0)^2 + a_1(x-x_0) + a_0 \quad \Rightarrow p(x_0) = a_0$$

$$p'(x) = n \cdot a_n (x-x_0)^{n-1} + \dots + 2a_2(x-x_0)^1 + a_1 \quad \Rightarrow p'(x_0) = 1 \cdot a_1$$

$$p''(x) = (n-1)n\, a_n \cdot (x-x_0)^{n-2} + \dots + 1 \cdot 2 \cdot a_2 \quad \Rightarrow p''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot a_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$p^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \cdot a_n \quad \Rightarrow p^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$$

$$p^{(n+1)}(x) = 0$$

sauberer Beweis mit vollständiger Induktion

Beispiel

Es sei p Polynom vom Grad $\leq 2 = n$ mit

$p(1) = -1 \qquad p'(1) = 0 \qquad p''(1) = 4$

$$\Rightarrow \quad p(x) = a_2(x-1)^2 + a_1(x-1)^1 + a_0$$

mit $a_0 = \frac{p(1)}{0!} = \frac{-1}{1} = -1$, $a_1 = \frac{p'(1)}{1!} = 0$, $a_2 = \frac{p''(1)}{2!} = 2$

$$\Rightarrow \quad p(x) = 2(x-1)^2 + 0(x-1) + (-1)$$

$$= 2(x-1)^2 - 1 = 2x^2 - 4x + 1$$

Definition

Das Polynom $T_{f,x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$

mit $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ für $0 \leq k \leq n$ heißt

n-tes Taylorpolynom der Funktion f an der Entwicklungsstelle x_0

Bemerkung 1

$T_{f,x_0,1}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

Dann ist $y = T_{f,x_0,1}(x)$ die Tangente von f an der Stelle x_0

Bemerkung 2

Für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$T^{(k)}_{f,x_0,n}(x_0) = k!\, a_k = f^{(k)}(x_0)$$

d.h. das Taylorpolynom stimmt an der Stelle x_0 im Funktionswert und den ersten n Ableitungen mit f überein.

Dann ist $T_{f,x_0,n}(x)$ eine Näherung für $f(x)$ mit der

Abweichung $R_{f,x_0,n}(x) := f(x) - T_{f,x_0,n}(x)$

Es gilt dann

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{f,x_0,n}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

d.h. $R_{f,x_0,n}(x)$ geht schneller gegen 0 als $(x-x_0)^n$ für $x \to x_0$.

$$\left(R_{f,x_0,n}(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \right)$$

Beispiel $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D = [0,\infty)$, $x_0 = 1$

- $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad f(x_0) = f(1) = 1$
- $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2}$
- $f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$ $\qquad f''(x_0) = f''(1) = -\frac{1}{4}$
- $f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}$ $\qquad f'''(x_0) = f''(1) = \frac{3}{8}$

Sind f und x_0 klar schreibt man T_n statt $T_{f,x_0,n}$

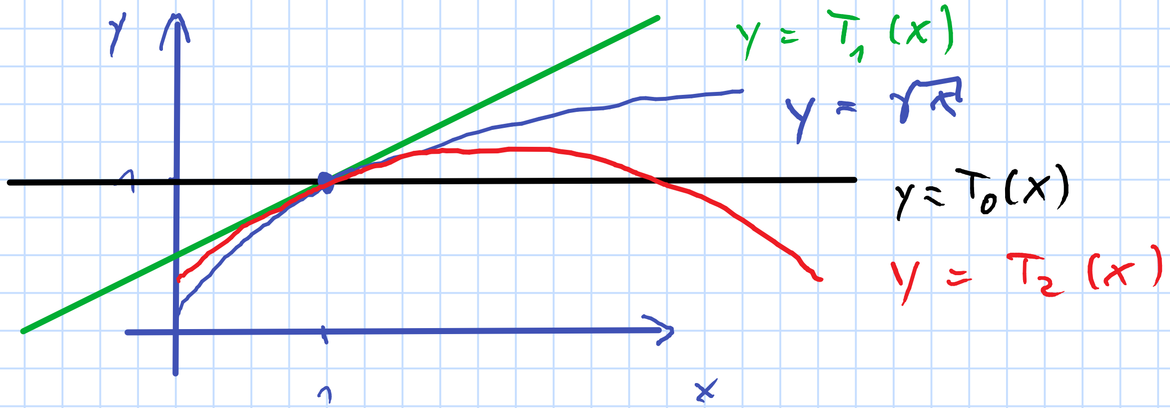
$$T_0(x) = f(x_0) = 1$$

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$$



Satz

Die Tangente $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)$

ist die beste affine Näherung für f an der Stelle x_0

d.h. ist

$$G(x) = f(x_0) + a\,(x-x_0)$$

eine Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ und

gilt
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-G(x)}{x-x_0} = 0$$

so ist $a = f'(x_0)$ und somit $G(x) = T_1(x)$

Beweis

- $$\frac{f(x)-G(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a$$

- $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-G(x)}{x-x_0} = 0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a = 0$$
$$\iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$$
$$\iff f'(x_0) = a$$

$\blacksquare$

Satz gilt in entsprechender Form für n-tes Taylorpolynom

(7.2) Taylorreihe von f an der Stelle x_0

(1) Definition

$$T_{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k \quad \text{mit } a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

heißt **Taylorreihe** von f an der Stelle x_0

Bemerkung $T_{f,x_0}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_{f,x_0,n}(x)$, d.h.

n-tes Taylorpolynom = n-te Partialsumme der Taylorreihe

(2) Problem

- Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe konvergent?
- Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $T_{f,x_0}(x) = f(x)$

(3) n-tes Restglied

$$R_{f,x_0,n}(x) = f(x) - T_{f,x_0,n}(x) \quad , \quad f(x) = T_{f,x_0,n}(x) + R_{f,x_0,n}(x)$$

Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = T_{f,x_0}(x) = \lim_{n\to\infty} T_{f,x_0,n}(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_{f,x_0,n}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |R_{f,x_0,n}(x)| = 0$$

Wiederholung

geg: $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in D$

Bekannt $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0) \ldots$

ges $f(x)$ in der Nähe von x_0

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$ Taylorpolynom

$n \to \infty$

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$ Taylorreihe

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Fkt-wert Taylorpolynom Restglied

(4) Restgliedformel von Lagrange

Zu jedem $x \in D$ existiert ein $\tilde{x}$ zwischen x_0 und x (d.h. $x < \tilde{x} < x_0$ oder $x_0 < \tilde{x} < x$) so dass gilt

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Dabei muss f auf dem Intervall (x_0, x) bzw (x, x_0) $n+1$ mal stetig diff'bar sein.

Bemerkung

Für das Taylorpolynom $T_n(x)$ von $f(x)$ an der Stelle x_0 gilt dann

$$T_n^{(k)}(x_0) = k!\, a_k = f^{(k)}(x_0)$$

für $0 \leq k \leq n$. Man benutzt $T_n(x)$ als Näherung für $f(x)$ mit der Abweichung

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

also

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Es gilt dann

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!}(x - x_0) = 0$$

d.h. $R_n(x)$ geht für $x \to x_0$ schneller gegen 0 als $(x - x_0)^n$

Beispiel 1

- $f(x) = \sin x$
  $f'(x) = \cos x$
  $f''(x) = -\sin x$
  $f'''(x) = -\cos x$
  $f^{(4)}(x) = \sin x$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x_0 = 0$

$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x \qquad a_{2k} = \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = 0$

$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \qquad a_{2k+1} = \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$

Beweis mit vollst. Ind.

- $$T(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \cdot (x-0)^\ell \underset{\ell = 2k+1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \dots$$

$T_0(x) = 0$

$T_1(x) = x \qquad T_2(x) = x, \qquad T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{1}{3!}x^3$

- Restgliedformel $\qquad R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!} x^{n+1}$$

mit $\quad x < \tilde{x} < x_0 \quad$ bzw $\quad x_0 < \tilde{x} < x$

$f^{n+1}(\tilde{x}) = \pm \cos \tilde{x} \quad$ bzw $\quad \pm \sin \tilde{x}$

$\Rightarrow \quad |f^{n+1}(\tilde{x})| \leq 1$

$$\Rightarrow \quad |R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\tilde{x})|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad$ für alle $x \Rightarrow |R_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = T(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beispiel 2 $\qquad f(x) = e^x \qquad x_0 = 0 \qquad$ (Beschluss)

- $f^{(k)}(x) = e^x \qquad f^{(k)}(0) = e^0 = 1 \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$
- $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$
- $T_0(x) = 1 \quad , \quad T_1(x) = 1+x \quad , \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
- Restglied $\qquad R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad \text{mit } \tilde{x} \text{ zwischen } 0 \text{ und } x$$

$$f^{(n+1)}(\tilde{x}) = e^{\tilde{x}} < \begin{cases} e^x & x > x_0 = 0 \\ e^0 = 1 & x < x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

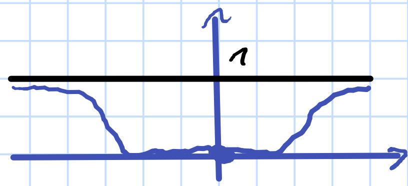
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Also gilt $f(x) = T(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$

$$e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad |e - S_n| = |R_n(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{2{,}8}{(n+1)!}$$

Beispiel 3

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$



$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \qquad \text{(lange Rechnung)}$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0$$

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^k = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow T(x) = f(x) \quad \text{nur für } x = x_0 = 0$$

(7.3) Potenzreihen

(1) Definition

Eine Reihe der Form
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$
wird Potenzreihe (PR) genannt. Weiterhin heißt

$x_0 \in \mathbb{R}$: Zentrum (bzw. Entwicklungsstelle) der PR

a_k : Koeffizienten der PR

x : Unbestimmte der PR

Bsp.: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (x_0 = 0, \; a_k = 1 \; \forall k)$

Reihe ist konvergent für $|x| < 1$ und $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

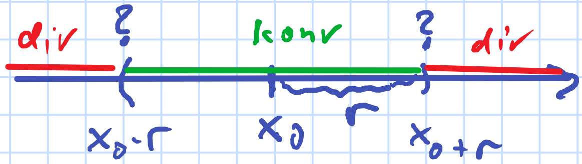
(geom. Reihe)

Bemerkung: Taylorreihen sind spezielle PR

(2) Konvergenzverhalten

Es gibt stets ein Intervall I der Form
$$I = (x_0 - r, x_0 + r) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r \}$$
so dass gilt
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \text{ ist } \begin{cases} \text{konvergent} & \text{für } x \in I \; (|x-x_0| < r) \\ \text{divergent} & \text{für } x \text{ mit } |x-x_0| > r \\ ? & \text{für } x = x_0 \pm r \end{cases}$$

Man nennt dann I das Konvergenzintervall der PR und r den Konvergenzradius der PR



Für $x \in I$ existiert die Summe $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

Man nennt f Summenfkt. der PR $\quad f: I \to \mathbb{R}$

Bemerkung: Der Konvergenzradius kann auch ∞ sein.
Dann ist $I = (x_0 - \infty, x_0 + \infty) = \mathbb{R}$

(3) Bestimmung von I mit Wurzel-/Quotientenkriterium

$$q(x) = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k (x-x_0)^k|} = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1} (x-x_0)^{k+1}}{a_k (x-x_0)^k} \right|$$

Dann gilt:

$$\text{PR ist für } x \begin{cases} \text{konv.} & \text{falls } q(x) < 1 \\ \text{div} & \text{falls } q(x) > 1 \\ ? & \text{falls } q(x) = 1 \end{cases}$$

Beispiel
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 + \dots$$

$$q(x) = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{k+1} x^{k+1}}{\frac{1}{k} x^k} \right| = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{k+1} \cdot |x| = |x|$$

$$q(x) < 1 \iff |x| < 1 \iff x \in (-1, 1)$$

Konvergenzintervall $I = (-1, 1)$, Radius $r = 1$

Summenfunktion
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \quad \text{existiert für } x \in I$$

Betrachtung der Randpunkte

$x = 1$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ $\quad$ PR divergent (harmonische Reihe)

$x = -1$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ $\quad$ PR konvergent (alternierende harm. Reihe)

(7.4.) Rechnen mit Potenzreihen

Seien
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \quad \forall x \in I_1$$
$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k \quad \forall x \in I_2$$

2 Potenzreihen mit gleichem Zentrum x_0. Dann gilt für die Summenfunktionen f, g:

(1) $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)(x-x_0)^k \quad \forall x \in I_1 \cap I_2$

(2) $f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0)(x-x_0)^k \quad \forall x \in I_1 \cap I_2$

(3) f ist differenzierbar auf I_1 und die Ableitung kann gliedweise gebildet werden, d.h.
$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k (x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k (x-x_0)^{k-1} \quad \forall x \in I_1$$

(4) $\Rightarrow$ f ist beliebig oft differenzierbar auf I_1 und es gilt
$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

d.h. auf I_1 stimmt f mit der Taylorreihe von f überein

Beweis zu (4): analog zu Polynomen

Bsp: Summenfkt. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \quad I = (-1,1)$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{k} \cdot x^{k-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{(geom. Reihe)}$$

$f'(x) = \frac{1}{1-x} \implies f(x) = -\ln(1-x) + c \xRightarrow[x=0 \text{ einsetzen}]{f(0)=0} c = 0$

(7.5) Die Exponentialfunktion

Betrachten Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Berechnung des Konvergenzintervalls

QK $\left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \left| \frac{x^{k+1} \cdot k!}{x^k \quad (k+1)!} \right| = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0 < 1$

für alle x

$\Rightarrow$ konvergent für alle x also $I = \mathbb{R}$

Definieren

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

(später $\exp(x) = e^x$)

Eigenschaften

$$\exp(0) = \frac{0^0}{0!} = 1 \qquad (e^0 = 1)$$

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \qquad (e^1 = e)$$

$$\exp(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{\ell!\,(k-\ell)!} x^\ell y^{k-\ell}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \underbrace{\frac{x^\ell}{\ell!}}_{a_\ell} \cdot \underbrace{\frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!}}_{b_{k-\ell}}$$

$$\overset{\text{Cauchy Produkt}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

$$(e^{x+y} = e^x \cdot e^y)$$

$$\exp(x)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right)'$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$$

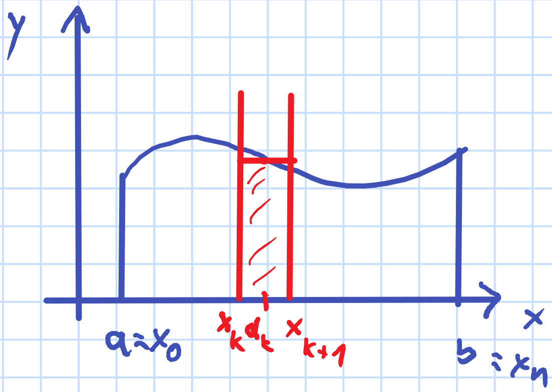
$$(e^x)' = e^x$$

Kapitel II: Integralrechnung für Fkt $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(1) Das bestimmte Integral

Geg: $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fkt. $\quad I = [a,b] \subseteq D$ Intervall

(1.1) Summendefinition



- $a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} \dots < x_n^{(n)} = b$ Unterteilung von $I = [a,b]$
- $\Delta x_k^{(n)} = x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}$ Länge des Teilintervalls $I_k^{(n)} = [x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$
- $\alpha_k^{(n)} \in I_k^{(n)}$ Zwischenwert
- $f(\alpha_k^{(n)}) \cdot \Delta x_k^{(n)}$ $\hat{=}$ Flächeninhalt des Rechtecks über $I_k^{(n)}$ mit Höhe $f(\alpha_k^{(n)})$

- Existiert der Grenzwert der Summe

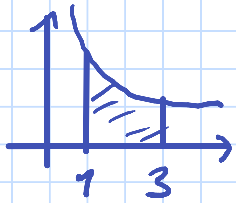
$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k^{(n)}) \, \Delta x_k^{(n)}$$

für $n \to \infty$ und $\Delta x_k^{(n)} \to 0$ für alle Folgen von Unterteilungen mit dieser Eigenschaft und hat stets denselben Wert, so heißt der GW <u>Wert des bestimmten Integrals</u> von f über $I = [a,b]$

in Zeichen $\quad \int_a^b f(x)\,dx$

Die Funktion f heißt dann über I <u>integrierbar</u>

Beispiel $\quad J = \int_1^3 \frac{1}{x}\, dx$



$y = \frac{1}{x}$

- Unterteilen $I = [1,3]$ in gleichgroße Teilintervalle

$$I_k^{(n)} = \left[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}\right] \qquad k = 0, \dots, n-1$$

- Schrittweite $\quad \Delta x_k^{(n)} = x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)} = \frac{2}{n}$

$$\Rightarrow \quad x_k = x_0 + k \cdot \Delta x_k = 1 + \frac{2k}{n} = \frac{n+2k}{n}$$

- Für $\alpha_k^{(n)} \in I_k^{(n)} = \left[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}\right]$ wählen wir $\alpha_k^{(n)} = x_k^{(n)} = \frac{n+2k}{n}$

$$\Rightarrow \quad f\left(\alpha_k^{(n)}\right) = \frac{n}{n+2k}$$

- Summenfunktion $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n+2k} \cdot \frac{2}{n}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n+2k}$$

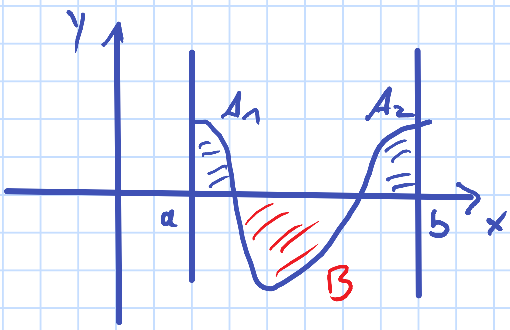
- Existiert J so ist $J = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$

$$S_{20} \approx 1{,}132 \qquad S_{300} \approx 1{,}1008 \qquad J = \ln 3 \approx 1{,}0986$$

(1.2) Existenz

Ist f stetig auf $I = [a,b]$, so ist f auf I integrierbar
(stückweise stetig reicht auch)

(1.3) Geometrische Deutung



$$\int_a^b f(x)\, dx = A_1 + A_2 - B$$

A_1, A_2, B $\quad$ Flächeninhalte

(1.4) Mittelwertsatz der Integralrechnung

Es sei f auf $I = [a,b]$ stetig. Dann definiert man

$$M := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

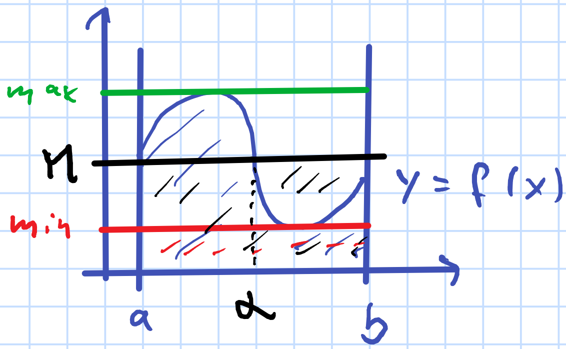
als Mittelwert von f auf I.

Es gibt dann ein $\alpha \in I$ mit $M = f(\alpha)$

Beweisskizze

$max = \max_{x \in I} f(x)$

$min = \min_{x \in I} f(x)$



$$(b-a)\, min \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq (b-a)\, max$$

$$\Rightarrow \exists\ M \in [min, max] \text{ mit } \int_a^b f(x)\,dx = M \cdot (b-a)$$

Aus dem ZWS folgt $\exists\ \alpha \in [a,b]$ mit $f(\alpha) = M$ $\boxtimes$

(1.5) Folgerungen aus der Summendefinition

Ist f über $I = [a,b]$ integrierbar, so gilt:

(a) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \quad \forall c \in [a,b]$

(b) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

Bemerkung Ist $a < b$ so definiert man $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$

Damit gilt dann die Aussage a) auch für $c \notin [a,b]$ falls f weiterhin in jedem Intervall integrierbar ist

2. Das unbestimmte Integral

Gegeben
- $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $I = [a,b] \subseteq D$ Intervall
- f stetig auf I

Gesucht $\int_a^b f(x)\,dx$

Bemerkung

Benutzen wir die Summendefinition aus (1.1) so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)}_{f(\alpha_k) = f(x_k)} \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x_k}$$

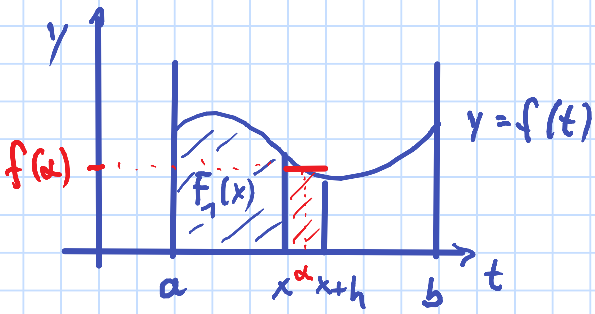
So gilt z.B.

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k\cdot\frac{2}{n}} \cdot \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n+2k}$$

Wir suchen bessere Methode zur Berechnung von $\int_a^b f(x)\,dx$.

(2.1) Stammfunktion

Betrachten Funktion $F_1(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ für $x \in I$



Dann gilt

- $F_1(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt$

$$= F_1(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad F_1(x+h) - F_1(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt \overset{MVS}{=} \big((x+h)-x\big)\cdot f(\alpha) \qquad \alpha \in [x, x+h]$$

$$= h \cdot f(\alpha) \qquad \alpha \in [x, x+h]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F_1(x+h) - F_1(x)}{h} = f(\alpha) \qquad \alpha \in [x, x+h]$$

$$\downarrow h \to 0 \qquad\qquad \downarrow h \to 0$$

$$\Rightarrow \quad F_1'(x) = f(x)$$

Def. Ableitung   Stetigkeit von f

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_1'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I = [a,b]}$$

Definition

Eine Fkt. $F: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt <u>Stammfunktion</u> von f auf I, falls für alle $x \in I$ gilt $F'(x) = f(x)$

Bemerkung

Sind $F, G : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen von f auf I so gilt $\forall x \in I \quad F(x) = G(x) + c$ mit Konstante c

Beweis

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow \quad F(x) - G(x) = c \quad \forall x \in I$$

$\square$

(2.2) Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Ist f stetig auf $I = [a,b]$ und F Stammfunktion von f auf I, d.h. $\forall x \in [a,b] : F'(x) = f(x)$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a)$$

Beweis:

- $F_1(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfkt. von f auf I (siehe (2.1))
- F sei Stammfkt. von f auf $I \Rightarrow \forall x \in I : F(x) = F_1(x) + c$
- $F(a) = F_1(a) + c = \int_a^a f(t)\,dt + c = 0 + c = c$
- $F(b) = F_1(b) + c = \int_a^b f(t)\,dt + c$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt + c - c = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

$\square$

Beispiel $\quad \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

- $F(x) = \ln x$ ist Stammfkt. von $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $I = [1,3]$ da $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ für $x \in [1,3]$

$$\Rightarrow \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_{x=1}^{x=3} = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

Definition

Die Menge aller Stammfunktionen von f auf I heißt <u>unbestimmtes Integral</u> $\int f(x)\,dx$ auf I

kurz

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \iff F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Beispiel

- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c \qquad I = (0,\infty), \quad \ln x' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in I$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + c \qquad I = (-\infty, 0), \quad \ln(-x)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in I$

$\Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \qquad I$ beliebig $\quad 0 \notin I$

Bemerkung

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + c$$

3. Integrationsregeln

(3.1) Grundintegrale

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1)$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

(ergeben sich aus Ableitungsregeln für Grundfkt)

(3.2) Summenregel Linearität

- $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\int \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int f(x)\,dx \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

(ergibt sich aus entsprechender Differentiationsregel)

Bemerkung

$$\int e^{-x^2}\,dx = F(x) + c \qquad \text{mit} \qquad F'(x) = e^{-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

F lässt sich <u>nicht</u> mittels elementarer Funktionen ausdrücken

(3.3) Integration von Potenzreihen

Sei f die Summenfkt. einer Potenzreihe mit Konvergenzintervall I

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

für $x \in I$. Dann ist f über I integrierbar und es gilt

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int a_k (x-x_0)^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{k+1} (x-x_0)^{k+1} + C$$

Beispiel $\quad \Phi(a) = \int_0^a e^{-x^2}\,dx \qquad$ Fehlerfunktion

- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \Rightarrow e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}$
- $\Phi(a) = \int_0^a e^{-x^2}\,dx = \int_0^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^a \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}\,dx$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1} \cdot x^{2k+1} \Big|_{x=0}^{x=a}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)} a^{2k+1} = a^1 - \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{10} a^5 - \frac{1}{42} a^7 + \frac{1}{216} a^9 \dots$$

(3.4.) Partielle Integration

Für auf $I = [a,b]$ differenzierbare Funktionen $u = u(x)$ und $v = v(x)$ gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \int u \cdot v' \, dx &= uv - \int u' v \, dx \\ \int_a^b u v' \, dx &= uv \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u' v \, dx \end{aligned}}$$

Beweis

Produktregel der Differentiation

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int (uv)' dx = \int u'v \, dx + \int uv' \, dx$$

$$uv + c = \int u'v \, dx + \int uv' \, dx$$

$$\Rightarrow \int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx \quad (+c)$$

$\blacksquare$

Beispiel 1 $\quad J = \int x \cdot \cos x \, dx$

$$u = x \rightarrow u' = 1$$

$$v' = \cos x \rightarrow v = \sin x \quad (+c)$$

$$\Rightarrow J = \int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

$$= x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx$$

$$= x \sin x + \cos x + c$$

Bsp 2 $\quad J = \int \ln x \, dx = \int \ln x \cdot 1 \, dx$

$$u = \ln x \rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \rightarrow v = x$$

$$J = uv - \int u'v \, dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - x + c$$

$$= x(\ln x - 1) + c$$

Beispiel 3

$$J = \int \cos^2 x \, dx = \int \underset{u}{\cos x} \cdot \underset{v'}{\cos x} \, dx$$

$$u = \cos x \quad \rightarrow \quad u' = -\sin x$$
$$v' = \cos x \quad \quad \quad v = \sin x$$

$$= uv - \int u'v \, dx = \cos x \cdot \sin x - \int -\sin x \sin x \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx$$

$$J = \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int 1 \, dx - \underbrace{\int \cos^2 x \, dx}_{J} \qquad || + J$$

$$2J = \cos x \sin x + x + c$$

$$J = \frac{1}{2} (\cos x \sin x + x + c)$$

(3.5.) Substitutionsregeln

Sei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$ also $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ und sei $x = g(t)$ für eine injektive Funktion $g : J \to I$

Für $H(t) = F(g(t))$

gilt dann

$$H'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

(Kettenregel) und es gilt

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c = H(t) + c = H(g^{-1}(x)) + c$$

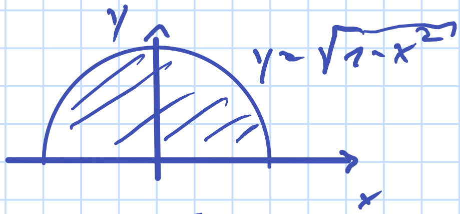
Substitutionsregel I

Für die Substitution $x = g(t)$ mit g injektiv ist $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ also $dx = g'(t)\,dt$ und es gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \;\Big|_{t = g^{-1}(x)} \\ \int_a^b f(x)\,dx &= \int_{t = g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \end{aligned}}$$

Beispiel

$$J = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$



$$J = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$
$$y^2 = 1 - x^2$$
$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y \geq 0$$

Substitution

$$x = \sin t \qquad t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t = \arcsin x$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \qquad x = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2}$$

$$\qquad x = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad dx = \cos t \cdot dt$$

$$\Rightarrow \quad J = \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\, dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\, \cos t\, dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos t| \cdot \cos t\, dt \qquad \cos t \geq 0 \text{ für } t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos t \cdot \sin t + t\right)\Big|_{t=-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 \cdot 1 + \frac{\pi}{2} - \left(0 \cdot (-1) - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

oder zuerst unbestimmtes Integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \ldots = \frac{1}{2}\left(\cos t \sin t + t\right)\Big|_{t=\arcsin x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos \arcsin x \cdot x + \arcsin x\right)$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\cos \arcsin x \cdot x + \arcsin x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

Substitutionsregel II

Für $\int f(x)\,dx$ mit $f(x) = g(h(x)) \cdot h'(x)$

und der Substitution

$z = h(x) \qquad \frac{dz}{dx} = h'(x) \qquad$ also $\quad dz = h'(x)\,dx$

erhält man

$$\boxed{\begin{aligned} \int g(h(x)) \cdot h'(x)\,dx &= \int g(z)\,dz \Big|_{z=h(x)} \\ \int_{x=a}^{b} g(h(x)) \cdot h'(x)\,dx &= \int_{z=h(a)}^{h(b)} g(z)\,dz \end{aligned}}$$

Beispiel 1 $\quad \int e^{5x-7}\,dx$

Subst $\quad z = 5x - 7$

$\frac{dz}{dx} = 5 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dz}{5}$

$$\int e^{5x-7}\,dx = \int e^z \cdot \frac{dz}{5} \Big|_{z=5x-7} = \frac{1}{5} e^z + c \Big|_{z=5x-7}$$

$$= \frac{1}{5} e^{5x-7} + C$$

Beispiel 2 $\quad \int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

Subst: $\quad z = \cos x$

$\frac{dz}{dx} = -\sin x \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{dz}{\sin x}$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\cancel{\sin x}}{z} \cdot -\frac{dz}{\cancel{\sin x}} = -\int \frac{1}{z}\,dz$$

$$= -\ln|z| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

Spezialfälle

- $\int g(ax+b)\,dx \overset{z=ax+b}{=\!=} \frac{1}{a}\int g(z)\,dz \Big|_{z=ax+b}$

(lineare Substitution)

- $\int \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx \overset{z=h(x)}{=} \int \frac{1}{z}\,dz \Big|_{z=h(x)} = \ln|h(x)| + c$

(„logarithmische Substitution")

- $\int [h(x)]^n \cdot h'(x)\,dx \overset{z=h(x)}{=\!=} \int z^n\,dz \Big|_{z=h(x)} = \frac{1}{n+1}\left(h(x)\right)^{n+1} + C$

$n \neq -1$

Nutzlose Substitution

$J = \int e^{2x}\sqrt{x}\,dx$ Subst: $z = \sqrt{x}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$dx = 2\sqrt{x}\,dz = 2z\,dz$

$J = \int e^{2z^2} \cdot 2z^2\,dz = ?$

Standardsubstitution

Falls f gebrochen rationale Funktion in $\cos x, \sin x$ ist, substituiert man

$z = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan z$ $\frac{dx}{dz} = \frac{2}{1+z^2}$

$\Rightarrow dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$

$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$ $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

Bsp! $\int \frac{\cos x + 3\sin^2 x}{\sin x - \cos x}\,dx = \frac{\frac{1-z^2}{1+z^2} + 3\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^2}{\frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2}\,dz \Big|_{z=\tan\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow$ gebrochen rat. Fkt. in z (Lösung später)

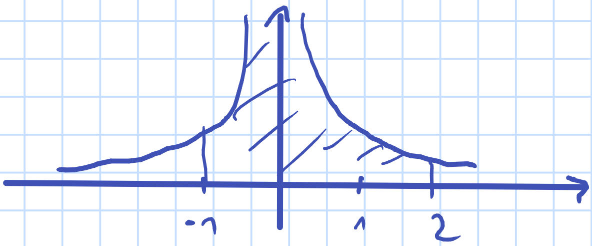
4. Uneigentliche Integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{2} = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{2} x^{-2}\,dx = -x^{-1}\Big|_{-1}^{2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{2} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

– falsch

Integrand $f(x) = \frac{1}{x^2}$ hat bei $x = 0$ eine Unendlichkeitsstelle



(4.1) Definition

$\int_a^b f(x)\,dx$ heißt <u>uneigentliches Integral</u> falls

(1) $a = -\infty$ oder $b = \infty$ ODER

(2) f eine Unendlichkeitsstelle (Polstelle) $c \in [a,b]$ hat, d.h. $\lim\limits_{x \to c \pm 0} f(x) = \pm\infty$

(4.2) Unendliche Grenzen

(1) Definition

Ist f stetig auf dem Integrationsintervall, so definiert man

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

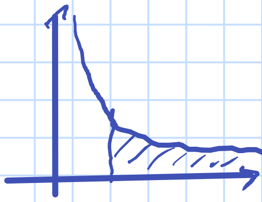
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$$

Die Integrale heißen <u>konvergent</u>, falls die GW endlich sind

(2) Beispiele

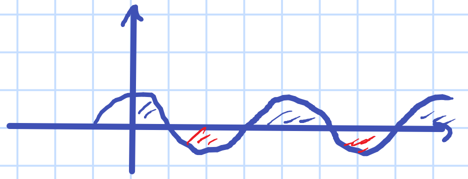
a) $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right) \to 1$$



b) $$\int_0^\infty \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty} \sin x\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \sin b - 0$$



divergent

c) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \arctan x\Big|_a^b$$

$$= \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \arctan b - \arctan a$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Bemerkung

f heißt Dichtefunktion, falls $f(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung benutzt für stetig verteilte Zufallsgrößen X.

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dichtefkt. der Standardnormalverteilung

(Gaußsche Glockenkurve)

(4.3) Unendlichkeitsstellen (US)

(1) Definition

Sei $a < b$

(a) f stetig auf $(a,b]$ und a US dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = \lim_{\tilde{a} \to a+0} \int_{\tilde{a}}^b f(x)\,dx$$

b) f stetig auf $[a,b)$ und b US dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\tilde{b} \to b-0} \int_a^{\tilde{b}} f(x)\,dx$$

c) f stetig auf (a,b) und a, b US dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\tilde{a} \to a+0 \\ \tilde{b} \to b-0}} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(x)\,dx$$

d) Hat f in $[a,b]$ US $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m}^b f(x)\,dx$$

(2) Beispiele

a) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a \to +0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a \to +0} 2\sqrt{x}\,\Big|_a^1 = \lim_{a \to +0} 2 - 2\sqrt{a} = 2$$

konvergent

b) $$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b \to -0} \int_{-1}^b \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{a \to +0} \int_a^2 \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b \to -0} -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^b + \lim_{a \to +0} -\frac{1}{x}\Big|_a^2$$

$$= \lim_{b \to -0} -\frac{1}{b} - 1 + \lim_{a \to +0} -\frac{1}{2} + \frac{1}{a}$$

$$= \infty - 1 - \frac{1}{2} + \infty = \infty$$ divergent

5. Summen und Integrale

(5.1) Harmonische Zahlen

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad H_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty \quad \text{harmonische Reihe}$$

- Wie schnell wächst H_n?
- $f(x) = \frac{1}{x} \quad x > 0 \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$

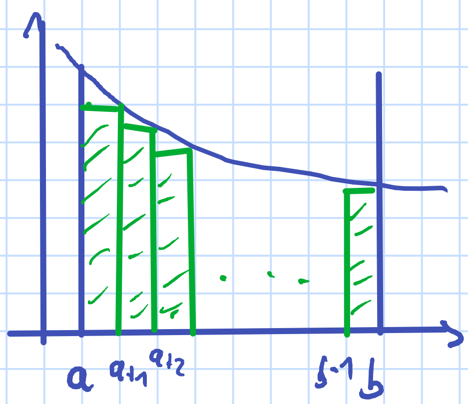
(5.2) Monoton fallende Funktionen

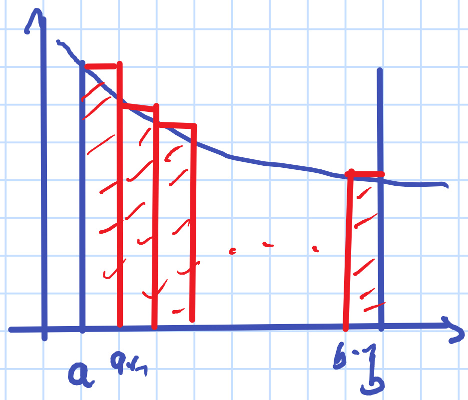
Vor: $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und monoton fallend auf I
$(f(x) \geq 0$ für alle $x \in I)$
$a, b \in I$ natürliche Zahlen mit $a < b$

Dann gilt

$$f(b) + \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{k=a}^{b} f(k) \leq f(a) + \int_a^b f(x)\,dx$$

Beweis





$$f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(b) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f(a) + f(a+1) + \ldots + f(b-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=a+1}^{b} f(k) + f(a) \leq \int_a^b f(x)\,dx + f(a) \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + f(b) \leq \sum_{k=a}^{b-1} f(k) + f(b) \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx + f(b) \overset{(2)}{\leq} \sum_{k=a}^{b} f(k) \overset{(1)}{\leq} \int_a^b f(x)\,dx + f(a)$$

(5.3) Harmonische Zahlen (revisited)

- $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$ mon. fallend auf $I = (0, \infty)$
- $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^n = \ln n - \ln 1 = \ln 1$
- Also gilt

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ln n + \frac{1}{n}}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \frac{\ln n + 1}{\ln n}$$

$$\Big\downarrow \; n \to \infty$$

$$1 \leq \lim_{n \to \infty} \frac{H_n}{\ln n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1 \Rightarrow H_n \sim \ln n \Rightarrow H_n = \Theta(\ln n)$$

(5.4) Integralkriterium für Reihen

Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ stetige mon. fallende Fkt. mit $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, \infty)$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergent}$$

Folgt aus (5.2)

__Beispiel__ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$ mon. fallend und stetig

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \int_1^{\infty} x^{-3/2}\,dx = -2x^{-\frac{1}{2}} \Big|_1^{\infty}$$

$$= \lim_{b \to \infty} -2x^{-\frac{1}{2}} \Big|_1^{b} = \lim_{b \to \infty} -2b^{-\frac{1}{2}} + 2$$

$$= 2$$

$\Rightarrow$ Integral und damit Reihe sind konvergent

(5.5) Monoton wachsende Funktionen

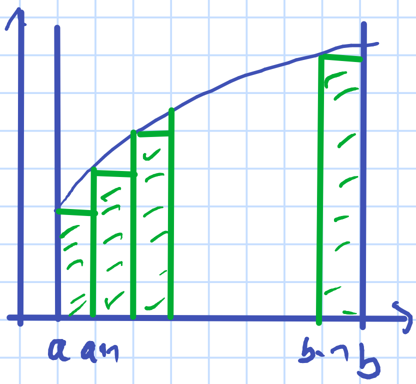
Vor: • $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und mon. wachsend auf I

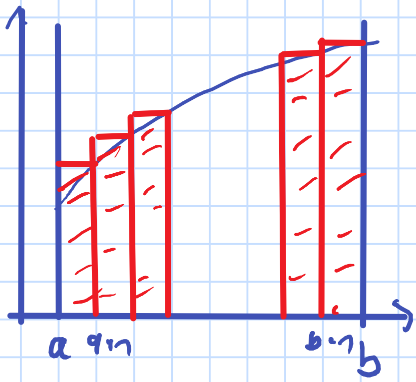
• $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \qquad a, b \in I$ nat. Zahlen

Dann gilt:

$$f(a) + \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{k=a}^{b} f(k) \leq f(b) + \int_a^b f(x)\,dx$$

Beweis





$$f(a) + f(a+1) + \ldots + f(b-1) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f(a+1) + \ldots + f(b)$$

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) + f(b) \leq f(b) + \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\sum_{k=a+1}^{b} f(k) + f(a) \geq \int_a^b f(x)\,dx + f(a)$$

$$\Rightarrow \quad f(a) + \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{k=a}^{b} f(k) \leq f(b) + \int_a^b f(x)\,dx$$

Kapitel III : Lineare Algebra

1. Komplexe Zahlen

(1.1) Einführung

$\mathbb{N}$: $x + a = 0$ unlösbar für $a \neq 0$

$\mathbb{Z}$: $x + a = 0 \Leftrightarrow x = -a$

$x \cdot a = 1$ unlösbar für $a \neq \pm 1$

$\mathbb{Q}$: $x \cdot a = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$ $a \neq 0$

$x^2 = 2$ unlösbar in $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$: $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$ $(a \geq 0)$

$x^2 = -1$ unlösbar

$\mathbb{C}$: $x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$ $i^2 = -1$ $(\text{"} i = \sqrt{-1} \text{"})$

$x^2 - 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{-9} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9}$

$\Leftrightarrow x = 2 \pm 3i$

(1.2) Algebraische Form komplexer Zahlen

komplexe Zahlen sind Ausdrücke z der Form

$$\boxed{z = x + i \cdot y \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}}$$

(bisher nur Schreibweise

$z = (x, y)$ genauso denkbar)

Bezeichnungen

$x = \mathrm{Re}(z)$: Realteil von z

$y = \mathrm{Im}(z)$: Imaginärteil von z

i : imaginäre Einheit $i^2 = -1$

$\mathbb{C} := \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ komplexe Zahlen

$\forall z \in \mathbb{C}$: $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = x + i \cdot 0 = x$

(1.3) Arithmetische Operationen

Gegeben seien komplexe Zahlen

$$\boxed{z = a + ib \qquad u = c + id}$$

(a) Gleichheit

$$z = u \iff a = c \wedge b = d$$
$$\iff Re(z) = Re(u) \quad \wedge \quad Im(z) = Im(u)$$

(b) Addition/Subtraktion

$$z \pm u = (a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$$
$$= Re(z) \pm Re(u) + i\,(Im(z) \pm Im(u))$$

$\hat{=}$ komponentenweise Addition/Subtraktion in Vektorschreibweise

(c) Multiplikation

$$z \cdot u = (a + ib) \cdot (c + id) = ac + aid + ibc + i^2 bd$$
$$\overset{i^2 = -1}{=} \underbrace{ac - bd}_{Re(z \cdot u)} + i(\underbrace{ad + bc}_{Im(z \cdot u)})$$

$\hat{=}$ Multiplikation für Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ aus GudS üS

(d) Division

$$\frac{z}{u} = \frac{a + ib}{c + id} \qquad \text{Erweitern mit } c - id$$
$$= \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)}$$
$$= \frac{ac - aid + ibc - i^2 bd}{c^2 - i^2 d^2}$$
$$\overset{i^2 = -1}{=} \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Also $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{u}\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}$ $\quad \operatorname{Im}\left(\frac{z}{u}\right) = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

Geht nur, falls $c^2+d^2 \neq 0$ also wenn

$u = c+id \neq 0 + i\cdot 0$ $\quad (c,d) \neq (0,0)$

Beispiele

- $w = \frac{3-2i}{1+2i} = \frac{3-2i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{3-6i-2i+4i^2}{1-4i^2} = \frac{-1-8i}{5}$

  $= -\frac{1}{5} + i\left(-\frac{8}{5}\right) \Rightarrow \operatorname{Re}(w) = -\frac{1}{5} \quad \operatorname{Im}(w) = -\frac{8}{5}$

- $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{-b}{a^2+b^2}$

Bemerkung

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper (siehe Gruds ÜS)

(1.4) Betrag komplexer Zahlen, konjugiert komplexe Zahl

Für eine komplexe Zahl $z = x+iy$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ definiert man

$$|z| := \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{\underline{Betrag} von } z$$

$$\bar{z} := x - iy \qquad \text{\underline{konjugiert komplexe Zahl} von } z$$

Regeln

(R1) $z\cdot\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

(R2) $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$, $|\bar{z}| = |z|$

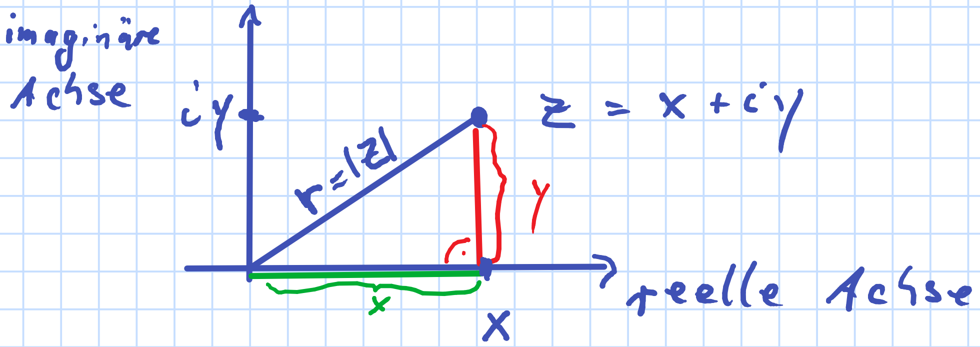
(R3) $|z|$ ist reell und ≥ 0

$|z| = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow z = 0$

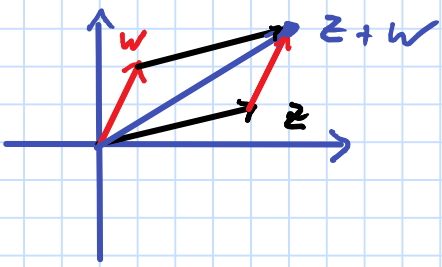
(R4) $\forall z,w \in \mathbb{C}$: $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$, $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$

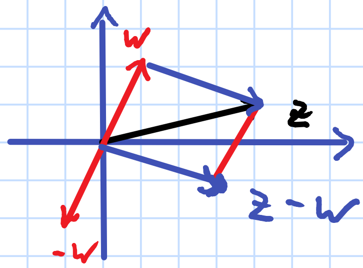
(R5) $\forall z,w \in \mathbb{C}$ $|z+w| \leq |z| + |w|$ <u>Dreiecksungleichung</u>

(1.5.) Gaußsche Zahlenebene



- komplexe Zahl $z = x + iy$ entspricht Punkt $P(x, y)$ mit Ortsvektor $\binom{x}{y}$ in der x-y-Ebene
- Pythagoras: $x^2 + y^2 = r^2$ also $r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$
  d.h. $|z|$ ist die Länge des Ortsvektors $\binom{x}{y}$ bzw der Abstand des Punktes $P(x,y)$ zu O = Nullpunkt
- Addition / Subtraktion von komplexen Zahlen entspricht Vektoraddition / -subtraktion





- $|z - w|$ = Abstand von z und w

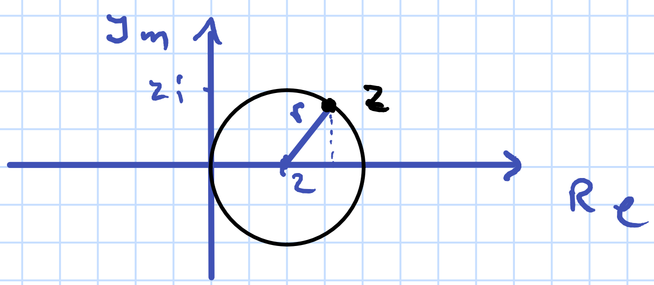
Bsp: $K = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-2| = 2 \}$

- $z = x + iy \Rightarrow z - 2 = x - 2 + iy \Rightarrow |z-2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$
- $|z-2| = 2 \iff (x-2)^2 + y^2 = 2^2$

Kreisgleichung

Kreis mit Mittelpunkt $M(2,0)$ Radius $r = 2$

Alle Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit Abstand 2 zu 2

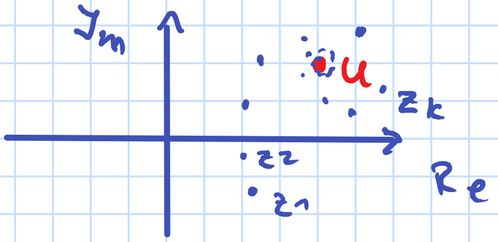


(1.6) Komplexe Zahlenfolgen und Reihen

Geg: • komplexe Zahlenfolge also Abbildung $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$z_n := z(n)$

• komplexe Zahl $u \in \mathbb{C}$



Def: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = u \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - u| = 0$

Beachte $a_n = |z_n - u|$ ist reelle Zahlenfolge

Bsp: • $z_n = 1 + \frac{1}{n} + i \cdot \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} u = 1 + i \cdot 0 = 1$

• $z_n - u = \frac{1}{n} + i\,\frac{2}{n}$ $\quad |z_n - u| = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{0+0} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = u$

Allgemein gilt

Ist $z_n = x_n + i y_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ so gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n$$

Analog gilt für Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k \qquad z_k = x_k + i y_k$$

Bemerkung

Für komplexe Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ gilt außerdem das Betragskriterium sowie das Wurzel- und Quotientenkriterium. Bilden also den Grenzwert

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} \quad \text{bzw} \quad q = \sqrt[k]{|z_k|}$$

$q < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergent, $\quad q > 1$ divergent $\qquad q = 1 \Rightarrow ?$

(1.7) Eulersche Formel

(1) komplexe e-Funktion

Betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

mit $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $z_k = \frac{1}{k!} \cdot z^k$ und

$$q = \lim_{k \to \infty} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} = \lim_{k \to \infty} \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{|z|^k} = \lim_{k \to \infty} \frac{|z|}{k+1} = 0 < 1$$

Also ist die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent.
Die Summenfkt. der Potenzreihe heißt komplexe e-Funktion kurz e^z also

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Dann gilt

- $e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^{x+i0} = e^x$ $\quad x \in \mathbb{R}$
- $e^{z+u} = e^z \cdot e^u$

(2) Satz (Eulersche Formel)

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \, , \quad \varphi \in \mathbb{R}}$$

<u>Beweis</u>

$$e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (i\varphi)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \varphi^k$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{i^{2\ell}}{(2\ell)!} \varphi^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{i^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \varphi^{2\ell+1}$$

$(k = 2\ell)$

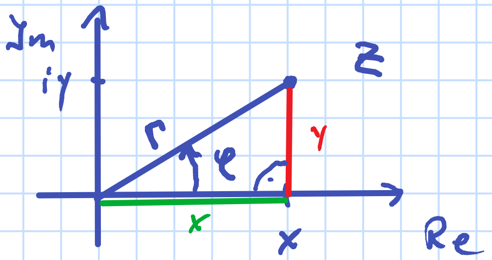
$$\overset{i^2=-1}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} \varphi^{2\ell} + i \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \varphi^{2\ell+1}$$

$$= \cos\varphi + i \sin\varphi$$

(siehe Taylorreihen von cos, sin Kapitel I)

(1.8) Polarkoordinaten, exponentielle Form

Gegeben $\quad z = x + iy \quad$ mit $\quad x, y \in \mathbb{R}$



Dann gilt

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = |z| \geq 0$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \qquad x = r \cdot \cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \qquad y = r \sin\varphi$$

$$(x, y) \longrightarrow (r, \varphi) \qquad (r, \varphi) \longrightarrow (x, y)$$

Man nennt

x, y : kartesische Koordinaten von z

r, φ : Polarkoordinaten von z $\quad \varphi \in [0, 2\pi)$ oder $\varphi \in (-\pi, \pi]$

φ heißt Hauptwert von z $\quad \varphi = \arg(z)$

Somit gilt

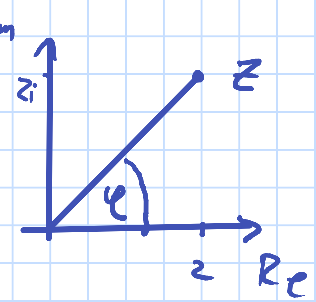
$$\boxed{z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}}$$

mit $\quad r = \sqrt{x^2+y^2} = |z| \quad$ und $\quad \varphi = \arg(z)$

$z = x + iy \qquad$ arithmetische Darstellung von z

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad$ trigonometrische Darstellung von z

$z = r \cdot e^{i\varphi} \qquad$ exponentielle Darstellung von z



Beispiel

$z = 2+2i \qquad x = Re(z) = 2 \qquad y = Im(z) = 2$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad = |z|$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi, \; k\in\mathbb{Z}$$

$\varphi = \arg(z) = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow z = 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Folgerung aus der Eulerschen Formel

(F1) $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + k\cdot 2\pi)} \quad k\in\mathbb{Z}$ (e-Fkt ist $2\pi i$ periodisch)

(F2) $|e^{i\varphi}| = 1 \qquad \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

(F3) $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

(F4) $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$

(F5) $\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

(F6) $z_1\cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1}\cdot r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1\cdot r_2)\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Beträge multiplizieren sich
Winkel addieren sich

Bsp:

- Potenzieren komplexe Zahl $\quad u = (2+2i)^{20}, \quad Re(u) = ?\; Im(u) = ?$

- binomische Formel
$$u = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot 2^k \cdot (2i)^k = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}\, 2^{2k}\cdot i^k$$
lang

- exponentielle Form $\quad z = 2+2i = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\Rightarrow u = z^{20} = \left(2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{20} = 2^{20}\cdot\sqrt{2}^{20}\cdot e^{i\frac{20}{4}\pi} = 2^{30} e^{i5\pi}$$
$$= 2^{30}\cdot e^{i\pi} = 2^{30}(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{30}$$

$\Rightarrow Re(u) = -2^{30} \qquad Im(u) = 0$

(1.9) Lösungen der Gleichung $z^n = w$

Gegeben: $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ $\quad n \geq 1$ natürliche Zahl

Gesucht $L = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = w \}$

Lösung:

1. Schritt

Bestimmen exponentielle Form von w

$$w = R \cdot e^{i\Phi} = R \cdot e^{i(\Phi + k \cdot 2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

mit $R = |w|$ und $\Phi = \arg(w)$

2. Schritt

Ansatz für z: $\quad z = r \cdot e^{i\varphi} \qquad r \geq 0 \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$

Einsetzen in $z^n = w$

$$r^n \cdot e^{i n \cdot \varphi} = R \cdot e^{i(\Phi + k \cdot 2\pi)}$$

Vergleich $\quad r^n = R \qquad\qquad n \cdot \varphi = \Phi + k \cdot 2\pi$

$$\Rightarrow r = \sqrt[n]{R} \qquad\qquad \varphi_k = \frac{\Phi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Lösungen $\quad z_k = r e^{i\varphi_k} = \sqrt[n]{R} \cdot e^{i\left(\frac{\Phi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$$z_{k+n} = \sqrt[n]{R} \cdot e^{i\left(\frac{\Phi}{n} + k\frac{2\pi}{n} + \cancel{n} \cdot \frac{2\pi}{\cancel{n}}\right)} = z_k$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{L = \{ z_k \mid k \in \mathbb{Z} \} = \{ z_0, .., z_{n-1} \}}}$$

genau n Lösungen

Beispiel

$$L = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^3 + 2 - 2i = 0 \}$$

$$z^3 + 2 - 2i = 0 \iff z^3 = -2 + 2i = w$$

Schritt 1

$$w = -2 + 2i = R \cdot e^{i\Phi}$$

$$\Rightarrow R = |w| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\Phi = \frac{Re(w)}{|w|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \Phi = \frac{3}{4}\pi \text{ oder } \frac{5}{4}\pi \\ \sin\Phi = \frac{Im(w)}{|w|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \Phi = \frac{1}{4}\pi \text{ oder } \frac{3}{4}\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \Phi = \frac{3}{4}\pi$$

$$\Rightarrow w = \sqrt{8}\, e^{i\left(\frac{3}{4}\pi + k\cdot 2\pi\right)}$$

Schritt 2

- Ansatz $\quad z = r \cdot e^{i\varphi}$
- Einsetzen $\quad z^3 = r^3 \cdot e^{i3\varphi} = \sqrt{8}\, e^{i\left(\frac{3}{4}\pi + k\cdot 2\pi\right)}$
- Vergleich $\quad r^3 = \sqrt{8} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad k \in \mathbb{Z} \quad (k = 0, 1, 2)$$

$(\;)^{\frac{1}{3}}$

Lösung $\quad z_k = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2$

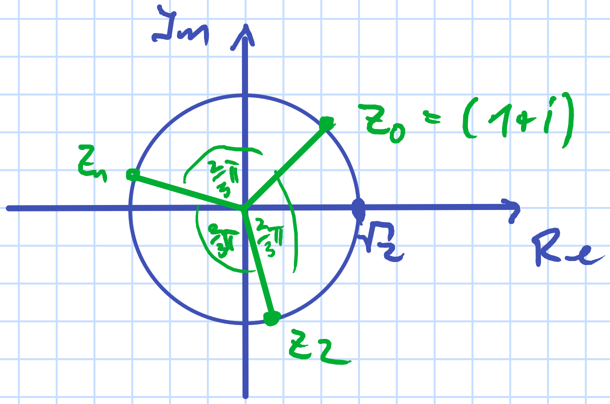
$$z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$$

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{11}{12}\pi}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4}{3}\pi\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{19}{12}\pi}$$

$$\left(z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)} = z_0 \right)$$

$$L = \{ z_0, z_1, z_2 \}$$



2. Polynome

(2.1) Darstellung von Polynomen

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Bezeichnungen

(1) $a_0, a_1, a_2, \dots$: Koeffizienten von p aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
Nur endlich viele verschieden von 0

(2) x : Unbestimmte

(3) $\operatorname{grad}(p) := \begin{cases} -\infty & \text{falls } a_k = 0 \text{ für alle } k \\ n & a_n \neq 0 \quad a_k = 0 \text{ für } k > n \end{cases}$

(4) $p(\alpha)$: Wert von p an der Stelle $x = \alpha$
$\alpha \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots$

(5) α heißt Nullstelle von p falls $p(\alpha) = 0$

Beispiele

- Nullpolynom $\quad p(x) \equiv 0 \quad$ also $a_k = 0 \ \forall k$, $\operatorname{grad} p = -\infty$
  $p(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow$ unendlich viele NS
- konstantes Polynom $\quad p(x) \equiv a \quad (a_0 = a, \ a_k = 0 \ \ k > 0)$
  Ist $a \neq 0$ so ist $\operatorname{grad}(p) = 0$
  $p(\alpha) \neq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow$ keine Nullstellen
- (affin) lineares Polynom $\quad p(x) = ax + b \quad a \neq 0$, $\quad a_0 = b, \ a_1 = a$
  $\Rightarrow \operatorname{grad}(p) = 1 \qquad a_k = 0 \ \ k > 1$

  $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$

  $\Rightarrow$ eine Nullstelle $\alpha = -\frac{b}{a}$

- quadratisches Polynom $\quad p(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0 \quad a_0 = c, a_1 = b, a_2 = a$
  $\operatorname{grad}(p) = 2$
  höchstens 2 Nullstellen

(2.2.) Arithmetische Operationen

Gegeben $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$

(1) Gleichheit (Koeffizientenvergleich)

$$p = q \iff a_k = b_k \quad \forall\, k \geq 0$$

Bemerkung zeigen später

$$p = q \iff p(\alpha) = q(\alpha) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

(bzw $\forall \alpha \in \mathbb{C}$)

$\uparrow$ Gleichheit von Termen

$\uparrow$ Gleichheit von Werten

(2) Addition / Subtraktion

$$p(x) \pm q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)\, x^k$$

(3) Multiplikation

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k \quad \text{mit} \quad c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \ldots + a_0 b_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_{k-\ell} b_\ell$$

Bemerkungen

(1) $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i b_j x^{i+j}$

(2) $\operatorname{grad}(p \cdot q) = \operatorname{grad}(p) + \operatorname{grad}(q)$

(2.3) Nullstellen (NS)

Gegeben: Polynom p mit komplexen Koeffizienten

Ges: NS $\alpha \in \mathbb{C}$ von p

Bsp: (a) $p(x) \equiv 0$ Nullpolynom $p(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$

(b) $p(x) \equiv a$ konst. Pol. $p(\alpha) = a \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$

1. Produktregel

Ist $p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)$, so gilt

$$\boxed{\alpha \text{ ist NS von } p \iff \alpha \text{ ist NS von } p_1 \text{ oder } p_2}$$

Bsp: $p(x) = (x^2-4)(x^2-2x+10) = x^4-2x^3+6x^2+8x-40$

- NS von x^2-4 : $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$
- NS von $x^2-2x+10$ $x = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm 3i$
- NS von p $x = 2, -2, 1-3i, 1+3i$

(2) Teilbarkeit

$q(x) \mid p(x) \iff p(x) = g(x) \cdot q(x)$

g Polynom

(3) Division mit Rest

Zu jedem Polynom q mit $\operatorname{grad}(q) \geq 1$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome g und r mit

$$\boxed{p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \text{mit } \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(q)}$$

Dann heißt

$g(x)$: <u>ganzer Teil</u> von $p(x)$ bei Division durch $q(x)$

$r(x)$: <u>Rest</u> von $p(x)$ bei Division durch $q(x)$

Beispiel

- $p(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1 \qquad q(x) = x^2 + x + 1$

$$
\begin{array}{l}
2x^3 - 2x^2 + x + 1 : (x^2+x+1) = \underbrace{2x - 4}_{g(x)} \\
-(2x^3 + 2x^2 + 2x) \\
\quad -4x^2 - x + 1 \\
\quad -(-4x^2 - 4x - 4) \\
\qquad \underbrace{3x + 5}_{r(x)}
\end{array}
$$

- $p(x) = (2x-4)(x^2+x+1) + 3x+5 = g(x) \cdot q(x) + r(x)$

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)} = 2x - 4 + \frac{3x+5}{x^2+x+1}$$

Bemerkung

$q(x) \mid p(x) \Leftrightarrow$ Für den Rest $r(x)$ von $\frac{p(x)}{q(x)}$ gilt $r(x) \equiv 0$

Nullpolynom

Spezialfall

Division durch Linearfaktor $q(x) = x - \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{C})$

Dann ist $\text{grad}(r) < \text{grad}(q) = 1$ also ist $r(x) \equiv a$ konstantes Polynom und es gilt

$$\boxed{p(x) = g(x) \cdot (x - \alpha) + a \qquad \text{mit } p(\alpha) = a}$$

Bew: $p(x) = g(x)(x-\alpha) + a$

$\Rightarrow p(\alpha) = g(\alpha) \cdot (0) + a \Rightarrow p(\alpha) = a$

(4) Folgerungen

① Abspaltregel

α ist NS von $p \Leftrightarrow p(x) = g(x) \cdot (x - \alpha)$

$\Leftrightarrow (x-\alpha) \mid p(x)$

Bem: Ist $p(x) = g(x) \cdot (x - \alpha)$ so ist $\text{grad}(g) = \text{grad}(p) - 1$ und NS von p sind α und die NS von g

2.

Ist $\text{grad}(p) = n \geq 0$ (also $p \neq$ Nullpolynom), so hat p höchstens n Nullstellen

Definition

α heißt k-fache Nullstelle von p, falls gilt

$p(x) = (x-\alpha)^k \cdot g(x)$ und $g(\alpha) \neq 0$

Bsp:

$p(x) = x^3 - 3x + 2$

- $p(1) = 0$
- $x^3 - 3x + 2 : (x-1) = x^2 + x - 2$

$$\begin{aligned}
&x^3 - 3x + 2 \\
&-(x^3 - x^2) \\
&\quad x^2 - 3x + 2 \\
&\quad -(x^2 - x) \\
&\qquad -2x + 2 \\
&\qquad -(-2x + 2) \\
&\qquad\quad 0 = r(x)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow p(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$

- $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$x = -2$ bzw 1

$x^2 + x - 2 = (x+2) \cdot (x-1)$

$\Rightarrow p(x) = (x-1)^2 (x+2)$

- Nullstellen von p

$x = 1$ 2-fache Nullstelle

$x = -2$ 1-fache Nullstelle

Wiederholung

- $$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$ endlich viele $a_k \neq 0$

$\Leftrightarrow \exists\, n \geq 0$ mit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$

$a_n \neq 0$

$n = \text{grad}(p)$

- $\text{grad } p = -\infty$ falls alle $a_n = 0$

Mathematiker:

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$ **Polynom**

$\uparrow$ nicht $p(x)$

Die Fkt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\alpha) = p(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Polynomfunktion

wir unterscheiden nicht zwischen $p(x), f(x)$

p, f

(5) Fundamentalsatz der Algebra (o. B.)

$$\boxed{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

sei ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ also $a_n \neq 0$ und $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$. Dann hat p genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ (gezählt mit ihren Vielfachheiten). Sind $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ die n NS von p, so gilt

$$\boxed{p(x) = a_n (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_n)}$$

d.h. $p(x)$ ist Produkt aus n Linearfaktoren und dem konstanten Faktor a_n. Weiterhin ist

$$\boxed{a_0 = (-1)^n \cdot a_n \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n}$$

(6) Faktorzerlegung im Reellen

Betrachten Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ also $\text{grad}(p) = n \geq 1$

(a) p besitzt n komplexe Nullstellen (Fundamentalsatz)

(b) $p(\bar{z}) = \overline{p(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Bew: $p(\bar{z}) = a_n (\bar{z})^n + \ldots + a_1 \bar{z} + a_0$

$$\underset{\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}}{=} a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \ldots + \bar{a}_0$$

$$\underset{\bar{a}_k = a_k,\ \boxed{\text{da } a_k \in \mathbb{R}}}{=} \overline{a_n z^n} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0}$$

$$\underset{\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}}{=} \overline{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{p(z)}$$

Bsp: $p(x) = x^2 + 1 \qquad z = 1 + i$

$p(z) = (1+i)^2 + 1 = 1 + 2i$

$p(\bar{z}) = (1-i)^2 + 1 = 1 - 2i = \overline{p(z)}$

c) Ist $z \in \mathbb{C}$ NS von p, so ist $\bar{z}$ auch NS von p

<u>Bew</u>: z NS $\Rightarrow p(z) = 0 \Rightarrow p(\bar{z}) = \overline{p(z)} = \bar{0} = 0 \Rightarrow \bar{z}$ NS

d) Sind $z = a + ib$ und $\bar{z} = a - ib$ komplexe NS von p mit $b \neq 0$, so gilt

$$\boxed{p(x) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2) \cdot g(x)}$$

wobei g Polynom mit reellen Koeffizienten ist

<u>Bew</u>:
$$\begin{aligned} p(x) &= (x - z) \cdot (x - \bar{z}) \cdot g(x) \qquad \text{(Abspaltregel)} \\ &= (x - a - ib)(x - a + ib) \cdot g(x) \\ &= ((x-a)^2 - i^2 b^2)\, g(x) \\ &= (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)\, g(x) \end{aligned}$$

(Koeffizienten sind reell, da Koeff von p und $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ reell)

e) $p(x)$ = Produkt von r Linearfaktoren, s quadratischen Faktoren und konst. Faktor a_n

Dabei ist

r = Anzahl der reellen NS von p (gezählt mit Vielfachheit)

s = Anzahl der Paare von komplexen NS $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$

<u>Bsp</u>: $p(x) = x^3 + 9x^2 + x + 9$

- $p(i) = i^3 + 9i^2 + i + 9 = -i - 9 + i + 9 = 0$

  $\Rightarrow p(-i) = 0$
- $(x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 - i^2 = x^2 + 1$

$$\begin{aligned} &x^3 + 9x^2 + x + 9 : (x^2 + 1) = x + 9 \\ -&(x^3 + x) \\ &\overline{\quad 9x^2 + 9} \\ -&(9x^2 + 9) \\ &\overline{\qquad 0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow p(x) = \underbrace{(x^2 + 1) \cdot (x + 9)}_{\text{reelle Faktorzerlegung}} = \underbrace{(x + 9)(x - i)(x + i)}_{\text{komplexe Faktorzerlegung}}$

(7) Gleichheit von Polynomen

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \qquad \text{Polynome}$$

Dann gilt

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}: \ p(\alpha) = q(\alpha) \iff a_k = b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0}$$

Beweis

$(\Leftarrow)$ $\quad p(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \alpha^k \overset{a_k = b_k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \alpha^k = q(\alpha)$

$(\Rightarrow)$ Vor: $p(\alpha) = q(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Beh: $\forall k: \quad a_k = b_k$

Bew

- $g(x) := p(x) - q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit $c_k = a_k - b_k$

$\Rightarrow g(\alpha) = p(\alpha) - q(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g(x)$ hat unendlich viele NS

$\Rightarrow g(x)$ ist das Nullpolynom also $c_k = 0 \quad \forall k$

$\Rightarrow a_k = b_k$ für alle k

$\square$

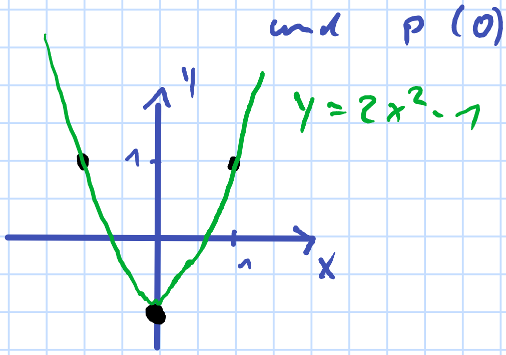
Bemerkung Falls $\operatorname{grad}(p), \operatorname{grad}(q) \leq n$

$\Rightarrow \operatorname{grad}(g) \leq n$

$\Rightarrow g$ hat $\leq n$ Nullstellen oder ist das Nullpolynom

$\Rightarrow p(\alpha) = q(\alpha)$ für $n+1$ α-Werte reichen

Bsp: Gesucht Polynom vom Grad ≤ 2 mit $p(-1) = p(1) = 1$ und $p(0) = -1$



$\Rightarrow p(x) = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{lll} p(-1) & = a - b + c & \overset{!}{=} 1 \\ p(1) & = a + b + c & \overset{!}{=} 1 \\ p(0) & = c & \overset{!}{=} -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array}$$

$\Rightarrow p(x) = 2x^2 - 1$

2.4 Integration gebrochenrationaler Funktionen, Partialbruchzerlegung

Gegeben $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

echt gebrochenrationale Fkt., d.h. p, q Polynome mit $\text{grad}(p) < \text{grad}(q)$

Gesucht $\int f(x)\,dx$

Lösungsmethode

Zerlegen $f(x)$ in eine Summe von Partialbrüchen und integrieren die Summanden einzeln

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{q_1(x)\cdot q_2(x)\cdot \ldots} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} + \ldots$$

Partialbrüche

echt gebrochenrationale Funktionen der Form

$$\frac{A}{x-a} \quad \text{bzw.} \quad \frac{A}{(x-a)^n} \quad \left(\text{reelle NS } a \text{ von } q(x)\right)$$

$$\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} \quad \text{bzw} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} \quad \left(\text{komplexe NS von } q(x)\quad \frac{\alpha^2}{4}-\beta < 0\right)$$

Satz:

Jede echt gebrochenrationale Fkt. lässt sich als Summe von Partialbrüchen obiger Form darstellen.

Integrale über Partialbrüche

a) $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\cdot \ln|x-a| + C$

b) $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A\cdot \frac{1}{1-n}\cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C \qquad n \geq 2$

c) $\int \frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx$ siehe Tafelwerke

Bsp 1

$$f(x) = \frac{x+7}{x^3-3x-2} \qquad \frac{\text{grad } 1}{\text{grad } 3} \checkmark$$

1. Schritt NS und Faktorzerlegung des Nennerpolynoms

- $x^3-3x-2=0$ NS $x=-1$ (raten) $\Rightarrow$ Faktor $(x-(-1)) = x+1$
- Abspalten von $x+1$

Polynomdivision

$$x^3-3x-2 : x+1 = x^2-x-2$$
$$-(x^3+x^2)$$
$$-x^2-3x-2$$
$$-(-x^2-x)$$
$$-2x-2$$
$$-(-2x-2)$$
$$0$$

oder Hornerschema

	1	0	-3	-2
$\alpha=-1$		-1	1	2
	1	-1	-2	0

$\leftarrow$ Koeff von q

Koeffizienten des ganzen Teils

Rest $= p(\alpha)$

$$\Rightarrow x^3-3x-2 = (x+1)(x^2-x-2)$$

- $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$x_2=-1,\quad x_3=2$

$$x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$$
$$\Rightarrow x^3-3x-2 = (x+1)^2(x-2)$$

2. Schritt: Ansatz für PBZ von $f(x)$

Faktor $(x-a)^n \longrightarrow \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$

Faktor $(x^2+\alpha x+\beta)^n \longrightarrow \frac{B_1x+C_1}{x^2+\alpha x+\beta} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}$

Am Beispiel:

$$f(x) = \frac{x+7}{(x+1)^2\cdot(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

$A, B, C \in \mathbb{R}$

3. Schritt Berechnen der Konstanten

$$\frac{x+7}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} \quad \| \cdot \text{Nenner}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polynom}}}{x+7} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polynom}}}{A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2}$$

- Variante 1 Koeffizientenvergleich

$$x+7 = A(x^2-x-2) + B(x-2) + C(x^2+2x+1)$$

$$x+7 = x^2(A+C) + x(-A+B+2C) - 2A - 2B + C$$

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & 0 = A + C \\ x^1: & 1 = -A + B + 2C \\ x^0: & 7 = -2A - 2B + C \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Lösung} \quad \begin{array}{l} A = -1 \\ B = -2 \\ C = 1 \end{array}$$

- Variante 2 (spezielle Werte für x einsetzen)

$$x+7 = A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2$$

$x=-1$: $6 = B \cdot -3 \Rightarrow B = -2$

$x=2$: $9 = C \cdot 9 \Rightarrow C = 1$

$x=0$: $7 = -2A - 2B + C \Rightarrow 7 = -2A + 5 \Rightarrow A = -1$

Einsetzen: $$f(x) = \frac{-1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-2}$$

Schritt 4 Stammfkt bestimmen

$$\int f(x)\,dx = -\int \frac{1}{x+1}\,dx - 2\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= -\ln|x+1| - 2\left(-\frac{1}{x+1}\right) + \ln|x-2| + c$$

$$= -\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + \ln|x-2| + c$$

Beispiel 2 : $f(x) = \frac{4x^2-3x+10}{x^3-2x^2+5x}$

$\frac{\text{grad } 2}{\text{grad } 3}$ ✓

1. Schritt NS und FZ des Nenners

$\cdot\ x^3-2x^2+5x = x(x^2-2x+5)$

$x_1 = 0$

$x_{2/3} = 1 \pm 2i$ komplexe NS

$x\,(x^2-2x+5) = x\cdot(x-1-2i)(x-1+2i)$

x: reelle FZ; (x^2-2x+5): komplexe FZ

2. Schritt Ansatz für PBZ

$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5}$ oder $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{E}{x-1-2i} + \frac{F}{x-1+2i}$

$E, F \in \mathbb{C}$

3. Schritt Konstanten bestimmen

$\frac{4x^2-3x+10}{x(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5} \quad \| \cdot \text{Nenner}$

$4x^2-3x+10 = A(x^2-2x+5) + (Bx+C)\cdot x$

$4x^2-3x+10 = x^2(A+B) + x(-2A+C) + 5A$

Koeffizientenvergleich

$$\left.\begin{array}{lrcl} x^2: & 4 &=& A+B \\ x: & -3 &=& -2A+C \\ 1: & 10 &=& 5A \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 2 \\ B = 2 \\ C = 1 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{2}{x} + \frac{2x+1}{x^2-2x+5}$

4. Schritt Berechnung von $\int f(x)\,dx$

$J = \int f(x)\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}$

a) $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x| + c_1 \qquad c_1 \in \mathbb{R}$

b) $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}\,dx = \underbrace{\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx}_{J_1} + \underbrace{\int \frac{3}{x^2-2x+5}\,dx}_{J_2}$

b1) $J_1 = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx$

Subst: $z = x^2-2x+5 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2x-2$

$\Rightarrow dx = \frac{dz}{2x-2}$

$\Rightarrow J_1 = \int \frac{2x-2}{z} \cdot \frac{dz}{2x-2} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + c_2$

$= \ln(x^2-2x+5) + c_2$

b2) $J_2 = 3\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = 3\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx$

$= \frac{3}{4}\int \frac{1}{\frac{(x-1)^2}{4}+1}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\,dx$

Subst: $z = \frac{x-1}{2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2\,dz$

$\Rightarrow J_2 = \frac{3}{4}\int \frac{1}{1+z^2} \cdot 2\,dz = \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+z^2}\,dz$

$= \frac{3}{2}\arctan z + c_3$

$= \frac{3}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + c_3$

c) $\Rightarrow J = 2\ln|x| + \ln(x^2-2x+5) + \frac{3}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + c$

Bemerkung

Ist f keine echt gebrochenrationale Fkt, d.h. $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\mathrm{grad}(p) \geq \mathrm{grad}(q)$, so führt man zunächst Polynomdivision mit Rest aus.

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist zerlegt in Polynom + echt gebrochenrat. Fkt.

Standardsubstitutionen

(1) $\quad J = \int R(e^x)\,dx \qquad R$ gebrochen rat. Fkt

Subst $\quad z = e^x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = e^x = z \Rightarrow dx = \frac{dz}{z}$

Beispiel $\quad J = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$

$$z = e^x$$

$$J = \int \frac{1}{z + \frac{1}{z}} \cdot \frac{dz}{z}$$

$$= \int \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

$$J = \arctan z + C = \arctan(e^x) + C$$

(2) $\quad J = \int R(\cos x, \sin x)\,dx$

$$z = \tan\frac{x}{2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+z^2)$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

$$\cos x = \frac{2}{1+z^2} - 1$$

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

$\Rightarrow$ gebrochen rat. Fkt in z

3. Matrizen

(3.1) Definitionen und Bezeichnungen

a) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper (etwa $K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p$)
Die Elemente von K heißen <u>skalare Größen</u> oder <u>Skalare</u>

b) Eine <u>Matrix</u> vom Typ / Format (m, n) über dem Körper K ist eine Abbildung $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to K$.
Sie wird als rechteckiges Schema aus m Zeilen und n Spalten dargestellt, welches die Bilder von A enthält.

c) Statt $A((i,j))$ schreibt man auch $A(i,j)$, a_{ij}, $A[i,j]$

a_{ij} ist das <u>Element der Matrix A</u> in Zeile i und Spalte j
i = <u>Zeilenindex</u> von a_{ij} , j = <u>Spaltenindex</u> von a_{ij}.

d) Die Menge der Matrizen vom Typ (m, n) über K wird mit $K^{(m,n)}$ bezeichnet.

<u>Beispiel</u> $\quad K = \mathbb{R} \quad \text{Typ}(A) = (2, 3)$

$A(1,1) = 1 \quad A(1,2) = 2 \quad A(1,3) = 3$
$A(2,1) = 4 \quad A(2,2) = 5 \quad A(2,3) = 6$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,3)}$$

<u>Spezialfälle</u>

(1) $A \in K^{(1,1)}$: $A = (a)$, $a \in K$ skalare Größe

(2) $A \in K^{(1,n)}$: $A = \underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ <u>Zeilenvektor</u> Typ$(1,n)$

(3) $A \in K^{(m,1)}$: $A = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ <u>Spaltenvektor</u> Typ$(m,1)$

$$K^m := K^{(m,1)}$$

(4) $A \in K^{(n,n)}$ <u>quadratische Matrix</u> der Ordnung n

$A \in K^{(m,n)}$ Besteht aus m Zeilenvektoren mit je n Komponenten

bzw n Spaltenvektoren mit je m Komponenten

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,3)} \Rightarrow \quad A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \text{ mit } \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \quad \underline{a}_1 = (1, 2, 3), \quad \underline{a}_2 = (4, 5, 6)$$

(3.2) Spezielle Matrizen

(1) Nullmatrix $\quad \mathcal{O} \in K^{(m,n)}$ mit $\mathcal{O}(i,j) = 0_K \quad \forall i,j$

Bsp: $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,3)}$, $\quad \mathcal{O} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{(2,1)}$

(2) Einheitsmatrix $\quad E = E_n \in K^{(n,n)}$ mit $E(i,j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Bsp: $E = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Für eine allgemeine Matrix $A \in K^{(m,n)}$ heißen die Elemente $A(1,1)$, $A(2,2)$, ... Elemente der Hauptdiagonale von A.

(3) Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(d_1, .., d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & & \mathcal{O} \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ \mathcal{O} & & & d_n \end{pmatrix} \in K^{(n,n)}$$

Bsp: $D = \operatorname{diag}(2,3,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4,4)}$

(3.3) Matrizenoperationen

Gleichheit von Matrizen

Zwei Matrizen A und B sind gleich, wenn die Abbildungen A und B gleich sind, d.h.

$\mathrm{Typ}(A) = \mathrm{Typ}(B)$ und $A(i,j) = B(i,j) \quad \forall i,j$

Bsp:
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 2+b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 1 = 1+a & 3 = 2+b \\ 2 = c & 0 = d \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{matrix}$$

(I) Matrizenaddition

$$A, B \in K^{(m,n)} \longmapsto A+B \in K^{(m,n)} : (A+B)(i,j) := A(i,j) + B(i,j)$$

$A+B$ <u>Summe</u> von A und B

(II) Skalare Multiplikation

$$\alpha \in K,\ A \in K^{(m,n)} \mapsto \alpha \cdot A \in K^{(m,n)} : (\alpha \cdot A)(i,j) := \alpha \cdot A(i,j)$$

$\alpha \cdot A$ <u>skalares Produkt</u> von α und A / <u>α-faches von A</u>
(<u>nicht</u> Skalarprodukt)

Bsp:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -6 & +4 & -4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$-A := (-1) \cdot A$ <u>negative Matrix</u> von A

$A - B := A + (-B)$ <u>Differenz</u> von A und B

Rechengesetze

$\forall\ A, B, C \in K^{(m,n)} \quad \forall\ \alpha, \beta \in K$

(R1) $A + (B + C) = (A+B) + C$ — Assoziativgesetz

(R2) $A + B = B + A$ — Kommutativgesetz

(R3) $A + \mathcal{O} = A, \quad A - A = \mathcal{O}, \quad -(-A) = A$

(R4) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

$(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$

$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

(R5) $1 \cdot A = A$

$0 \cdot A = \mathcal{O}$

Folgen unmittelbar aus Rechenregeln für K

Bemerkung

Aus (R1), (R2), (R3) folgt, dass $(K^{(m,n)}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

neutrales Element ist Nullmatrix

inverses Element zu A ist $-A = (-1) \cdot A$

III Matrizenmultiplikation

(a) Zeilenvektor • Spaltenvektor = skalare Größe

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$\underline{a} \in K^{(1,n)},\ \vec{b} \in K^{(n,1)} \mapsto \underline{a} \cdot \vec{b} \in K^{(1)} = K$$

(b) allgemeiner Fall

$$A \in K^{(m,n)},\ B \in K^{(n,p)} \mapsto A \cdot B \in K^{(m,p)}$$

$$(A \cdot B)(i,j) = \underbrace{(A(i,1), \dots, A(i,n))}_{i\text{-ter Zeilenvektor von } A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} B(1,j) \\ \vdots \\ B(n,j) \end{pmatrix}}_{j\text{-ter Spaltenvektor von } B} = \sum_{k=1}^{n} A(i,k) \cdot B(k,j)$$

$A \cdot B$ = Produkt von A und B

Geht nur wenn Zeilenzahl von A = Spaltenzahl von B

Beispiele

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Typ $(2,\underline{3})$ $\cdot$ Typ $(\underline{3},2)$ = Typ $(2,2)$

$$(1\ 2\ 3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2+4+6 = 12 \qquad (1,2,3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1+2+3 = 6$$

$$(0,-2,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0-4+2 = -2 \qquad (0,-2,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0-2+1 = -1$$

Falksches Schema

$$\begin{array}{c|c}
\cdot & \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 \\ \boxed{2} & 1 \\ \boxed{2} & 1 \end{pmatrix} \ B \\
\hline
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{0 \ \ -2 \ \ 1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = A \cdot B
\end{array}$$

Eintrag der Ergebnismatrix = Zeile links · Spalte drüber

(2) $(1,2,3)\begin{pmatrix}2&1\\2&1\\2&1\end{pmatrix} = (12,6)$ $\boxed{\text{Zeilenvektor} \cdot \text{Matrix} = \text{Zeilenvektor}}$

(3) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\-2\end{pmatrix}$ $\boxed{\text{Matrix} \cdot \text{Spaltenvektor} = \text{Spaltenvektor}}$

(4) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot(3,4) = \begin{pmatrix}3&4\\6&8\end{pmatrix}$

$\text{Typ}(2,\underline{1})\cdot\text{Typ}(\underline{1},2) = \text{Typ}(2,2)$

	$(3,4)$	
$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$1\cdot3$	$1\cdot4$
	$2\cdot3$	$2\cdot4$

$(3,4)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = (1\cdot3+2\cdot4) = (11) = 11$

$\text{Typ}(1,\underline{2})\cdot\text{Typ}(\underline{2},1)$ $\text{Typ}(1,1)$

(5) Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen <u>nicht</u> kommutativ auch nicht für quadratische Matrizen $AB \neq BA$

<u>Bsp:</u> $\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\3&2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot a+0\cdot d\\0\cdot a+1\cdot d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\d\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$

(7) $A = \begin{pmatrix}\underline{a}_1\\\vdots\\\underline{a}_m\end{pmatrix}$ $B = (\vec{b}_1,..,\vec{b}_p)$ $\underline{a}_i, \vec{b}_j$ haben je n Komponenten

$A \in K^{(m,n)}$ $B \in K^{(n,p)}$

$A\cdot B\,(i,j) = \underline{a}_i\cdot\vec{b}_j$

$A\cdot B = A\cdot(\vec{b}_1,..,\vec{b}_p) = (A\vec{b}_1, A\vec{b}_2,..,A\vec{b}_p)$

$A\cdot B = \begin{pmatrix}\underline{a}_1\\\vdots\\\underline{a}_m\end{pmatrix}\cdot B = \begin{pmatrix}\underline{a}_1 B\\\vdots\\\underline{a}_m B\end{pmatrix}$

Rechengesetze

(R6) $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$ $\quad A\in K^{(m,n)}, B\in K^{(n,p)}, C\in K^{(p,r)}$

(R7) $E\cdot A = A\,,\quad B\cdot E = B$ $\quad$ E vom passenden Format Einheitsmatrix

(R8) $A(B+C) = AB + AC$
$(A+B)\cdot C = AC + B\cdot C$ $\quad$ Distributivgesetze

(R9) $\alpha(A\cdot B) = (\alpha\cdot A)\cdot B = A\cdot(\alpha\cdot B)$

Bemerkung

Aus (R6), (R7), (R8) folgt

$(K^{(n,n)}, +, \cdot)$ ist ein (nichtkommutativer Ring)

mit Einselement E_n (Einheitsmatrix)

IV Transposition

$$A\in K^{(m,n)} \longmapsto A^T \in K^{(n,m)} : \quad A^T(i,j) := A(j,i)$$

A^T : A transponiert / transponierte Matrix von A

Bsp: $K = \mathbb{R}$

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,3)} \Rightarrow A^T \in \mathbb{R}^{(3,2)}$

$$\left.\begin{array}{ll} A^T(1,1) = A(1,1) = 1 & A^T(1,2) = A(2,1) = 4 \\ A^T(2,1) = A(1,2) = 2 & A^T(2,2) = A(2,2) = 5 \\ A^T(3,1) = A(1,3) = 3 & A^T(3,2) = A(2,3) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(2) $(1,2,3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}^T = (1,4)$

Transposition $\hat{=}$ Spiegelung an Hauptdiagonale

Rechengesetze

(R 10) $(A^T)^T = A$

(R 11) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(R 12) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

(R 13) $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$

Bew von R 12

$A \in K^{(m,n)}, \; B \in K^{(n,p)}, \; B^T \in K^{(p,n)}, \; A^T \in A^{(n,m)}$

$C := (A \cdot B)^T \in K^{(p,m)}, \quad D := B^T \cdot A^T \in K^{(p,m)}$

$\forall\, i \in \{1,..,p\} \;\; \forall\, j \in \{1,..,m\}$

$$C(i,j) = (A\cdot B)^T(i,j) = A\cdot B\,(j,i) = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} \cdot b_{k,i}$$

$$D(i,j) = B^T \cdot A^T(i,j) = \sum_{k=1}^{n} B^T(i,k) \cdot A^T(k,j) = \sum_{k=1}^{n} B(k,i) \cdot A(j,k) = C(i,j)$$

Bsp:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+12 \\ 15+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \; B^T (5,6) \qquad B^T A^T = (5,6) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (17, 39) = (AB)^T$

Wozu transponierte Matrix?

Ges: Lösung X der Gleichung $X \cdot A = B$

bekannt: Verfahren zur Lösung von Gleichungen der Form $A \cdot X = B$

Transformation:

$$X \cdot A = B \overset{(\,)^T}{\iff} (X \cdot A)^T = B^T \overset{R12}{\iff} A^T \cdot X^T = B^T$$

$\Rightarrow$ X^T kann berechnet werden mit bekannten Verfahren

$\Rightarrow$ X bestimmbar

4. Lineare Gleichungssysteme, lineare Matrizengleichungen

(4.1) Lineares Gleichungssystem (LGS)

m Gleichungen, n Unbekannte $x_1, \dots, x_n \in K$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$

$$\left\{ \begin{matrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_n \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

<u>Matrizenform eines LGS</u> $\boxed{A \vec{x} = \vec{b}}$ $A \in K^{(m,n)}$, $\vec{b} \in K^m$, $\vec{x} \in K^n$

Andere Darstellung, falls $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$: $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$

(4.2) Allgemeine Form einer linearen Matrizengleichung (LMG)

<u>Gegeben</u> $A \in K^{(m,n)}$ $B \in K^{(m,p)}$ K Körper

<u>Gesucht</u> $L = \{ X \in K^{(n,p)} \mid A \cdot X = B \}$

<u>Sprechweisen</u>

(1) $AX = B$: <u>Lineare Matrizengleichung</u> für X (LMG)

(2) A : <u>Koeffizientenmatrix</u>

(3) B : <u>Störmatrix / rechte Seite</u>

$AX = B$ heißt $\left\{ \begin{matrix} \underline{\text{homogen}} \\ \underline{\text{inhomogen}} \end{matrix} \right\}$ falls gilt $\left\{ \begin{matrix} B = \mathcal{O} \\ B \neq \mathcal{O} \end{matrix} \right\}$

(4) (A, B) : <u>erweiterte Koeffizientenmatrix</u> der LMG $AX = B$, $(A,B) \in K^{(m, n+p)}$

<u>Spezialfall</u> $p = 1$ d.h. $X = \vec{x} \in K^{(n,1)} \hat{=} K^n$ $B = \vec{b} \in K^{(m,1)} \hat{=} K^m$

$A\vec{x} = \vec{b}$ Matrizenform eines LGS für $\vec{x}$

Formen von LMG's

Bsp $AX = B$ $\quad m = n = p = 2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

Allgemein

$$A \; X = B$$

$\Updownarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \vec{x}_1 = \vec{b}_1 \\ \vdots \\ A \vec{x}_p = \vec{b}_p \end{array} \right\}$$

$\Updownarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{a}_1 X = \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_m X = \underline{b}_m \end{array} \right\}$$

$\Updownarrow$

$$\left\{ \underline{a}_i \cdot \vec{X}_j = b_{ij} \right\}$$

Bsp

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Matrizenform

$\Updownarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

<u>Spaltenform</u> von $AX = B$

$A \cdot$ j-te Spalte von X = j-te Spalte von B

$\Updownarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1, 2) \cdot X = (0, 1) \\ (3, 4) \cdot X = (0, -2) \end{array} \right\}$$

<u>Zeilenform</u> von $AX = B$

i-te Zeile von $A \cdot X$ = i-te Zeile von B

$\Updownarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot x_1 + 2 x_2 = 0 \\ 3 x_1 + 4 x_2 = 0 \\ 1 \cdot y_1 + 2 y_2 = 1 \\ 3 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 = -2 \end{array} \right\}$$

Skalare Form von $AX = B$

i-te Zeile A · j-te Spalte X = $B(i,j)$

Beobachtung

Wenn wir LGS lösen können, können wir LMG lösen

1 LMG $\Leftrightarrow$ p LGS (siehe Spaltenform)

(4.3) Umformungen einer LMG $AX = B$

Sei $A \in K^{(m,n)}$ $\quad A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_m \end{pmatrix}$ $\quad B \in K^{(m,p)}$ $\quad B = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_m \end{pmatrix}$

$$M = (A, B) = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{b}_1 \\ \vdots & \\ \underline{a}_m & \underline{b}_m \end{pmatrix}$$ erweiterte Koeffizientenmatrix

$$AX = B \iff \left\{ \begin{matrix} \underline{a}_1 X = \underline{b}_1 \\ \underline{a}_m X = \underline{b}_m \end{matrix} \right\}$$ Zeilenform der LMG

Äquivalente Umformungen für die Zeilenform von $AX = B$

(1) Vertauschen zweier Gleichungen

(2) Multiplikation der i-ten Gleichung mit $\alpha \neq 0$

$$\left\{ \begin{matrix} \vdots \\ \underline{a}_i X = \underline{b}_i \\ \vdots \end{matrix} \right\} \iff \left\{ \begin{matrix} \vdots \\ \alpha \cdot \underline{a}_i X = \alpha \underline{b}_i \\ \vdots \end{matrix} \right\}$$

(3) Addition des α-fachen der i-ten Gleichung zur j-ten Gleichung

$$\left\{ \begin{matrix} \vdots \\ \underline{a}_i X = \underline{b}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_j X = \underline{b}_j \\ \vdots \end{matrix} \right\} \iff \left\{ \begin{matrix} \vdots \\ \underline{a}_i X = \underline{b}_i \\ \vdots \\ (\alpha \cdot \underline{a}_i + \underline{a}_j) X = \alpha \underline{b}_i + \underline{b}_j \\ \vdots \end{matrix} \right\}$$

Bem: $\alpha \cdot \underline{a}_i X + \underline{a}_j X = (\alpha \underline{a}_i + \underline{a}_j) X$

Gaußoperationen für eine Matrix $M \in K^{(m,q)}$

(O1) Vertauschen zweier Zeilen von M

(O2) Multiplikation einer Zeile von M mit $\alpha \neq 0$

(O3) Addition des α-fachen der i-ten Zeile von M zur j-ten $(j \neq i)$ Zeile von M

Bezeichnung

$M \underset{g}{\mapsto} N$: M lässt sich durch Folge von Gaußoperationen in N überführen

M und N heißen dann <u>gaußäquivalent</u>

$\underset{g}{\mapsto}$ ist Äquivalenzrelation auf der Menge $K^{(m,n)}$

Satz: Seien $A, A' \in K^{(m,n)}$, $B, B' \in K^{(m,p)}$. Gilt

$$\boxed{(A,B) \underset{g}{\mapsto} (A',B')}$$

so gilt für alle $X \in K^{(n,p)}$

$$\boxed{AX = B \iff A'X = B'}$$

Beweis: folgt unmittelbar aus obigen Betrachtungen

Beispiel

Ges: $L = \{ X \in \mathbb{R}^{(3,2)} \mid AX = B \}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$(A,B) \left\{ \begin{array}{cc|cc|l} 1 & 2 & 1 & 0 & \\ 2 & 5 & 3 & 2 & \cdot(-2) \quad -2 \cdot \text{Zeile } 1 \text{ zu Zeile } 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \cdot(-1) \\ 1 & 3 & 2 & 2 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & \cdot(-2) \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \cdot(-1) \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & -4 & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right.$$

$$(A,B) \underset{g}{\longmapsto} (A',B')$$

$$AX = B \iff A'X = B' \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \wedge \underbrace{(0,0) X = (0,0)}_{\text{gilt immer}}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge $L = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ d.h. genau eine Lösung

(4.4.) Stufenmatrix

$S \in K^{(m,n)}$ heißt (normierte) **Stufenmatrix** mit r **Stufen** vom **Typ** $(k_1, \dots, k_r)$, falls gilt

(a) Die Spalten $k_1, \dots, k_r$ von S bilden die ersten r Spalten der m-reihigen Einheitsmatrix $E_m \in K^{(m,m)}$ und $k_1 < k_2 < \dots < k_r$

(b) $S(i,j) = 0$ $i \geq r+1$ oder $j < k_i$

Beispiel

(1) $$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $r = 3$ Stufen, Typ $(2,4,5)$

(2) $$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $r = 2$ Stufen Typ $(1,2)$

(4.5) Gauß-Jordan-Verfahren

Geg: $A \in K^{(m,n)}$ $B \in K^{(n,p)}$

Ges: $L = \{ X \in K^{(n,p)} \mid AX = B \}$ Lösungsmenge der LMG $AX = B$

Lösungsverfahren

1. Schritt

A	B
$\downarrow$	$\downarrow$
A'	B'

Überführen (A,B) durch Gaußoperationen in Stufenmatrix (A',B') (Das geht immer)

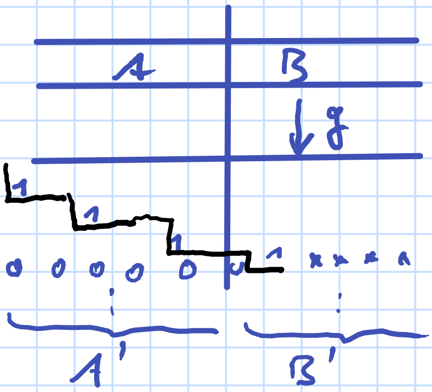
Dann gilt $AX = B \iff A'X = B'$

2. Schritt

Auswertung der Gleichung $A'X = B'$

Da (A',B') Stufenmatrix ist, ist A' auch Stufenmatrix.

1. Fall Stufenzahl (A') < Stufenzahl (A', B')



$\rightarrow$ Zeilengleichung $\underbrace{(0,0 \ldots, 0)}_{0} X = \underbrace{(0, 1 * * *)}_{\neq 0}$

Widerspruch

$\Rightarrow$ keine Lösung also $L = \emptyset$ keine Lösung

2. Fall Stufenzahl (A') = Stufenzahl $(A', B') = r$

Fall 2.1 $r = n$ = Spaltenzahl von A' = Zeilenzahl von X

Dann ist $A' = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $E_r \in K^{(r,r)} = K^{(n,n)}$ und $(A', B') = \left(\begin{array}{c|c} E & B_1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Somit gilt dann

$$A'X = B' \Leftrightarrow \begin{matrix} EX = B_1 \\ 0X = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow X = B_1$$

$\Rightarrow$ Lösung ist eindeutig $L = \{B_1\}$ genau 1 Lösung

Fall 2.2. $r < n$

A' sei dann Stufenmatrix mit r Stufen vom Typ $(k_1, \ldots, k_r)$. Bestimmen die Lösung X spaltenweise.

$$X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) \qquad B' = (\vec{b}_1', \ldots, \vec{b}_p') \qquad \vec{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$$

$$A'X = B' \Leftrightarrow A'\vec{x}_j = \vec{b}_j' \qquad j = 1, \ldots, p$$

Die r skalaren Gleichungen von $A'\vec{x}_j = \vec{b}_j'$ werden nach den r Variablen $x_{k_1 j}, \ldots, x_{k_r j}$ (Stufenvariablen, gebundene Variablen) aufgelöst. Die restlichen $n - r$ Variablen von $\vec{x}_j$ sind frei wählbar (freie Variablen, Parameter)

$\Rightarrow$ Parameterdarstellung der Lösung $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$

mit $d = (n-r)\cdot p$ Parametern (je $n-r$ pro Spalte von X)

Da $n-r > 0$ gilt dann $d \geq 1$

$\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

(falls K unendlich)

Beispiel

$(m, n, p) = (3, 4, 1)$ $\quad X = \vec{x} \quad B = \vec{b}$

Ges: $L = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

skalare Form:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 6x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4		
1	2	1	6	3	
0	0	1	4	2	
1	2	0	2	1	$\cdot(-1)$ +
1	2	1	6	3	$\cdot(-1)$ +
0	0	1	4	2	$\cdot(1)$ +
0	0	-1	-4	-2	
1	2	0	2	1	$\longrightarrow x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1$
0	0	1	4	2	$\longrightarrow x_3 + 4x_4 = 2$
0	0	0	0	0	

$\uparrow$ x_1 $\qquad \uparrow$ x_3

Stufenvariablen

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1 &= 1 - 2x_2 - 2x_4 \\ x_3 &= 2 - 4x_4 \\ x_2 &= s \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \\ x_4 &= t \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \end{aligned}$$

Parameterdarstellung der Lösung

$x_2 = s \quad x_4 = t$

$x_1 = 1 - 2s - 2t$

$x_3 = 2 - 4t$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2s - 2t \\ s \\ 2 - 4t \\ t \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$

$$L = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

geometrische Interpretation: Ebene im $\mathbb{R}^4$

(4.6) Die inverse Matrix

Gegeben: $A \in K^{(n,n)}$, $E_n \in K^{(n,n)}$ Einheitsmatrix

Satz Die LMG $A \cdot X = E$ besitzt entweder keine oder genau eine Lösung $X \in K^{(n,n)}$

Beweisskizze

- zeigen $(A, E) \xmapsto{g} (A', E')$ $\Rightarrow$ Stufenzahl $(A', E') = n$
- 1. Fall Stufenzahl $(A') < n$ $\Rightarrow$ keine Lösung
- 2. Fall Stufenzahl $(A') = n$ $\Rightarrow$ Fall 2.1 tritt auf $\Rightarrow$ genau 1 Lsg

Bezeichnung

Besitzt die LMG $AX = E$ eine Lösung X so heißt X <u>inverse Matrix</u> von A und wird mit $X = A^{-1}$ bezeichnet. Die Matrix A heißt dann <u>invertierbar</u>.

Beispiele

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ $\qquad AX = E$

$$A \quad \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \quad E \qquad \cdot(-2) \quad \cdot 2 \quad \cdot(-1)$$

$E \qquad \searrow A^{-1}$

$$(A, E) \xrightarrow{g} (E, A') \qquad AX = E \overset{\mathrm{II}}{\Leftrightarrow} EX = A' \overset{\mathrm{II}}{\Leftrightarrow} X = A'$$

$$\Rightarrow X = A' = A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

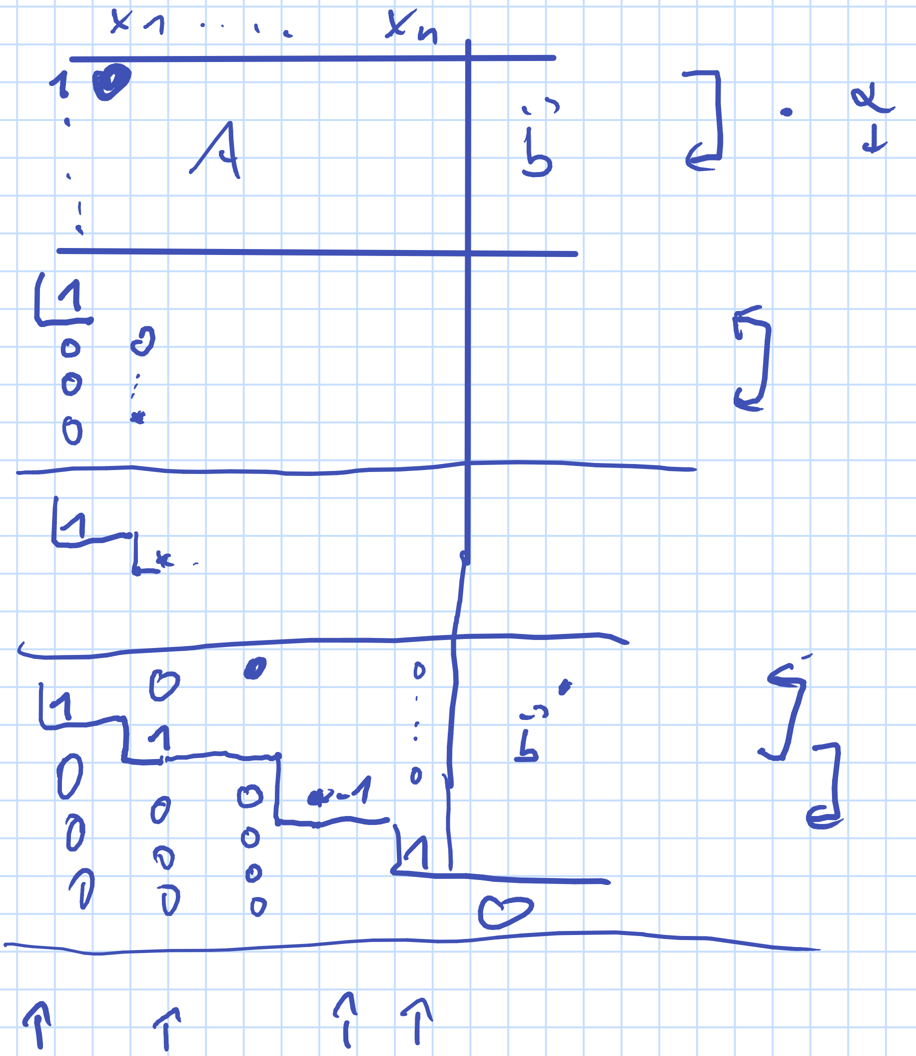
(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \quad \cdot(-2)$$

Widerspruch d.h. A nicht invertierbar

Wiederholung

$A\vec{x} = \vec{b}$ oder $AX = B$

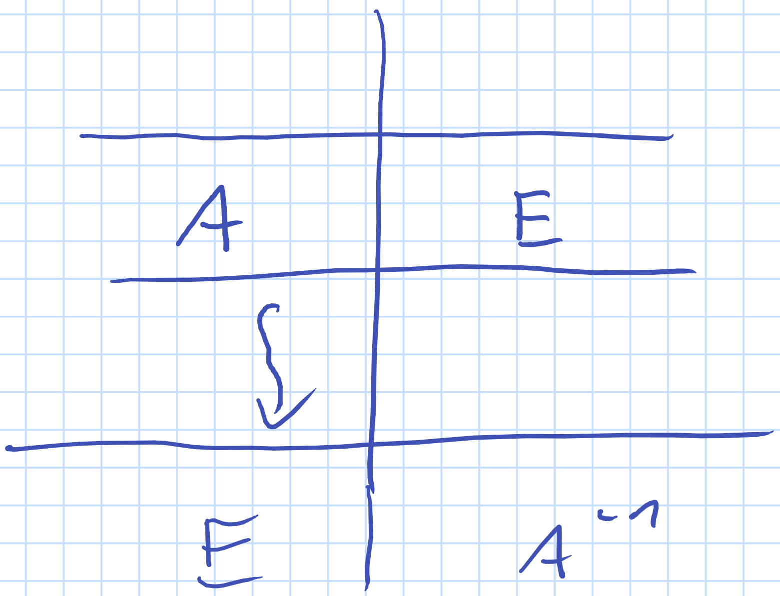


$x_1 + 2x_2 - x_5 = 4$

$x_1 = 4 - 2x_2 + x_5$

Stufenvariable fest

Rest Parameter



wichtige Regeln

(R1) Ist $A \in K^{(n,n)}$ invertierbar, dann sind auch A^T und A^{-1} invertierbar und es gilt

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = E \quad , \quad A^{-1}A = E \quad , \quad (A^{-1})^{-1} = A \quad , \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T}$$

(R2) Sind $A, B \in K^{(n,n)}$ invertierbar, so ist $A \cdot B$ invertierbar und es gilt

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$$

<u>Bew:</u> (R1)
- $A \cdot A^{-1} = E \;\hat{=}\;$ Definition von A^{-1}
- Invertierbarkeit von A^T später

$$A^T \cdot (A^T)^{-1} = E \quad \|\; (\;)^T$$
$$((A^T)^{-1})^T \cdot A = E^T = E \quad \|\; \cdot A^{-1}$$
$$((A^T)^{-1})^T \cdot \underbrace{A A^{-1}}_{E} = A^{-1}$$
$$((A^T)^{-1})^T = A^{-1} \quad \|\; (\;)^T$$
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

- $$(A^{-1} \cdot A)^T = A^T \cdot (A^{-1})^T$$
$$= A^T \cdot (A^T)^{-1} = E \;\|\; (\;)^T$$
$$\Rightarrow A^{-1} \cdot A = E^T = E$$

$\Rightarrow$ A ist inverse Matrix zu A^{-1} also $(A^{-1})^{-1} = A$

(R2) $X : B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$(AB) \cdot X = AB\,B^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$
$$\Rightarrow X = (AB)^{-1}$$

■

Beobachtung

Die Menge $GL(n,K) := \{ A \in K^{(n,n)} \mid A \text{ ist invertierbar} \}$ ist eine Gruppe bzgl. der Matrizenmultiplikation. Sie wird <u>lineare Gruppe</u> der Ordnung n über K genannt (group linear)

<u>Bew:</u> (G0) $A, B \in GL(n,K) \Rightarrow A \cdot B \in GL(n,K)$

folgt aus (R2)

(G1) Assoziativgesetz gilt allgemein für Matrizenmult.

(G2) $\exists$ neutrales Element in $GL(n,K)$

E = Einheitsmatrix $\quad A \cdot E = E \cdot A = A$

$E \in GL(n,K)$ da $E \cdot E = E$ also $E^{-1} = E$

(G3) $\forall A \in GL(n,K) \ \exists B \in GL(n,K)$ mit

$A \cdot B = B \cdot A = E$

$B = A^{-1}$

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$(A^{-1})^{-1} = A$ (R1)

■

Anwendung von A^{-1}

Sei $A \in GL(n,K)$ dann gilt:

(1) Die Gleichung $AX = B$ hat genau 1 Lsg $X = A^{-1} \cdot B$

(2) Die Gleichung $X \cdot A = B$ hat genau 1 Lsg $X = B \cdot A^{-1}$

<u>Bew zu (1)</u>

- $AX = B \Rightarrow A^{-1} A X = A^{-1} B$
  $\Rightarrow EX = A^{-1} B \Rightarrow X = A^{-1} B$
- $X := A^{-1} B$
  $\Rightarrow AX = A A^{-1} B = EB = B$

■

(2) analog

(3) Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau 1 Lsg $\vec{x} = A^{-1} \vec{b}$

(4) Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$ hat genau 1 Lsg $\vec{x} = \vec{0}$ (triviale Lösung)

5. Lineare Räume und Geometrie

(5.1) Der lineare Raum / Vektorraum

geg.:
- Körper K, Elemente von K heißen Skalare bzw. skalare Größen.
- Menge V von vektoriellen Größen / Vektoren
- Operationen
  - Operationen $+, \circ$ in K
  - Addition $+$ auf V: $u, v \in V \mapsto u + v \in V$ (Summe)
  - skalare Multiplikation $\cdot$: $\alpha \in K, v \in V \mapsto \alpha \cdot v \in V$ (α-faches von v)

Definition

V heißt Vektorraum (linearer Raum) über dem Körper K oder K-Vektorraum, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(V1) $(V, +)$ ist kommutative Gruppe

(V2) $\forall\ u, v \in V \quad \forall\ \alpha, \beta \in K$

$$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$$
$$(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$$
$$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$$
$$1_K \cdot v = v$$

Bezeichnungen

- Das neutrale Element $0_V \in V$ bzgl. der Vektoraddition heißt Nullvektor.
- Das inverse Element zu $v \in V$ heißt $-v$ negativer Vektor zu v.

Es gelten folgende Aussagen $\quad \forall \alpha \in K \quad \forall v \in V$

1.) $0_K \cdot v = 0_V$

2.) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$

3.) $(-1) \cdot v = -v$

4.) $\alpha \cdot v = 0_V \Leftrightarrow \alpha = 0_K$ oder $v = 0_V$

Beweis

1.)
$$0_K \cdot v = (0_K + 0_K) \cdot v \overset{(V2)}{=} 0_K \cdot v + 0_K \cdot v \quad \Big|\Big| + -(0_K \cdot v)$$
$$0_V = 0_K \cdot v$$

2.)
$$\alpha \cdot 0_V = \alpha \cdot (0_V + 0_V)$$
$$\alpha \cdot 0_V \overset{V2}{=} \alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V \quad \Big|\Big| + -(\alpha \cdot 0_V)$$
$$0_V = \alpha \cdot 0_V$$

3.)
$$u := (-1) \cdot v$$
$$v + u \overset{(V2)}{=} 1 \cdot v + (-1) \cdot v \overset{(V2)}{=} (1 + (-1)) \cdot v = 0_K \cdot v \overset{1)}{=} 0_V$$
$$\Rightarrow u = -v$$

(4) $\Leftarrow$ folgt aus 1) und 2)

$\Rightarrow \quad \alpha \cdot v = 0_V$

1. Fall $\quad \alpha = 0_K \Rightarrow$ fertig

2. Fall $\quad \alpha \neq 0_K \Rightarrow \exists\, \alpha^{-1}$

$$\Rightarrow \alpha \cdot v = 0_V \quad \Big|\Big| \; \alpha^{-1} \cdot$$
$$\alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1} 0_V$$
$$\overset{(V2)}{\underset{(1)}{\Rightarrow}} (\alpha^{-1} \cdot \alpha) v = 0_V$$
$$1_K \cdot v = 0_V$$
$$v = 0_V$$

$\blacksquare$

Subtraktion in V : $\quad u - v := u + (-v) = u + (-1) \cdot v$

(5.2) Standardvektorräume (Beispiele)

(I) Vektorraum $K^{(m,n)}$ der Matrizen vom Format (m,n)

- K beliebiger Körper
- $V = K^{(m,n)}$
- Addition = Matrizenaddition
- skal. Multiplikation = skalare Multiplikation von Matrizen

Spezialfälle

- $V = K^m = K^{(m,1)}$ VR der Spaltenvektoren
- $V = K^{(1,1)} = K$

Jeder Körper ist ein Vektorraum über sich selbst

(II) Vektorraum reellwertiger Abbildungen

- $K = \mathbb{R}$
- $V = \{ f \mid f : I \to \mathbb{R} \}$ $\quad I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

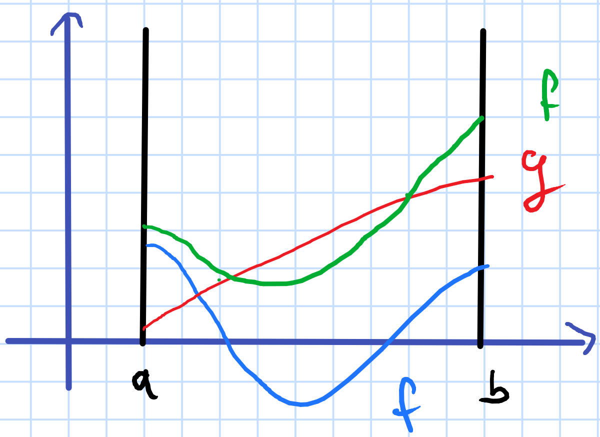
Operationen

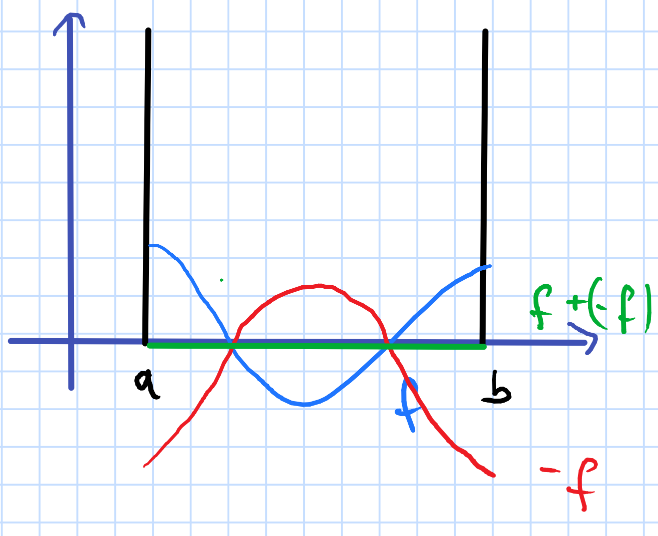
$f, g : I \to \mathbb{R} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

Summe $f+g : I \to \mathbb{R}$ mit $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in I$

skal. Mult. $\alpha \cdot f : I \to \mathbb{R}$ mit $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) \quad \forall x \in I$

Dann gelten (V1) und (V2) also ist V ein VR über $K = \mathbb{R}$





(III) Verallgemeinerung von (II)

- K beliebiger Körper
- $I \neq \emptyset$ beliebige Menge
- W beliebiger K-VR
- $V = \mathrm{Abb}(I, W) = \{ f \mid f : I \to W \}$
- Addition und skalare Multiplikation wie dem $f, g \in V$, $\alpha, \beta \in K$

$f + g : I \to W$ mit $\underbrace{(f + g)}_{\text{Addition in } V}(x) = f(x) \underbrace{+}_{\text{Addition in } W} g(x)$ $\forall x \in$

$\alpha \cdot f : I \to W$ mit $(\underbrace{\alpha \cdot f}_{\text{skalare Mult. in } V})(x) = \alpha \underbrace{\cdot}_{\text{skal. Mult in } W} f(x)$

Es gelten (V1) und (V2) d.h. V ist K-VR

Spezialfälle

$K = \mathbb{R}$ $\quad I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ $\quad W = \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow V = \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R}^n)$ ist VR

$f \in V$ beschreibt Bewegung im Raum $\mathbb{R}^n$

$f(t) \in \mathbb{R}^n$ = Ortsvektor zum Zeitpunkt $t \in I$

IV Vektorraum der Polynome $K[x]$

- K beliebiger Körper $K[x] = \{ p \mid p$ ist Polynom über $K \}$
- Addition = Addition von Polynomen
- skal. Mult. $p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \alpha \in K$

$$\alpha \cdot p = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha \cdot a_k) x^k$$

(V1) und (V2) gelten

genauso VR $K[[x]]$ der formalen Potenzreihe

(V) Körperwechsel

- K Körper $L \subseteq K$ Unterkörper
- Ist V ein K-VR so ist V auch ein L-VR

Bsp:
- Jeder $\mathbb{R}$-VR ist auch ein $\mathbb{Q}$-VR
- $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$-VR $\qquad \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ Körper

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ ist auch ein $\mathbb{R}$-VR $\quad (\hat{=} \mathbb{R}^2)$

(5.3) Grundbegriffe der Vektorraumtheorie

Gegeben: K-VR V

(5.3.1) lineare Unterräume

Definition

$U \subseteq V$ heißt <u>linearer Unterraum</u> von V, falls U ein K-Vektorraum ist.

Satz:

$U \subseteq V$ ist genau dann ein lin. UR von V, falls gilt:

(UR1) $0_V \in U$

(UR2) $a, b \in U \Rightarrow a+b \in U$

(UR3) $a \in U, \alpha \in K \Rightarrow \alpha \cdot a \in U$

Beweis

(i) In GudS schon gezeigt

$(U,+)$ ist Untergruppe von $(V,+) \Leftrightarrow$ (U1) $0_V \in U$
(U2) $a, b \in U \Rightarrow a+b \in U$
(U3) $a \in U \Rightarrow -a \in U$

(ii) $(\Rightarrow)$ Sei $U \subseteq V$ K-VR, d.h. (V1) und (V2) gelten

(V1) $\Rightarrow$ $(U,+)$ ist UG von $(V,+)$

$\overset{(i)}{\Rightarrow}$ (UR1) und (UR2)

(UR3) folgt aus Abgeschlossenheit der skalaren Mult.

$(\Leftarrow)$ (UR1), (UR2) und (UR3) mit $\alpha = -1$

$\Rightarrow$ (U1) (U2), (U3)

$\overset{(i)}{\Rightarrow}$ $(U,+)$ ist (kommutative) Gruppe $\Rightarrow$ (V1)

Regeln aus (V2) gelten für ganz V also auch für $U \subseteq V$

Abgeschlossenheit der skalaren Mult. folgt aus (UR3)

Folgerung

(1) $U = \{ 0_V \}$ ist lin. UR von V

(UR1), (UR2), (UR3) gelten offensichtlich

(2) $U = V$ ist lin. UR von V (folgt aus Def)

V und $\{0_V\}$ heißen triviale Unterräume von V

(5.3.2) Beispiele

(1) Homogenes lineares Gleichungssystem

Sei $A \in K^{(m,n)}$. Dann ist $U = \{ \vec{x} \in K^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \} \subseteq K^n$ ein lin. UR des K-VR K^n.

Beweis:

(UR1) $\vec{x} = \vec{0} \in U$, da $A \cdot \vec{0} = \vec{0}$

(UR2) $\vec{a}, \vec{b} \in U \Rightarrow A(\vec{a}+\vec{b}) = A\vec{a} + A\vec{b} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b} \in U$

(UR3) $\vec{a} \in U, \alpha \in K \Rightarrow A \cdot (\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot A\vec{a} = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in U$

(2) stetige Funktionen

Es sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $U = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig auf } I \}$ ein lin UR des $\mathbb{R}$-VR $V = Abb(I, \mathbb{R}) = \{ f \mid f : I \to \mathbb{R} \}$.

Beweis

(UR1) 0_V ist die Nullabbildung, d.h. $\forall x \in I : 0_V(x) = 0$.
0_V ist stetig auf I. $\Rightarrow 0_V \in U$

(UR2) $f, g \in U \Rightarrow f, g : I \to \mathbb{R}$, stetig $\Rightarrow f+g : I \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f+g \in U$

(UR3) $f \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f : I \to \mathbb{R}$, stetig $\Rightarrow \alpha \cdot f : I \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \alpha f \in U$

Bezeichnungen

- $C^0(I, \mathbb{R}) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig auf } I \}$ ist $\mathbb{R}$-VR
- $C^n(I, \mathbb{R}) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } n \text{ mal stetig diff'bar auf } I \}$ ist $\mathbb{R}$-VR

(5.3.3) Linearkombination, Erzeugendensystem

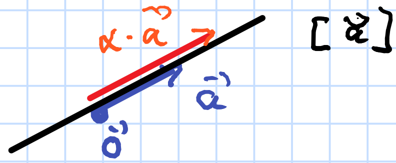
Def:

(1) b heißt Linearkombination (LK) von $a_1, \dots, a_n \in V$ falls gilt
$$b = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$$
mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$

(2) Für eine Vektormenge $M \subseteq V$ sei
$[M] = \{ x \in V \mid x$ ist LK von (endlich vielen) Vektoren aus $M\}$
$[\emptyset] = \{ 0_V \}$
$[M]$ heißt lineare Hülle von M

Bemerkung: statt $[M]$ auch $\mathrm{lin}(M)$ oder $\mathrm{span}(M)$

Bsp: (1) $M = \{a\}$ $\quad [a] = \{ x = \alpha \cdot a \mid \alpha \in K \}$



(2) $M = \{a, b\}$ $\quad [a,b] := [\{a,b\}] = \{ x = \alpha \cdot a + \beta b \mid \alpha, \beta \in K \}$

Satz (Eigenschaften der linearen Hülle)

Für beliebige Teilmengen $M, N, U \subseteq V$ des K-VR V gilt:

(H0) $[M] \subseteq V$ ist lin UR von V, der von M erzeugte lin. UR

(H1) $M \subseteq [M]$

(H2) $M \subseteq N \Rightarrow [M] \subseteq [N]$

(H3) $[[M]] = [M]$

(H4) $U \subseteq V$ lin UR $\Leftrightarrow [U] = U$

(H5) $U \subseteq V$ lin UR mit $M \subseteq U \Rightarrow [M] \subseteq U$

(H6) $[M] \subseteq [N] \Leftrightarrow M \subseteq [N]$

(H7) $[M] = [N] \Leftrightarrow M \subseteq [N] \wedge N \subseteq [M]$

(H8) $\forall a \in M: \; [M \setminus \{a\}] = [M] \Leftrightarrow a \in [M \setminus \{a\}]$

Beweis

(H0) (UR1) $o_V \in [M]$ denn $o_V = 0 \cdot x$ für $x \in M$

oder $[M] = \{o_V\}$ falls $M = \emptyset$

(UR2) $a, b \in [M]$

$a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, \; a_1, \dots, a_n \in M$

$b = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_m b_m \qquad \beta_1, \dots, \beta_m \in K, \; b_1, \dots, b_m \in M$

$\Rightarrow a + b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_m b_m$

endliche LK von Vektoren aus M

$\Rightarrow a + b \in [M]$

(UR3) $a \in [M] \quad \alpha \in K$

$\Rightarrow a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \qquad \alpha_i \in K, \; a_i \in M$

$\Rightarrow \alpha \cdot a = (\alpha \cdot \alpha_1) a_1 + \dots + (\alpha \cdot \alpha_n) a_n \in [M]$

(H1) z.z. $M \subseteq [M]$

Sei $x \in M \Rightarrow x = 1 \cdot x \in [M]$

(H2) z.z. $\underset{\text{Vor}}{M \subseteq N} \Rightarrow \underset{\text{Beh}}{[M] \subseteq [N]}$

$x \in [M] \Rightarrow x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \overset{M \subseteq N}{\Longrightarrow} x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \Rightarrow x \in [N]$

$\alpha_i \in K, \; a_i \in M \qquad \alpha_i \in K, \; \underline{a_i \in N}$

(H3) $[M] \subseteq [[M]]$ folgt aus H1

noch z.z. $[[M]] \subseteq [M]$

Sei $x \in [[M]] \Rightarrow x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \qquad \alpha_i \in K, \; a_i \in [M]$

$\Rightarrow x = \alpha_1 (\beta_{11} b_{11} + \dots + \beta_{1n_1} b_{1n_1}) + \dots + \alpha_n (\beta_{n1} b_{n1} + \dots + \beta_{nn_n} b_{nn_n})$

$\alpha_i \in K, \; \beta_{ij} \in K, \; b_{ij} \in M$

$\Rightarrow x$ ist endliche LK von Vektoren aus $M \Rightarrow x \in [M]$

(H4) $U \subseteq V$ lin UR $\Leftrightarrow$ $U = [U]$

$\Rightarrow$ · $U \subseteq [U]$ wegen (H1)

· $x \in [U] \Rightarrow x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \quad \alpha_i \in K,\ a_i \in U$

$\overset{UR2/3}{\Rightarrow} x \in U$

$\Rightarrow [U] \subseteq U$

$\Leftarrow$ folgt aus (H0)

(H5) Sei U lin UR $M \subseteq U$ Beh. $[M] \subseteq U$

$x \in [M] \Rightarrow x = \sum \alpha_i a_i \ , \alpha_i \in K,\ a_i \in M \Rightarrow x = \sum \alpha_i a_i,\ \alpha_i \in K,\ \underline{a_i \in U}$

$\overset{UR2/3}{\Rightarrow} x \in U$

(H6) $[M] \subseteq [N] \Leftrightarrow M \subseteq [N]$

$\Rightarrow$ $M \overset{H1}{\subseteq} [M] \overset{vor}{\subseteq} [N]$

$\Leftarrow$ $M \subseteq [N]$ und $[N]$ lin UR (H0)

$\underset{(H5)}{\Rightarrow} [M] \subseteq [N]$

(H7) folgt aus H6

(H8) $[M - \{a\}] = [M] \overset{H7}{\Leftrightarrow} \underbrace{M \setminus \{a\} \subseteq [M]}_{\text{klar wegen H1}} \wedge M \subseteq [M \setminus \{a\}]$

$\Leftrightarrow M \subseteq [M \setminus \{a\}] \Leftrightarrow a \in [M \setminus \{a\}]$

<u>Bemerkung</u>

Eigenschaften (H1), (H2), (H3) machen aus $[\cdot]$, einen sogenannten Hüllenoperator.

<u>Bsp</u> $\quad K = \mathbb{R} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

- G.zz $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}]$?

(H8) $\quad [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] \iff \vec{c} \in [\vec{a}, \vec{b}]$

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} \iff \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} \alpha & \beta & \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \\ \cdot -2 \quad \cdot 3 \\ 1 \cdot \alpha = -2 \\ 1 \cdot \beta = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{c} = -2 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$$

<u>Def</u>:

M heißt <u>Erzeugendensystem</u> des lin UR U, falls $U = [M]$

(5.3.4) Lineare (Un-) Abhängigkeit, Basis, Dimension

<u>Definition</u> Sei $M \subseteq V$ eine Vektormenge.

(1) M heißt <u>linear abhängig</u>, falls es einen Vektor $a \in M$ gibt, der LK der anderen ist, d.h. $\exists a \in M : a \in [M \setminus \{a\}]$.
Andernfalls heißt M <u>linear unabhängig</u>

(2) M heißt <u>Basis</u> des linearen Unterraumes $U \subseteq V$, falls M ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

<u>Beispiele</u> $K = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}^3$

(1) $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (1,1,1)\cdot\vec{x} = 0\}$ ist ein UR von $\mathbb{R}^3$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \text{fest} & \text{frei} & & \end{array}$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_2 = s$, $x_3 = t \Rightarrow x_1 = -s-t$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix}$ $s,t \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{x} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $s,t \in \mathbb{R}$

$$U = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R}\right\} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$\Rightarrow M = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ ist ES von U

M ist linear unabhängig da $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

$\Rightarrow$ M ist Basis von U (Gauß-Jordan liefert immer Basis)

(2) $U = \mathbb{R}^3$ $\quad B = \left\{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

- $U = [B]$, da für alle $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \in [B]$
- B ist linear unabhängig, da kein Einheitsvektor $\vec{e}_i$ LK der anderen ist.

$\Rightarrow$ B ist Basis von $\mathbb{R}^3$ (Standardbasis)

Satz 1 (Austauschsatz von Steinitz)

Sei V ein K-VR und A, B lin. unabh. Menge

Dann gilt:

$$|A| > |B| \Rightarrow \exists\, a \in A \setminus B : B \cup \{a\} \text{ ist lin. unabhängig.}$$

Bew (siehe Lehrbücher, mit Gauß-Jordan)

Bsp: $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$|A| = 3$, $|B| = 2$

$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist lin. unabh

nachrechnen dass kein Vektor LK der andern ist

Satz 2 Hauptsatz der Vektorraumtheorie

(1) Jeder K-VR besitzt eine Basis

(2) Sind B_1, B_2 Basen des K-VR V so gilt
$|B_1| = |B_2|$, d.h. je 2 Basen sind gleichmächtig.

Beweisskizze

(1) 1. Fall V besitzt endliches ES M

Gibt es $a \in M$ mit $a \in [M \setminus \{a\}]$

$M_{neu} := M \setminus \{a\}$ $\quad V = [M_{neu}]$

iterieren $\Rightarrow$ zusammenschrumpfen auf lin. unabh. Erzeugendensystem

2. Fall V besitzt kein endliches ES

schwerer

(2) B_1, B_2 Basen Annahme $|B_1| > |B_2|$

$\underset{\text{Steinitz}}{\Rightarrow} \exists\, a \in B_1 \setminus B_2$ mit $B_2 \cup \{a\}$ lin unabh

$\Rightarrow a \notin [B_2] = V$ $\lightning$

- Besitzt ein K-VR V eine endliche Basis B, so definiert man $\dim(V) = \dim_K(V) = |B|$ (Dimension von V)

- Besitzt V kein endliches ES so ist $\dim(V) = \infty$

Bemerkung $\dim(V) = \infty \Leftrightarrow \exists$ unendliche lin. unabh. Menge

Beispiele

- Standardbasis des VR $V = \mathbb{R}^n$

$$B = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

analog für K-VR K^n

- $V = \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \} = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist $\mathbb{R}$-VR

$\dim(V) = \infty$

Beispiel für eine unendliche lin. unabh. Menge

$f_\alpha \in V$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \alpha \\ 1 & x = \alpha \end{cases}$

$M = \{ f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

lin. unabh. kein „richtiges" ES

Bemerkung

Jeder lin. UR $U \subseteq V$ eines K-VR V ist ein K-VR und besitzt damit eine Basis und eine eindeutig definierte Dimension.

Nutzen der Dimension

Sei $U \subseteq V$ lin UR von V mit $\dim(U) = d$. Dann gilt:

(D1) Jede Menge von d lin unabh. Vektoren aus U ist Basis von U

(D2) Je $d+1$ Vektoren aus U sind lin. abhängig.

(D1) und (D2) folgen aus Austauschsatz.

Außerdem gilt: $U, W \subseteq V$ lin UR mit
$U \subseteq W$ und $\dim(U) = \dim(W) = d \Rightarrow U = W$

Bemerkung

$\dim(U) = 0 \Leftrightarrow U$ hat Basis B mit $|B| = 0$
$\Leftrightarrow U$ hat Basis $B = \emptyset$
$\Leftrightarrow U = [\emptyset] = \{0_V\}$

Kriterium für lineare Unabhängigkeit / Abhängigkeit

- $\{a\}$ ist lin unabh $\Leftrightarrow a \notin [\emptyset] \Leftrightarrow a \in \{0_V\} \Leftrightarrow a \neq 0_V$
- $\{a, b\}$ ist lin abhängig $\Leftrightarrow a \in [b] \vee b \in [a]$
$\Leftrightarrow a = \beta \cdot b \vee b = \alpha \cdot a$
$\Leftrightarrow a - \beta \cdot b = 0_V \vee -\alpha a + b = 0_V$
$\Leftrightarrow$ Die Gleichung
$\alpha_1 \cdot a + \alpha_2 \cdot b = 0_V$ hat
nichttriviale Lösung (d.h. $\alpha_1 \neq 0$ oder $\alpha_2 \neq 0$)

Für $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ gilt

- Besitzt die Gleichung
$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0_V$$
eine Lösung $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ derart, dass $\alpha_i \neq 0$ für ein i
so ist M lin. abhängig (umstellen nach a_i) $a_i \in [M \setminus \{a_i\}]$

- Besitzt die Gleichung nur die triviale Lsg $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$
so ist M linear unabhäng.

Folgerung

Ist M lin unabh. so besitzt jedes $x \in [M]$ eine eindeutige Darstellung als LK der Vektoren aus M.

Bew:
$$x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$$
$$- \quad x = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n$$
$$0_V = (\alpha_1 - \beta_1) a_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) a_n$$
lin.unabh. $\Rightarrow$ $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0 \Rightarrow \forall i \; \alpha_i = \beta_i$

(5.3.5) Basisbestimmung und Rang

Gegeben

- $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in K^{(m,n)}$ Matrix mit Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in K^m$
- $W = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$ ein UR (Spaltenraum von A)

Gesucht

Basis B und Dimension von W

Bezeichnung

Die Dimension von W heißt auch Rang der Matrix A und wird mit $rg(A)$ bezeichnet

$$\boxed{rg(A) = \dim(W)}$$

Bemerkung

- $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A\vec{x} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n$

$\Rightarrow$ $A\vec{x}$ ist LK der Spalten von A

$\Rightarrow$ $W = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] = \{ A\vec{x} \mid \vec{x} \in K^n \}$ ist Wertebereich der Abbildung $\vec{x} \in K^n \mapsto A\vec{x} \in K^m$

Lösung

Ziel: Streichen Spaltenvektoren, die LK der restlichen Spaltenvektoren sind.

(1) Überführen $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ durch Gaußoperationen in Stufenmatrix $S = (\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n)$. Dann gilt:

$$A\left\{ \begin{array}{ccc|c} x_1 & \dots & x_n & \\ \hline \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n & \vec{0} \\ \hline & \Downarrow & & \Downarrow \\ \hline \vec{s}_1 & \dots & \vec{s}_n & 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{c} A\vec{x} = \vec{0} \\ \Updownarrow \\ S\vec{x} = \vec{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c} x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0} \\ \\ x_1 \vec{s}_1 + \dots x_n \vec{s}_n = \vec{0} \end{array}$$

Dann gibt es in A und S für die Spaltenvektoren die gleichen Abhängigkeiten

(2) Ist S Stufenmatrix mit r Stufen vom Typ $(k_1, \dots, k_r)$ so sind die Spaltenvektoren

$\vec{s}_{k_1} = \vec{e}_1$, $\vec{s}_{k_2} = \vec{e}_2$, ..., $\vec{s}_{k_r} = \vec{e}_r$ lin. unabh. und alle anderen Spalten von S sind LK davon.

Dasselbe gilt für die Spalten von A, d.h.

$$B = \{ \vec{a}_{k_1}, \dots, \vec{a}_{k_r} \}$$

ist Basis von $W = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$ und

$\mathrm{rg}(A) = \dim(W) = r$ = Stufenzahl

Bsp: $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4,4)}$ $\quad \vec{a}_i \in \mathbb{R}^4$

Basis des Spaltenraumes von A

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \quad \cdot -2 \quad \cdot -1 \quad \cdot -2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \cdot(-1)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \cdot -1 \quad \cdot -1 \quad \cdot -1$$

Basis des Zeilenraumes von A

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$

$1 \quad 2 \quad \quad 4$

$\{ \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_4 \}$ lin. unabh.

also auch $\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4 \}$

$\vec{s}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \vec{s}_1 + 2 \vec{s}_2$

$\Rightarrow \vec{a}_3 = -1 \cdot \vec{a}_1 + 2 \vec{a}_2$

Basis von $W = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4]$

ist $B = \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4 \}$

$\mathrm{rg}(A) = \dim(W) = 3$

Eigenschaften des Ranges für $A \in K^{(m,n)}$

(R1) $\operatorname{rg}(A)$ = maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A

(R2) $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^T)$ = maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A
= Dimension des Zeilenraumes von A

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} S = \begin{pmatrix} \underline{s_1} \\ \vdots \\ \underline{s_m} \end{pmatrix}$$

Basis des Zeilenraumes $\{\underline{s_1}, \dots, \underline{s_r}\}$
(Gaußoperationen ändern Zeilenraum)

(R3) Bei Gaußoperationen bleibt der Rang gleich

(R4) <u>Dimensionsformel</u>
Für den lin UR $U = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$
gilt $\boxed{\dim(U) = n - \operatorname{rg}(A)}$

(R5) <u>Rangkriterium</u>
$A\vec{x} = \vec{b}$ hat Lösung $\vec{x} \in K^n \iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A, \vec{b})$

<u>Bemerkung</u>

1) Merke $\operatorname{rg}(A)$ = Stufenzahl von S
2) $A\vec{x} = \vec{b}$ hat Lösung $\vec{x} \iff \vec{b}$ ist LK der Spalten von A