Technische Universität Ilmenau 21. November 2023

Vorlesung

Mathematik für Informatiker

Dr. Jens Schreyer

NeXTeX

Vorlesungsmitschrift von
ADRIAN SCHOLLMEYER

Inhaltsverzeichnis

Vorgeplänkel

- Für Übungen etc. siehe Schreyer Homepage
- 10 Hausaufgabenserien für Mathe-Info 1
- Mindestens 50% der Punkte nötig für MP, Rest für Bonuspunkte

Kapitel 1.

Differentialrechnung für Funktionen $f\colon \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1.1. Abbildungen aus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1.1.1. Zahlenbereiche

- $\mathbb{N}$: Natürliche Zahlen (diese Vorlesung: ohne 0)
- $\mathbb{N}_{\nvdash}$: Natürliche Zahlen inklusive 0
- $\mathbb{Z}$: Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$
- $\mathbb{Q}$: Rationale Zahlen (alle $\frac{p}{q}$ mit $p; q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0$)
- $\mathbb{R}$: Reelle Zahlen

Bezeichnungen

- aus/in $\to$ Teilmenge
- von/nach $\to$ ganze Menge

1.1.2. Abbildungen

1.1. Eine Abbildung bzw. Funktion aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt durch:

1. Angabe einer Menge $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ (Definitionsbereich)
2. Eindeutige Vorschrift, die jedem Element x aus $\mathbb{D}$ genau ein Element y aus $\mathbb{R}$ zuordnet

Schreibweisen

- $x \in \mathbb{D} \mapsto y = f(x) \in \mathbb{R}$
- $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ oder $f\colon \mathbb{D} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ („Funktion *von* $\mathbb{D}$ in $\mathbb{R}$“)

Sprechweisen

- $x \ldots$ Argument fon f / unabhängige Variable
- $y \ldots$ abhängige Variable
- $f(a) \ldots$ Funktionswert and der Stelle $x = a$ / Bild von f an der gleichen Stelle

Bezeichnungen

- Graph von f $\quad \Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{D}, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{D}\}$ (siehe Abbildung 1.1)

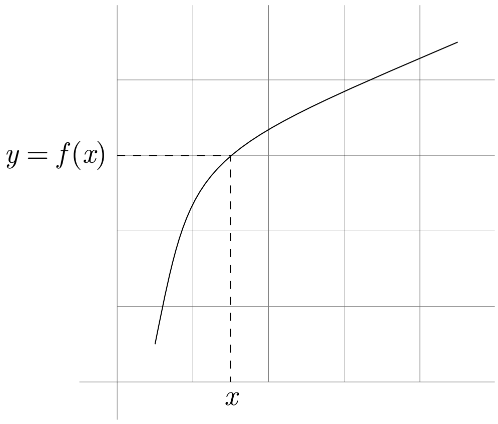

Abbildung 1.1.: Graph einer Funktion

- Wertebereich von f $\quad \mathbb{W} = \{f(x), x \in \mathbb{D}\}$
- Nullstellen $x \in \mathbb{D}, f(x) = 0$

1.1.3. Beispiele

1. **Identische Abbildung**
   $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : id_{\mathbb{R}}(x) = x$
   $\mathbb{D} = \mathbb{R}; \mathbb{W} = \mathbb{R}$

2. $$\begin{aligned} f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} \\ \mathbb{D} &= \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \\ \mathbb{W} &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

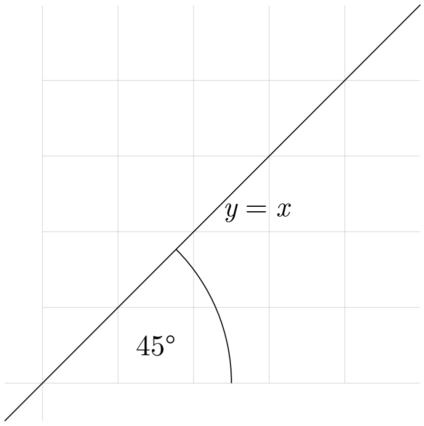

Abbildung 1.2.: Graph einer identischen Abbildung

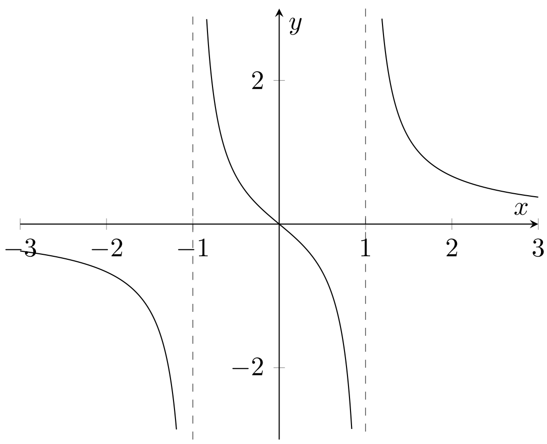

Abbildung 1.3.: Graph mit Polstellen

3. **Floor-Funktion**

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
f(x) &= \lfloor x \rfloor \ \text{ (untere Gaußklammern)} \\
\implies &\text{größte ganze Zahl } \leq x \\
\mathbb{D} &= \mathbb{R} \\
\mathbb{W} &= \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

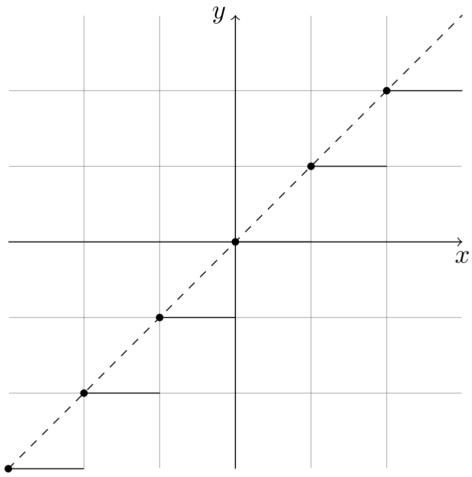

Abbildung 1.4.: Graph der Floor-Funktion

4. **Ceiling-Funktion**

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
f(x) &= \lceil x \rceil \ \text{ (obere Gaußklammern)} \\
\implies &\text{kleinste ganze Zahl } \geq x \\
\mathbb{D} &= \mathbb{R} \\
\mathbb{W} &= \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

5. **Betragsfunktion**

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
f(x) = |x| &= \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \\
\mathbb{D} &= \mathbb{R} \\
\mathbb{W} &= \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} \\
&= [0; \infty) \\
&= \mathbb{R}_{\geq 0}
\end{aligned}
$$

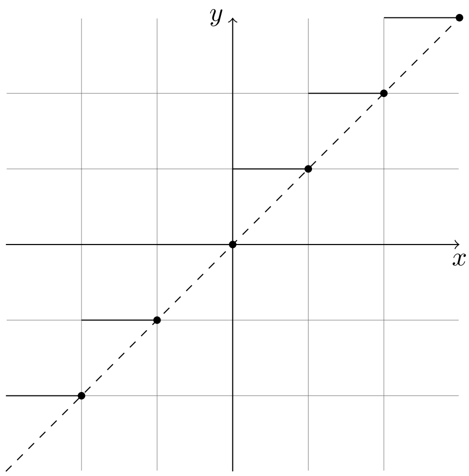

Abbildung 1.5.: Graph der Ceiling-Funktion

1.1.4. Arithmetische Operationen für Funktionen

Sind $f, g : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, so kann sich eine neue Funktion bilden.

Summe/Differenz:

$$f \pm g : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Addition von Funktionen vs. Addition von reellen Zahlen

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{D}$$

Produkt:

$$f \cdot g : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{D}$$

Vielfache:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$
$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

Quotient:

$$\frac{f}{g} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$\mathbb{D} = \mathbb{D} \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$$

1.2. Folgen

1.2.1. Definition und Darstellung

1.2. Eine *Abbildung* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt *unendliche Folge über* $\mathbb{R}$.
Man nennt $a_n = a(n)$ das *n-te Folgenglied* von a und n den *Index*.
Man schreibt:

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_n)_{n \geq 1} = (a_n) \tag{1.1}$$

Bildungsvorschriften:

(a) verbal: $a_n = n$-te Primzahl

$$a = (a_1, a_2, \dots) = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$$

(b) explizit:

(1) $a_n = c + d \cdot n \quad c, d \in \mathbb{R}$

$$a_n = (c, c + d, c + 2d, \dots)$$

$\Longrightarrow$ arithmetische Folge

(2) $a_n = a \cdot x^n \quad n \geq 0, x \in \mathbb{R}$

$$a_n = (a, ax, ax^2, ax^3, \dots)$$

$\Longrightarrow$ geometrische Folge

(3) rekursiv:

$$\begin{cases} a_1 = 2 & & \text{Anfangsglied} \\ a_n = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{2} & n \geq 2 & \text{Rekursionsvorschrift} \end{cases}$$

1.2.2. Beweise mit vollständiger Induktion

Abspaltregel mit Aussagenlogik

Sind a und $a \implies b$ wahr, dann gilt auch b.

Aussageform/Prädikat

$$A(n) : 1 + 2 + \cdots + n = n \cdot \frac{n+1}{2} \quad \text{keine Aussage (da Variable enthalten)} \tag{1.2}$$

$$A(1) : 1 = \frac{1 \cdot 1}{2} \quad \text{wahre Aussage} \tag{1.3}$$

$$A(2) : 1 + 2 = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2} \quad \text{wahre Aussage} \tag{1.4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \quad \text{Aussage} \tag{1.5}$$

Beweis durch vollständige Induktion Tiefe 1

Unter Nutzung der Abspaltregel und unter Zuhilfenahme einer anfänglich bewiesenen Aussage wird ähnlich dem Dominoprinzip aus der Wahrheit einer Aussage und dem Schluss von der Wahrheit dieser Aussage auf die der nächsten, die Wahrheit der nächsten Aussage hergeleitet.

$$
\begin{aligned}
A(1) &\equiv A(1) && (1.6)\\
A(1) \implies A(2) &\equiv A(2) && (1.7)\\
A(2) \implies A(3) &\equiv A(3) && (1.8)\\
A(3) \implies A(4) &\equiv A(4) && (1.9)\\
&\vdots && (1.10)\\
A(n) \implies A(n+1) &\equiv A(n+1) && (1.11)
\end{aligned}
$$

Zeit man nun also die Wahrheit von $A(1)$ sowie die Wahrheit der Implikation $A(n) \implies A(n+1)$ (alternativ $A(n-1) \implies A(n)$) für beliebiges n, so ist die Wahrheit für alle n gezeigt.

$$A(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : A(n) \implies A(n+1) \equiv \forall n \in \mathbb{N} : A(n) \tag{1.12}$$

Beispiel: Zu beweisen sei die Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.13}$$

$$\tag{1.14}$$

Beweis.

Induktionsanfang:

$$\text{Behauptung: } A(1) \text{ gilt} \tag{1.15}$$

$$\text{Beweis: } A(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2} \text{ trivial } \checkmark \tag{1.16}$$

Induktionsschritt:

$$\text{Vorraussetzung: } A(n) \text{ gilt} \tag{1.17}$$

$$\text{Behauptung: } A(n+1) \text{ gilt} \tag{1.18}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Beweis: } 1 + 2 + \cdots + n + n + 1 &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \qquad \text{(Einsetzen der IV)} && (1.19)\\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} && (1.20)\\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && (1.21)
\end{aligned}
$$

□

Beweis durch vollständige Induktion Tiefe 2

Bei der vollständigen Induktion Tiefe 2 geht man von zwei Induktionsanfängen aus und beweist im Induktionsschritt die Implikation $A(n-2) \wedge A(n-1) \implies A(n)$.

Der Beweis mittels vollständiger Induktion Tiefe 2 erfolgt analog zu vollständiger Induktion Tiefe 1, jedoch mit zwei Induktionsanfängen (also Beweis von $A(1)$ und $A(2)$) und zwei Induktionsvorraussetzungen (Vorraussetzungen im Induktionsschritt) ($A(n-2)$ gilt und $A(n-1)$ gilt). Daraus wird auf das Folgeelement (hier $A(n)$) geschlossen.

$$A(1) \wedge A(2) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : A(n-2) \wedge A(n-1) \implies A(n) \equiv \forall n \in \mathbb{N} : A(n) \tag{1.22}$$

Induktion Tiefe d

Theoretisch lässt sich die Induktion mit beliebiger Tiefe d ausführen. Das Verfahren ist immer analog zum den vorangegangenen, jedoch mit d Induktionsanfängen und d Induktionsvorraussetzungen.

$$A(1) \wedge A(2) \wedge \cdots \wedge A(d) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : A(n) \wedge A(n+1) \wedge \cdots \wedge A(d-1) \implies A(d) \equiv \forall n \in \mathbb{N} : A(d)$$

Allgemeine vollständige Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \equiv A(1) \wedge \forall n \in N : (A(1) \wedge \cdots \wedge A(n)) \implies A(n+1) \tag{1.23}$$

Vorsicht: Der Beweis im Induktionsschritt gelingt oft erst ab bestimmten n.

1.2.3. Grenzwerte: Konvergenz von Folgen

(1) Limesschreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \qquad\qquad a_n \to g \tag{1.24}$$

- *Limes* (Grenzwert) von a_n für n gegen ∞ ist gleich g
- Folgen (a_n) *konvergiert* für n gegen ∞ gegen g.

(2) Approximation einer Zahl $g \in \mathbb{R}$

(a) $x \in \mathbb{R}$ heißt ε-*Näherung* von g, falls $|x-g| < \varepsilon$ ist. Dabei ist $|x-g|$ der *absolute Fehler* der Näherung x bezüglich g.

(b)

$$|x-g| = \varepsilon \iff x-g = \pm\varepsilon \tag{1.25}$$
$$\iff x = g \pm \varepsilon \tag{1.26}$$
$$|x-g| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x-g < \varepsilon \tag{1.27}$$

$U_\varepsilon(g)$ ist die ε-*Umgebung* von g. Anders ausgedrückt: $[g-\varepsilon, g+\varepsilon]$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ bedeutet:

- Für große n wird der Fehler $f_n = |a_n - g|$ beliebig klein.
- Für jede Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ gilt:

$$a_n \in U_\varepsilon(g) \tag{1.28}$$

für *fast alle*[1] n, d. h. es gibt einen Index $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt: $a_n \in U_\varepsilon(g)$.

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_N}_{\text{keine Forderung}}, \underbrace{a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, a_{N+4}, \ldots}_{\substack{\text{alle aus } U_\varepsilon(g),\text{ d. h.} \\ \text{alle Folgenglieder} \\ \text{sind } \varepsilon\text{-Näherungen} \\ \text{von } g}} \tag{1.29}$$

(3) Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge, $g \in \mathbb{R}$

(a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \iff \forall\varepsilon \in \mathbb{R} \text{ mit } \varepsilon > 0: \tag{1.30}$$
$$\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \tag{1.31}$$
$$\forall n \in N: \tag{1.32}$$
$$n > N(\varepsilon) \implies |a_n - g| < \varepsilon \tag{1.33}$$

Satz 1.1. *Eine Folge (a_n) kann höchstens einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ haben.*

Beweis. (indirekt) Angenommen, es gäbe zwei Grenzwerte $g_1 \neq g_2$ aus $\mathbb{R}$ von der Folge (a_n).

$$\text{o. B. d. A. } g_2 > g_1 \tag{1.34}$$
$$\text{Man wähle } \varepsilon < \frac{1}{2}(g_2 - g_1) \tag{1.35}$$
$$\text{Damit ist } U_\varepsilon(g_1) \cap U_\varepsilon(g_2) = \varnothing \tag{1.36}$$

Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = g_1$ folgt: für fast alle n ist $a_n \in U_\varepsilon(g_1)$, also nur endlich viele Folgenglieder liegen nicht in $U_\varepsilon(g_1)$.

[1] d. h. für alle bis auf endlich viele Ausnahmen

Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = g_2$ folgt: für fast alle n ist $a_n \in U_\varepsilon(g_2)$.

Da $U_\varepsilon(g_1) \cap U_\varepsilon(g_2) = \varnothing$ ist, geht dies aber nicht. $\lightning$

Also ist die Annahme des indirekten Beweises falsch, womit der Satz bewiesen ist. $\square$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{Bmatrix} \infty \\ -\infty \end{Bmatrix} \iff \forall S \in \mathbb{R} : \exists N = N(S) \in N : \forall n \in \mathbb{N} :$$

$$n > N(S) \implies a_n \begin{Bmatrix} > s \\ < s \end{Bmatrix} \tag{1.37}$$

(4) Sprechweisen:

Die Folge (a_n) heißt *konvergent*, falls (a_n) einen endlichen Grenzwert $g \in \mathbb{R}$ hat und *divergent*, falls (a_n) keinen endlichen Grenzwert hat. Die Folge (a_n) heißt *bestimmt divergent*, falls $a_n \to \pm\infty$ und *unbestimmt divergent*, falls a_n keinen Grenzwert hat.

1.3. Nullfolgen sind Folgen mit dem Grenzwert 0 für $n \to \infty$.

(5) Beispiel:

$$a_n = 2 + \frac{\cos n}{n}, n \geq 1 \tag{1.38}$$

Behauptung:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2 \tag{1.39}$$

Beweis:

$$\text{z̃} : \forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \in \mathbb{N} : n > N(\varepsilon) \implies |a_n - 2| < \varepsilon \tag{1.40}$$

$$|a_n - 2| = \left|2 + \frac{\cos n}{n} - 2\right| \tag{1.41}$$

$$= \left|\frac{\cos n}{n}\right| \tag{1.42}$$

$$= \frac{|\cos n|}{n} \tag{1.43}$$

$$|a_n - 2| < \varepsilon \text{ lässt sich nicht nach } n \text{ auflösen} \tag{1.44}$$

$$f_n = |a_n - 2| \tag{1.45}$$

$$= \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n} \tag{1.46}$$

$$\implies \frac{1}{n} \leq \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n \tag{1.47}$$

$$n, \varepsilon > 0 \tag{1.48}$$

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil > \lceil x \rceil \tag{1.49}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \quad \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} (\text{ da } \lceil x \rceil \geq x) \tag{1.50}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{1.51}$$

$$\Longrightarrow |a_n - 2| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{1.52}$$

$$\Longrightarrow |a_n - 2| < \varepsilon \tag{1.53}$$

$\varepsilon = \frac{1}{10}, N(\varepsilon) = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil = 10$: ab dem elften Folgenglied ist der Fehler $< \frac{1}{10}$, also für $n \geq 11$.

$$f_n = |a_n - 2| < \frac{1}{10} \tag{1.54}$$

$\varepsilon = \frac{1}{100}, N(\varepsilon) = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil = 100$: ab dem 101-sten Folgenglied ist der Fehler $< \frac{1}{100}$, also für $n \geq 101$.

1.2.4. Grenzwertregeln

Es seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen über $\mathbb{R}$ und es seien $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

(G1) $a_n \to a,\ b_n = a_n \forall n \geq n_0 \implies b_n \to a$

(G2) Hat die Folge (a_n) den Grenzwert a, so hat jede Teilfolgen (b_n) von (a_n) den Grenzwert a. Solche Teilfolgen sind beispielsweise $b_n = a_{n+2}$ oder $b_n = a_{2n}$. Haben zwei Teilfolgen $(b_n), (c_n)$ der Folge (a_n) verschiedene Grenzwerte, so hat (a_n) keinen Grenzwert.

(G3) Grenzwertübergang: Besitzen die Folgen $(b_n), (c_n)$ einen Grenzwert, so gelten folgende Aussagen:

$$b_n \leq c_n \forall n \geq n_o \implies \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} c_n \tag{1.55}$$

sowie

$$b_n \leq a_n \leq c_n \forall n \geq n_0 \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g \implies \lim_{n\to\infty} a_n = g \tag{1.56}$$

(G4) Fehlerfolge:

$$a_n \to g \iff f_n = |a_n - g| \to 0 \qquad (g \in \mathbb{R}) \tag{1.57}$$

(G5) Nullfolge:

$$a_n \to 0, a_n > 0 \forall n \geq n_0 \implies \frac{1}{a_n} \to +\infty \tag{1.58}$$

$$a_n \to 0, a_n < 0 \forall n \geq n_0 \implies \frac{1}{a_n} \to -\infty \tag{1.59}$$

$$a_n \to \pm\infty \implies \frac{1}{a_n} \to 0 \tag{1.60}$$

(G6) Rechnen mit Grenzwerten:

Gilt $a_n \to a$, $b_n \to b$, so gelten die Aussagen aus Tabelle 1.1.

Es verbleiben folgende *unbestimmte Ausdrücke*, welche, sofern sie auftreten, einer näheren Betrachtung im Einzelfall bedürfen: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Tabelle 1.1.: Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

	$a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{R}$	$a = \infty$ $b \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$ $b = \infty$	$a = \infty$ $b = \infty$
$(a_n + b_n) \to$	$a + b$	∞	∞	∞
$(a_n - b_n) \to$	$a - b$	∞	$-\infty$	?
$(a_n \cdot b_n) \to$	$a \cdot b$	$\begin{cases} \infty & b > 0 \\ ? & b = 0 \\ -\infty & b < 0 \end{cases}$	analog	∞
$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$	$\frac{a}{b}$	$\begin{cases} \infty & b > 0 \\ -\infty & b < 0 \\ ? & b = 0 \end{cases}$	0	?
$a_n^{b_n} \to$	$a^b \; ((a,b) \neq (0,0))$	$\begin{cases} \infty & b > 0 \\ 0 & b < 0 \\ ? & b = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \infty & a > 1 \\ ? & a = 1 \\ 0 & a \in (0,1) \end{cases}$	∞

Beispiele zum Berechnen von Grenzwerten mit unbestimmten Ausdrücken:

(a)

$$a_n = \frac{1}{n} \to 0 \tag{1.61}$$

$$b_n = b \cdot n \to \infty \qquad b \in \mathbb{R}_{>0} \tag{1.62}$$

$$a_n \cdot b_n = b \to b \tag{1.63}$$

(b)

$$a_n = \frac{n+1}{2n+1} \to ? \qquad \text{Typ } \frac{\infty}{\infty} \tag{1.64}$$
$$= \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} \tag{1.65}$$
$$= \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \tag{1.66}$$
$$\to \frac{1+\frac{1}{\infty}}{2+\frac{1}{\infty}} \tag{1.67}$$
$$= \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2} \tag{1.68}$$

(c)

$$a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \tag{1.69}$$
$$\to 2^{\frac{1}{\infty}} = 2^0 = 1 \tag{1.70}$$

(d)

$$a_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \tag{1.71}$$
$$\to \infty^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0 \text{unbestimmt} \tag{1.72}$$

Behauptung:

$$a_n \to 1 \tag{1.73}$$

Beweis:

$$\text{Fehlerfolge } f_n = |a_n - 1| \tag{1.74}$$
$$= \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| \tag{1.75}$$
$$= \sqrt[n]{n} - 1 \tag{1.76}$$

Abschätzung:

$$(f_n + 1)^n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n \tag{1.77}$$
$$= n \tag{1.78}$$
$$n = (f_n + 1)^n \tag{1.79}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_n^k \cdot 1^{n-k} \tag{1.80}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f_n^k \binom{n}{k} \tag{1.81}$$
$$\geq \binom{n}{2} f_n^2 (\text{für } n \geq 2) \tag{1.82}$$

Also gilt für $n \geq 2$:

$$n \geq \binom{n}{2} f_n^2 \tag{1.83}$$
$$= \frac{n\,(n-1)}{2} f_n^2 \tag{1.84}$$
$$f_n^2 \leq \frac{2n}{n\,(n-1)} = \frac{2}{n-1} \tag{1.85}$$

Also gilt für f_n:

$$0 \leq f_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \qquad \text{(für } n \geq 2\text{)} \tag{1.86}$$

Da gilt:

$$0 \to 0 \tag{1.87}$$
$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0 \tag{1.88}$$

Folgt daraus:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \qquad \text{(siehe G3, G4)} \tag{1.89}$$

Also ist der Grenzwert der Folge tatsächlich 1.

(e)

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{1.90}$$
$$\to \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty \tag{1.91}$$
$$= (1+0)^\infty \tag{1.92}$$
$$= 1^\infty \qquad \text{unbestimmt} \tag{1.93}$$

(G7) Grenzwerte von Wurzeln:

Sei (a_n) Folge $a_n \geq 0 \forall n \geq 1 : \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = q$, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \tag{1.94}$$

1.2.5. Monotonie und Beschränktheit

Monotonie

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist *monoton wachsend*, falls gilt $\forall n \geq 1 : a_n \leq a_{n+1}$. Sie ist *monoton fallend*, falls gilt $\forall n \geq 1 : a_n \geq a_{n+1}$.

Beschränktheit

S heißt *obere Schranke* von $(a_n)_{n\geq 1}$, falls gilt $\forall n \geq 1 : a_n \leq S$. Sie heißt *untere Schranke*, falls gilt $\forall n \geq 1 : a_n \geq S$.

Eine Folge heißt:

- *nach oben beschränkt* genau dann, wenn es eine obere Schranke gibt.
- *nach unten beschränkt* genau dann, wenn es eine untere Schranke gibt.
- *beschränkt* genau dann, wenn es eine obere und einen untere Schranke gibt.

Beispiel:

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}, n \geq 1 \tag{1.95}$$

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \implies 1 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \forall n \geq 1 \tag{1.96}$$

$$S = 1 \text{ untere Schranke von } (a_n) \tag{1.97}$$

$$S = 2 \text{ obere Schranke von } (a_n) \tag{1.98}$$

(a_n) ist also beschränkt.

Konvergenzverhalten

(a) Ist (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist (a_n) konvergent.

(b) Ist (a_n) monoton wachsend und nicht nach oben beschränkt, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(c) Ist (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist (a_n) konvergent.

(d) Ist (a_n) monoton fallend und nicht nach unten beschränkt, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(e) Ist (a_n) konvergent, so ist (a_n) auch beschränkt.

1.2.6. Die Eulersche Zahl e

Man betrachte die Folgen (a_n) und (b_n) mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{1.99}$$

für $n \geq 1$.

(1) Zwei Ungleichungen:

  (a) Für $x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$ aus $\mathbb{R}$ gilt:

$$\underbrace{\sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_m}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}}_{\text{arithmetisches Mittel}} \tag{1.100}$$

(b) Für $x \geq 0$ aus $\mathbb{R}$ und $n \geq 1$ aus $\mathbb{N}$ gilt:

$$\sqrt[n+1]{x^n} \leq \frac{1+nx}{n+1} \tag{1.101}$$

(2) Behauptung: Folge (a_n) ist monoton wachsend.

Beweis. Wir benutzen (b) mit $x = 1 + \frac{1}{n}$:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{1+n+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \tag{1.102}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \tag{1.103}$$

□

(3) Behauptung: Folge (b_n) ist monoton fallend.

Beweis. ... □

(4) $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq a_n$, da $\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq 1$ ist.

(5) $b_1 = 4$ ist obere Schranke der folge (a_n). Also ist (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt. Somit ist (a_n) konvergent (hat einen endlichen Grenzwert).

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n := e \qquad \text{EULERsche Zahl} \tag{1.104}$$

Folgerung:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{1.105}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \tag{1.106}$$

$$\to e \cdot 1 = e \tag{1.107}$$

(6)

Satz 1.2. *Ist* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, *so ist* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Beispiel:

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^n \tag{1.108}$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 \tag{1.109}$$

$$\to e^2 \tag{1.110}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{(-n)}\right)^{(-2)} \tag{1.111}$$

$$\to e^{-2} \tag{1.112}$$

(7) Eine schnelle e-Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ mit:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \tag{1.113}$$

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)!} \geq s_n \tag{1.114}$$

Dann gilt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \tag{1.115}$$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq s_n \leq b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{1.116}$$

1.2.7. Die Landau-Notation

Anwendung

(a) Laufzeitanalyse $T(n)$ von Algorithmen; $T(n)$ ist die Anzahl der „Elementarschritte“ des Algorithmus im worst case bei Eingabe eines Beispiels der „Größe“ n.

$$T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

(b) Asymptotisches Verhalten von Folgen $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also Verhalten für $n \to \infty$.

Die Groß-O-Notation

Für eine Folge $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert man die Klasse

$$\mathcal{O}(f) := \left\{ g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \exists c > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |g(n)| \leq c \cdot |f(n)| \right\} \tag{1.117}$$

Das heißt, dass $g(n)$ nicht wesentlich schneller wächst als $f(n)$, ein Vielfaches von $f(n)$ also ab einem beliebigen n immer größer ist als $g(n)$.

Bemerkung. Statt $g \in \mathcal{O}(f)$ bzw. $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$ schreibt man üblicherweise $g = \mathcal{O}(f(n))$ und liest „$g(n)$ ist groß-O von $f(n)$."

Kriterien

(K1) Ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{g(n)}{f(n)} \in \mathbb{R}$, so ist $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$.

(K2) Ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{g(n)}{f(n)} = \pm\infty$, so ist $g(n) \neq \mathcal{O}(f(n))$.

Beispiel:

(a) $5n^3 - 7n^2 + 20 = \mathcal{O}\left(n^3\right)$, da

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{5n^3 - 7n^2 + 20}{n^3} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n^3\left(5 - \frac{7}{n} + \frac{20}{n^3}\right)}{n^3} \tag{1.118}$$
$$= \frac{5 - 0 + 0}{1} \tag{1.119}$$
$$= 5 \in \mathbb{R} \tag{1.120}$$

(b) $n^3 = \mathcal{O}\left(5n^3 - 7n^2 + 20\right)$, da $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{5n^3-7n^2+20} = \frac{1}{5}$.

(c) $n^3 = \mathcal{O}\left(n^4\right)$

(d) $n^4 \neq \mathcal{O}\left(n^3\right)$

(e)

$$g(n) = \mathcal{O}(1) \iff \exists c > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |g(n)| < c \cdot 1 = c \tag{1.121}$$
$$\iff \text{Folge } g(n)_{n\geq 1} \text{ ist beschränkt (nach oben und unten).} \tag{1.122}$$

(f)

$$g(n) = \mathcal{O}(n) \Leftrightarrow \exists c > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \ |g(n)| < c \cdot n \tag{1.123}$$
$$\Leftrightarrow \exists c > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \ -c \cdot n < g(n) < c \cdot n \tag{1.124}$$

Regeln

(R1)

$$\left.\begin{cases} g_1(n) &= \mathcal{O}(f_1(n)) \\ g_2(n) &= \mathcal{O}(f_2(n)) \end{cases}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} g_1(n) + g_2(n) &= \mathcal{O}(f_1(n) + f_2(n)) \\ g_2(n) + g_1(n) &= \mathcal{O}(f_2(n) + f_1(n)) \end{cases}$$

(R2) $c \cdot f(n) = \mathcal{O}(f(n)), c \in \mathbb{R}$

(R3) $h(n) = \mathcal{O}(g(n)) \wedge g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \implies h(n) = \mathcal{O}(f(n))$

(R4) $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \implies \mathcal{O}(g(n)) \subseteq \mathcal{O}(f(n))$

Bemerkung Ist $g(n) = (5n) + g_1(n) + (1-n)\, g_2(n)$ mit $g_1(n) = \mathcal{O}(1)$ und $g_2(n) = \mathcal{O}\left(n^2\right)$, so schreibt man kurz:

$$g(n) = 5n \cdot \mathcal{O}(1) + (1-n) \cdot \mathcal{O}\left(n^2\right)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
g(n) &= (5n)\ \mathcal{O}(1) + (1-n)\ \mathcal{O}\left(n^2\right) && (1.125)\\
&= \mathcal{O}(n)\ \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(n)\ \mathcal{O}\left(n^2\right) && (1.126)\\
&= \mathcal{O}(n+1) + \mathcal{O}\left(n \cdot n^2\right) && (1.127)\\
&= \mathcal{O}(n) + \mathcal{O}\left(n^3\right) && (1.128)\\
&= \mathcal{O}\left(n^3\right) + \mathcal{O}\left(n^3\right) && (1.129)\\
&= \mathcal{O}\left(n^3\right) && (1.130)
\end{aligned}$$

Vorsicht Ist $g(n) = \mathcal{O}(n)$, so ist $g(n) = \mathcal{O}\left(n^3\right)$, da $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}\left(n^3\right)$, da $n = \mathcal{O}\left(n^3\right)$. Es gilt aber nicht $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}\left(n^3\right)$, da $\mathcal{O}\left(n^3\right) \nsubseteq \mathcal{O}(n)$ ist, da $n^3 \notin \mathcal{O}(n)$ ist.

Tabelle 1.2.: Komplexitätsklassen und ihre Laufzeit

$g(n) =$	Laufzeit
$\mathcal{O}(1)$	konstant
$\mathcal{O}(\log n)$	logarithmisch
$\mathcal{O}(n)$	linear
$\mathcal{O}(n \cdot \log n)$	überlinear
$\mathcal{O}\left(n^2\right)$	quadratisch
$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{O}\left(n^k\right)$	polynomial (k fest, $k \geq 1$ aus $\mathbb{N}$)
$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{O}(2^n)$	exponentiell

$$\mathcal{O}(1) \subseteq \mathcal{O}(\log_a(n)) \subseteq \mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}\left(n^k\right) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{O}(a^n) \qquad (1.131)$$

Weitere Landau-Symbole $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

(a) $\Omega(f) = \{g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{O}(g)\}$

(b) $\Theta(f) = \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f)$

(c) $o(f) = \left\{ g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g(n)}{f(n)} = 0 \right\}$

(d) $g \sim f \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 1$

Kriterien

(K3) $g(n) = \Omega(f(n)) \iff f(n) = \mathcal{O}(g(n))$

(K4)

$$\begin{aligned} g(n) = \Theta(f(n)) &\iff g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \wedge g(n) = \Omega(f(n)) \\ &\iff g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \wedge f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \\ &\iff \exists c_1, c_2 > 0\ \exists n_0 \forall n \geq n_0 : c_1\,|f(n)| \leq |g(n)| \leq c_2\,|f(n)| \end{aligned}$$

(K5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g(n)}{f(n)} = g, g \neq 0$ aus $\mathbb{R} \implies g(n) = \Theta(f(n)) \wedge \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n))$

Beispiel: Ist $p(n)$ ein Polynom vom Grade $k \geq 0$, so gilt:

(a) $p(n) = \Theta\left(n^k\right)$

(b) $\mathcal{O}(p(n)) = \mathcal{O}\left(n^k\right)$

Beweis.

$$p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \tag{1.132}$$

$$\text{mit } a_k, a_{k-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R} \text{ und } a_k \neq 0 \tag{1.133}$$

$$\frac{p(n)}{n^k} = \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{n^k} \tag{1.134}$$

$$= a_k + a_{k+1} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + a_n \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \tag{1.135}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \cdots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right) \tag{1.136}$$

$$= a_k \neq 0 \tag{1.137}$$

Somit folgen (a) und (b) aus (K4). □

Regeln

(R5) $g(n) = o(f(n)) \implies g(n) = \mathcal{O}(f(n))$

(R6) $g(n) \sim f(n) \implies g(n) = \Theta(f(n))$

Stirlingsche Formel

(a) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{e}{n}\right)^{-n}$

(b) $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

1.3. Reihen

1.3.1. Einführung

Definitionen

1.4. Ist $(a_k) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ eine Folge, so heißt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k) = a_0 + a_1 + \dots + a_n \tag{1.138}$$

die *n-te Partialsumme* über (a_n). Die Folge (s_n) wird dann (unendliche) *Reihe* genannt.

Bemerkung.

(a) Die Summe kann auch bei $k = 1, 2, \dots$ anfangen

(b) Reihen sind spezielle Folgen, also ist alles über Folgen bekannte anwendbar.

Bezeichnungen

- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ — *Reihe* über a_k (= Partialsummenfolge) (s_n) mit $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k)$;
  a_k heißt *k-tes Glied* der Reihe.
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = s$ — $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$;
  s heißt *Summe* der Reihe oder *Reihenwert*
- Eine Reihe heißt *konvergent*, falls $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ ist, *bestimmt divergent*, falls $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ ist und *unbestimmt divergent*, falls der Grenzwert nicht existiert.

Beispiel:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ – Reihe ist konvergent.

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ – Reihe unbestimmt divergent, da für $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ gilt $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ und (s_n) keinen Grenzwert hat.

Die Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R} \tag{1.139}$$

(a) Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \tag{1.140}$$

$$= \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{für } x \neq 1 \\ n+1 & \text{für } x = 1 \end{cases} \tag{1.141}$$

Beweis. (für $x \neq 1$)

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right)(1 - x) = (1 + x + \cdots + x^n) - x(1 + x + \cdots + x^n) \tag{1.142}$$

$$= (1 + x + \cdots + x^n) - \left(x + x^2 + \cdots + x^{n+1}\right) \tag{1.143}$$

$$= 1 - x^{n+1} \tag{1.144}$$

□

(b) Summe

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{für } x \in (-1, 1) \\ \infty & \text{für } x \geq 1 \\ \text{Kein Grenzwert} & \text{für } x \leq -1 \end{cases} \tag{1.145}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1 \tag{1.146}$$

Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \tag{1.147}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \tag{1.148}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} \tag{1.149}$$

$$= 2 \tag{1.150}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right) = \left(1+\frac{1}{1}\right) + \left(1+\frac{1}{2}\right) + \dots \tag{1.151}$$

$$= \infty \tag{1.152}$$

Notwendiges Kriterium für die Konvergenz von Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \implies \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \tag{1.153}$$

Beweis. $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergiert gegen endlichen Grenzwert: $s_n \to s \in \mathbb{R}$, da Reihe konvergent ist.

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \tag{1.154}$$

$$\implies a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \tag{1.155}$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) \tag{1.156}$$

$$= \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0 \tag{1.157}$$

Wir benutzen die Tatsache, dass jede Teilfolge einer konvergenten Teilfolge denselben Grenzwert hat. □

Konvergenz von Reihen

Satz 1.3. *Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge und es sei $m \geq 0$. Dann gilt:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ konvergent} \iff \sum_{k=m}^{\infty} a_k \textit{ konvergent} \tag{1.158}$$

Für die Summen der Reihen (sofern die Reihen konvergent sind), gilt dann:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = d + \sum_{k=m}^{\infty} a_k \textit{ mit } d = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \tag{1.159}$$

Beweis.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad (n \geq 0) \tag{1.160}$$

$$\tilde{s}_n = \sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \quad (n \geq m) \tag{1.161}$$

$$d = a_0 + a_1 + \cdots + a_{m-1} \tag{1.162}$$

$$s_n = d + \tilde{s}_n \implies (s_n) \text{ konvergent} \tag{1.163}$$

$$\iff \left(\tilde{s}_n\right) \text{ konvergent} \tag{1.164}$$

Daraus folgt dann:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = d + \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n \tag{1.165}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} = d + \sum_{k=m}^{\infty} a_k \tag{1.166}$$

□

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \tag{1.167}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \tag{1.168}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots \tag{1.169}$$

1.3.2. Reihen mit nichtnegativen Gliedern

Konvergenzverhalten

Wir betrachten Reihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ mit } a_k \geq 0 \ \forall k \tag{1.170}$$

Dann gilt für $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \tag{1.171}$$

d. h.

(a) Die Reihe (Partialsummenfolge (s_n)) ist monoton wachsend.

(b) Ist die Reihe nach oben beschränkt, so ist sie konvergent, andernfalls ist sie bestimmt divergent gegen ∞.

Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \tag{1.172}$$

Diese Reihe ist bestimmt divergent gegen ∞.

Beweis.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{1.173}$$

Für $n \geq 2^m$ mit $m \geq 1$ gilt:

$$s_n \geq s_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m} \tag{1.174}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}\right) \tag{1.175}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^m}\right) \tag{1.176}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} \tag{1.177}$$

$$\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{\text{minimal}} \tag{1.178}$$

$$= 1 + \frac{m}{2} \tag{1.179}$$

$$s_n \geq 1 + \frac{m}{2} \text{ für } n \geq 2^m, \tag{1.180}$$

$$\text{also } \lim_{n\to\infty} s_n = \infty \tag{1.181}$$

$\square$

Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Beweis.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \tag{1.182}$$

$$k(k-1) \leq k^2 \tag{1.183}$$

$$\implies \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \qquad (k \geq 2) \tag{1.184}$$

$$s_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \tag{1.185}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \right) \tag{1.186}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) \tag{1.187}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \tag{1.188}$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{n} \tag{1.189}$$

$$\leq 2 - \frac{1}{n} \tag{1.190}$$

$$\leq 2 \tag{1.191}$$

(s_n) ist also nach oben beschränkt und damit ist die Reihe konvergent.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = s \leq 2 \tag{1.192}$$

□

Vergleichskriterium

Gegeben seien Folgen (a_k) und (b_k) mit $0 \leq a_k$, $0 \leq b_k \forall k$ und $a_k = \mathcal{O}(b_k)$:

(a) Majorantenkriterium:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \tag{1.193}$$

Dabei heißt $\sum b_k$ *konvergente Majorante* von $\sum a_k$.

(b) Minorantenkriterium:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \implies \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty \tag{1.194}$$

Beweis. Aus $0 \leq a_k, b_k\ \forall k$ und $a_k = \mathcal{O}(b_k)$ folgt:

$$\exists c > 0 \exists n_0 \forall k \geq n_0 : a_k \leq c \cdot b_k \tag{1.195}$$

(a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \tag{1.196}$$

$$\implies \sum_{k=0}^{n} b_k \leq s \text{ (nach oben beschränkt)} \tag{1.197}$$

$$\implies \sum_{k=0}^{\infty} b_k \leq s' \text{ mit } s' > 0 \text{ aus } \mathbb{R}\ \forall n \geq n_0 \tag{1.198}$$

$$\implies \sum_{k=n_0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} (c \cdot b_k) = c \sum_{k=n_0}^{n} b_k \leq c \cdot s' = s'' \tag{1.199}$$

Also ist die Partialsummenfolge der Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ nach oben beschränkt.

$$\implies \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \tag{1.200}$$

$$\implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent } \checkmark \tag{1.201}$$

(b) Der Beweis erfolgt indirekt.

$$\text{Angenommen: } \sum_{k=0}^{\infty} b_k \neq \infty \tag{1.202}$$

Dann folgt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent ist. Aus (a) folgt dann, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent ist. ↯

$$\implies \text{(b) gilt} \tag{1.203}$$

□

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{10}k^3 - 2k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = s \leq 2 \tag{1.204}$$

- Vermutung: Die Reihe ist konvergent.

- Wir benutzen die Vergleichsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\frac{1}{10}k^3 - 2k} && (1.205)\\
&= \frac{k^2}{k^2\left(\frac{1}{10}k - \frac{2}{k}\right)} && (1.206)\\
&= \frac{1}{\frac{1}{10}k^3 - \frac{2}{k}} && (1.207)\\
&\to \frac{1}{\infty - 0} && (1.208)\\
&= \frac{1}{\infty} && (1.209)\\
&= 0 && (1.210)\\
\implies a_k &= \mathcal{O}\left(b_k\right) && (1.211)
\end{aligned}$$

- Mithilfe des Majorantenkriteriums:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ ist konvergent.}$$

Also ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auch konvergent.

1.3.3. Cauchy-Kriterium

(1) Wir betrachten beliebige Reihen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} a_k &= \underbrace{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}_{n\text{-te Partialsumme}} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots}_{\text{Restreihe}} = s && (1.212)\\
s_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k && (1.213)\\
\text{Restreihe: } r_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k && (1.214)\\
s_n + r_n &= s && (1.215)\\
r_n &= s - s_n && (1.216)\\
\text{Absoluter Fehler: } f_n &= |s_n - s| && (1.217)\\
&= |s - s_n| && (1.218)\\
&= |r_n| && (1.219)
\end{aligned}$$

(2) Cauchy-Kiterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \lim_{n\to\infty} f_n = 0 \tag{1.220}$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} r_n = 0 \tag{1.221}$$

1.3.4. Alternierende Reihen

Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \overset{?}{=} s \tag{1.222}$$

Restreihe/Fehlerreihe:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \tag{1.223}$$

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{\geq 0} + \ldots \tag{1.224}$$

$$r_1 = \overbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}^{\leq 0} \overbrace{-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}^{\leq 0} - \frac{1}{6} + \ldots \tag{1.225}$$

$$\implies -\frac{1}{2} \leq r_1 \leq 0 \tag{1.226}$$

$$f_1 = |r_1| \leq \frac{1}{2} \tag{1.227}$$

$$0 \leq r_2 \leq \frac{1}{3} \tag{1.228}$$

$$f_2 = |r_2| \leq \frac{1}{3} \tag{1.229}$$

Allgemein gilt $0 \leq f_n \leq |r_n| \leq |a_{n+1}| = \frac{1}{n+1} \to 0$. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \tag{1.230}$$

und somit ist die Reihe konvergent. Für die Summe gilt:

$$f_n = |s_n - s| \tag{1.231}$$

$$= |r_n| \tag{1.232}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \tag{1.233}$$

Leibnizkriterium

Gegeben sei eine alternierende Reihe, d. h. eine Reihe mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ mit } a_k \cdot a_{k+1} < 0 \; \forall k \geq 0. \tag{1.234}$$

Ist $|a_k|$ eine monoton fallende Nullfolge (d. h. $|a_{n+1}| < |a_n| \; \forall k \wedge \lim_{k\to\infty} a_k = 0$), so ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s \tag{1.235}$$

konvergent.

Für den absoluten Fehler

$$f_n = |s_n - s| \tag{1.236}$$

$$\text{mit } s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ gilt dann} \tag{1.237}$$

$$0 \leq f_n \leq |a_{n+1}| \tag{1.238}$$

1.3.5. Konvergenzkriterien für beliebige Reihen

Betragskriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent} \tag{1.239}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \tag{1.240}$$

Beweis. Hilfsmittel: Dreiecksungleichung für Beträge:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: |x + y| \leq |x| + |y| \tag{1.241}$$

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}: |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \tag{1.242}$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ ist konvergent. Also gilt für die Restreihe R_n:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \tag{1.243}$$

$$R_n \to 0 \tag{1.244}$$

Wir betrachten die Fehlerreihe/Restreihe von $\sum a_k$, d. h.

$$\begin{aligned} f_n = |r_n| &= |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots| && (1.245)\\ &\leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} && (1.246)\\ &= R_n && (1.247)\end{aligned}$$

Also gilt $0 \leq f_n \leq R_n$. Aus $R_n \to 0$ folgt dann $f_n \to 0$. Somit folgt dann aus dem Cauchy-Kriterium, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent ist. □

1.5. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, fallst die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Bemerkung.

(a) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

(b) Für Reihen mit nichtnegativen Glieder ist die Reihe genau dann konvergent, wenn sie absolut konvergent ist.

Wurzel- bzw. Quotientenkriterium

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine beliebige Reihe. Falls der Grenzwert

$$q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \qquad \text{bzw.} \qquad q = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \tag{1.248}$$

existiert, so gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{, falls } q < 1\\ \text{divergent} & \text{, falls } q > 1\\ \text{keine Aussage} & \text{, falls } q = 1 \end{cases} \tag{1.249}$$

Beweis.

- Wurzelkriterium:

$$q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \tag{1.250}$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall k > N(\varepsilon) : \left| \sqrt[k]{|a_k|} - q \right| < \varepsilon, \tag{1.251}$$

$$\text{d. h. } q - \varepsilon < \sqrt[k]{|a_k|} < q + \varepsilon \tag{1.252}$$

– Fall $q < 1$:

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $g = q + \varepsilon < 1$ und $g \geq 0$. Also gilt für alle $k > N(\varepsilon)$:

$$\sqrt[k]{|a_k|} < g < 1 \tag{1.253}$$

und somit

$$|a_k| < g^k. \tag{1.254}$$

Somit ist $|a_k| = \mathcal{O}\left(g^k\right)$. Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} g^k = \frac{1}{1-g}$ ist konvergent, da $0 \leq g < 1$ ist. Aus dem Vergleichskriterium folgt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist. Also ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. ✓

– Fall $q > 1$:

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $q - \varepsilon > 1$. Also gilt für alle $k > N(\varepsilon)$: $\sqrt[k]{|a_k|} > q - \varepsilon$, also $|a_k| > 1$. Somit ist (a_k) keine Nullfolge. Also ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent. □

Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} \qquad a_k = \frac{k}{2^k} \forall k : a_k \geq 0 \tag{1.255}$$

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2\,(k+1)}{k \cdot 2^{k+1}} \tag{1.256}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k\left(1+\frac{1}{k}\right)}{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{k}\right) \tag{1.257}$$

$$= \frac{1}{2} < 1 \tag{1.258}$$

Also ist die Reihe konvergent.

1.3.6. Rechnen mit Reihen

(R1) Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = t$ konvergente Reihen, so gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k \tag{1.259}$$

$$= \alpha s + \beta t \tag{1.260}$$

Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{4^k} + \frac{3}{2^k} \right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tag{1.261}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \tag{1.262}$$

(R2) In einer konvergenten Reihe können beliebig Klammern gesetzt werden, ohne die Summe zu ändern.

Beispiel:

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \tag{1.263}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \tag{1.264}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \dots \tag{1.265}$$

(R3) Jede Umordnung (d. h. Vertauschung der Reihenfolge der Reihenglieder) einer absolut konvergenten reihe ist absolut konvergent und hat dieselbe Summe.

Bemerkung. Die Aussage ist falsch für Reihen, die konvergent, aber nicht absolut konvergent sind.

(R4) Produktreihe:

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = t$ absolut konvergente Reihen, so ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k = st \tag{1.266}$$

ebenfalls absolut konvergent.

Das Cauchyprodukt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tag{1.267}$$

$$\text{mit } c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0 \tag{1.268}$$

$$= \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \tag{1.269}$$

Tabelle 1.3.: Multiplikation der Reihenglieder im Cauchyprodukt

$\cdot$	b_0	$+$	b_1	$+$	b_2	$+$	$\cdots$
a_0	$a_0\,b_0$		$a_0\,b_1$		$a_0\,b_2$		$\cdots$
$+$							
a_1	$a_1\,b_0$		$a_1\,b_1$		$a_1\,b_2$		$\cdots$
$+$							
a_2	$a_2\,b_0$		$a_2\,b_1$		$a_2\,b_2$		$\cdots$
$+$							
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\ddots$

Beispiel:

$$a_k = b_k = x^k \text{ mit } -1 < x < 1 \tag{1.270}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \tag{1.271}$$

Die Reihen sind absolut konvergent.

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) \tag{1.272}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}\right) \tag{1.273}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k} x^l x^{k-l}\right) \tag{1.274}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k} (k+1)\,x^k\right), \tag{1.275}$$

$$\text{also } c_k = (k+1)\,x^k \tag{1.276}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x} \tag{1.277}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} \tag{1.278}$$

$$= \frac{1}{1-2x+x^2} \tag{1.279}$$

1.3.7. Zusammenfassung

Schritte zur Untersuchung der Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$:

(1) Ist $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, so ist die Reihe nicht konvergent.

(2) Prüfung auf Konvergenz mittels Wurzel- bzw. Quotientenkriterium

(3) Ist $q = 1$ beim Wurzel- bzw. Quotientenkriterium, fahre fort mit
   - Vergleichskriterium (Reihen mit nichtnegativen Gliedern)
   - Cauchy-Kriterium
   - Leibniz-Kriterium (alternierende Reihen)
   - Betragskriterium

1.4. Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1.4.1. Grenzwerte

1.6. Der Grenzwert einer Funktion an der Stelle x_0 ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ genau dann, wenn für alle Folgen (a_n) mit $a_n \neq x_0$ aus D und $a_n \to x_0$ gilt:

$$f(a_n) \to a \tag{1.280}$$

Bemerkung. f muss nicht notwendigerweise in x_0 definiert sein, wohl aber in einer Umgebung von x_0, d. h. in einem offenen Intervall um x_0 ohne x_0 selbst (also $I = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$).

1.7. $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$ genau dann, wenn für alle Folgen (a_n) mit $\forall n : a_n < x_0$ gilt: $f(a_n) \to a$.

1.8. $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$ genau dann, wenn für alle Folgen (a_n) mit $\forall n : a_n > x_0$ gilt: $f(a_n) \to a$.

Linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte beschreiben also jeweils eine Annäherung von verschiedenen „Seiten“ auf der Abszissenachse und können durchaus verschiedenartige Grenzwerte für eine Stelle aufweisen (z. B. an Polstellen).

Bemerkung.

- $\lim\limits_{x \to x_0(\pm 0)} f(x) = \pm\infty$ wird als sog. „*uneigentlicher Grenzwert*“ bezeichnet.
- Der Grenzwert einer Funktion an einer Stelle existiert, wenn sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert an dieser Stelle existieren und gleich sind.

Beispiel: Angenommen, $f(x) = \frac{x}{|x|}$ besitzt in $x_0 = 0$ einen Grenzwert, also $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x}{|x|} = a$.

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = 1 \tag{1.281}$$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = -1 \tag{1.282}$$

Also müssten sowohl 1 also auch -1 in einer beliebig kleinen Umgebung von a liegen, was nicht möglich ist. Also existiert dieser Grenzwert nicht.

Grenzwerte für $x \to \pm\infty$. Der Grenzwert einer Funktion für $x \to \pm\infty$ ist $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$ genau dann, wenn für alle Folgen (a_n) mit $a_n \to \pm\infty$ gilt

$$f(a_n) \to a. \tag{1.283}$$

1.4.2. Grenzwertregeln

Es gelten die in Tabelle 1.4 aufgestellten Grenzwertregeln.

Tabelle 1.4.: Grenzwertregeln für Funktion $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ und $\lim_{x\to\infty} g(x) = b$.

$() \to$	$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$	$a = \infty$, $b \in \mathbb{R}$	$a = \infty$, $b = \infty$
$f + g$	$a + b$	∞	∞	∞
$f - g$	$a - b$	$-\infty$	∞	$?$
$f \cdot g$	$a \cdot b$	$\begin{cases} \infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \\ ? & a = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \infty & b > 0 \\ -\infty & b < 0 \\ ? & b = 0 \end{cases}$	∞
$\frac{f}{g}$	$\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$	0	$\begin{cases} \infty & b > 0 \\ -\infty & b < 0 \\ ? & b = 0 \end{cases}$	$?$
f^g $(a > 0)$	a^b $((a, b) \neq (0, 0))$	$\begin{cases} \infty & a > 1 \\ 0 & a < 1 \\ ? & a = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \infty & b > 0 \\ 0 & b < 0 \\ ? & b = 0 \end{cases}$	∞

Bemerkung. Analog dazu kann man für $x \to x_0 \pm 0$ und für $x_0 = \pm\infty$ eine Tabelle aufstellen.

Es verbleiben zudem folgende *unbestimmte Ausdrücke* übrig: $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

1.4.3. Stetigkeit

(a)

1.9. Eine Funktion $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist *stetig* an der Stelle x_0, falls gilt:

(1) f ist in einer Umgebung von x_0 definiert

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

(b) f ist *linksseitig stetig* (bzw. *rechtsseitig stetig*), falls

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0) \tag{1.284}$$

$$\text{bzw.} \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \tag{1.285}$$

(c) f ist stetig auf dem Intervall $I = [a, b)$, falls gilt:

(1) $I \subseteq D$ (d. h. f ist auf I definiert)

(2) f ist stetig für alle $x \in (a, b)$

(3) f ist rechtsseitig stetig in $x_0 = a$

Analog lässt sich diese Definition auch auf die Intervalle $[a, b]$, $(a, b]$, etc. anwenden.

1.4.4. Hauptsatz über stetige Funktionen

(1) Folgende elementare Funktionen sind stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, sofern sie in einer Umgebung von x_0 definiert sind:
- $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{Z})$
- $f(x) = \sqrt[m]{x} \quad (m \geq 2)$
- $f(x) = c \quad (c \in \mathbb{R}$ konst.$)$
- $f(x) = \sin x,\ f(x) = \cos x$
- $f(x) = e^x,\ f(x) = \ln x$

(2) Sind g und h stetige Funktionen in x_0, so ist f stetig in x_0 für
- $f(x) = g(x) \pm h(x)$
- $f(x) = g(x) \cdot h(x)$
- $f(x) = c \cdot g(x)$
- $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, sofern $h(x_0) \neq 0$

(3) Ist h stetig in x_0 und g stetig in $x_1 = h(x_0)$, so ist f mit $f(x) = g(h(x))$ stetig in x_0.

Bemerkung. $f = g \circ h$, $f(x) = g(h(x))$ ist die sogenannte *Verkettung* von g nach h. g ist die äußere Funktion, h die innere Funktion.

Beispiel 1

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{1.286}$$

- Innere Funktion: $h(x) = \frac{1}{x}$ stetig für alle $x \neq 0$
- Äußere Funktion: $g(x) = e^{h(x)}$

Also ist $f(x)$ stetig für alle $x \neq 0$.

Beispiel 2

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{1.287}$$

- $\lim_{x \to 2} f(x) = a$ sofern für alle Folgen (a_n) mit $a_n \neq 2$ und $a_n \to 2$ gilt: $f(a_n) \to a$.
  $a_n = \underbrace{2 + \frac{1}{n}}_{\in \mathbb{Q}} \to 2 : f(a_n) = a_n \to 2$
  $a_n = \underbrace{2 + \frac{e}{n}}_{\notin \mathbb{Q}} \to 2 : f(a_n) = 0 \to 0$
  Also existiert $\lim_{x \to 2} f(x)$ nicht, also ist f nicht stetig in $x = 2$.
- $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, da für alle Folgen (a_n) mit $a_n \to 0$ gilt:
  $$f(a_n) \to 0 \tag{1.288}$$
  Also ist f stetig in $x = 0$.
- Die Funktion f ist nur stetig in $x = 0$.

1.5. Ableitung und Differenzierbarkeit

1.5.1. Ableitungen

(1) Gegeben: $f \colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(2) Motivation:
- Geradlinige Bewegung der Zeit $t \mapsto$ Ort $f(t)$
- Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0
- Weg: $f(t_0 + h) - f(t_0)$

- Zeit: h
- Geschwindigkeit:

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} \overset{h\to 0}{\to} v_0 \tag{1.289}$$

(3)

1.10. Die *Ableitung* von f an der Stelle x_0 ist

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \tag{1.290}$$

sofern dieser Grenzwert existiert und endlich ist. Die Funktion f heißt dann *differenzierbar* in $x = x_0$.

(4) Geometrische Interpretation[2]:

- $\Delta y := \Delta f(x_0, h) = f(x_0+h) - f(x_0)$ — Funktionswertdifferenz
- $\Delta x := (x_0+h) - x_0 = h$ — Argumentendifferenz
- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — *Differenzenquotient*. Anstieg der Geraden durch die Punkte

$$(x_0, f(x_0)), (x_0+h, f(x_0+h))$$

- $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ — *Anstieg* der Funktion im Punkt $x = x_0$
- Gerade $y = T_1(x)$ durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit Anstieg $m = f'(x_0)$

$$T_1(x) = y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0) \tag{1.291}$$

- Gerade $y = T_1(x)$ wird *Tangente* von f an der Stelle x_0 genannt.

(5)

1.11. f heißt *differenzierbar* auf einem Intervall $I \subseteq D$, falls $f'(x)$ für alle $x \in I$ existiert. Die Funktion

$$x \in I \mapsto f'(x) \in \mathbb{R} \tag{1.292}$$

heißt dann *Ableitung* bzw. *1. Ableitung* von f auf I.

Bemerkung. Ist $I = [a, b]$, so muss in $x = a$ bei $f(x)$ nur der rechtsseitige Grenzwert existieren und bei $x = b$ nur der linksseitige.

[2]siehe dazu Abbildung 1.6

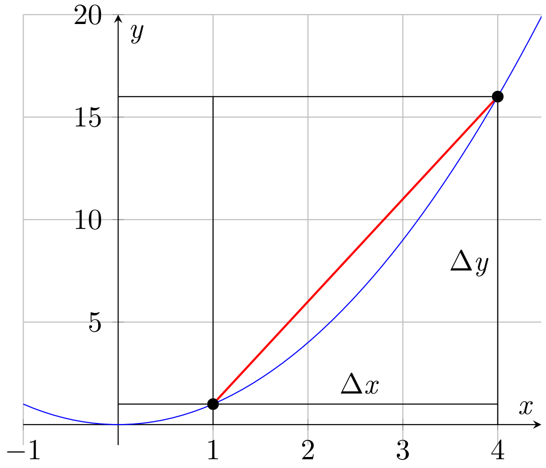

Abbildung 1.6.: Gerade durch zwei Punkte auf einem Graphen

Bezeichnungen:

- Ableitung von f: f', $\dot{f}$, $D(f)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$
- Ableitung an der Stelle x: $f'(x)$, $\dot{f}(x)$, $D(f)(x)$, $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_x$
- $\mathrm{d}f$: *Differential* von f,
  $\mathrm{d}x$: Differential von x

Bemerkung.

- $T_1(x_0) = f(x_0)$
- Der Anstieg der Geraden $y = T_1(x)$ ist $m = f'(x_0)$

Beispiel 1

$$f(x) = \sin x \qquad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad I = \mathbb{R} \tag{1.293}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.294}$$

$$= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \tag{1.295}$$

Mittels des Additionstheorems:

$$= \frac{2\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} \tag{1.296}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \tag{1.297}$$

$$\overset{h\to 0}{\to} 1 \cdot \cos x \tag{1.298}$$

$$= \cos x \tag{1.299}$$

$$= f'(x) \tag{1.300}$$

f ist also differenzierbar auf $I = \mathbb{R}$; die Ableitung f' ist die Kosinusfunktion, d. h. $f'(x) = \cos x \forall x \in I$.

Beispiel 2

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1.301}$$

- f ist nur stetig in $x = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$
- $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \frac{0}{0}$ existiert nicht

Also ist f nirgends differenzierbar.

1.5.2. Ableitungsregeln

Ableitung elemenatarer Funktionen

- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (n rational)
- $(c)' = 0$ (c Konstante)
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(e^x)' = e^x$

Arithmetische Operationen

Sind $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar, so gilt

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \tag{1.302}$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{1.303}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \qquad (g(x) \neq 0) \tag{1.304}$$

Kettenregel

Ist $g : D_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und $f : D_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\tilde{x} = g(x)$ differenzierbar, so gilt:

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{1.305}$$

Beweis. (Produktregel)

$$\begin{aligned} y &= f(x) \cdot g(x) && (1.306)\\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} && (1.307)\\ &= \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) && (1.308)\\ &\overset{h \to 0}{\to} f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) && (1.309)\\ &\implies (f(x) \cdot g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) + g'(x) && (1.310) \end{aligned}$$

□

Satz 1.4. *Ist $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, so ist f stetig in x_0.*

Beweis.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right) h + f(x_0) && (1.311)\\ &\overset{h \to 0}{\to} f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) && (1.312)\\ &= f(x_0) && (1.313)\\ \implies \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) && (1.314)\\ &= f(x_0)\,, && (1.315)\\ &\text{also } f \text{ stetig in } x_0 \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Die Umkehrung gilt nicht, d. h. eine Funktion f, die stetig in x_0 ist, muss in x_0 nicht unbedingt differenzierbar sein.

Beispiele [...]

1.5.3. Umkehrfunktionen

Gegeben:

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad I \subseteq \mathbb{R},\ \text{Intervall } I \subseteq D \tag{1.316}$$

1.12. f heißt *injektiv* auf I, falls

$$\forall x, x' \in I : x \neq x' \implies f(x) \neq f\big(x'\big) \tag{1.317}$$

bzw.

$$\forall x, x' \in I : f(x) = f\big(x'\big) \implies x = x' \tag{1.318}$$

Satz 1.5. *Ist $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv auf I und $I' = f(I)$ das Bild von I bezüglich f, so gibt es eine Funktion $g : I' \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$y = f(x) \iff g(y) = x \qquad \forall x \in I, y \in I'. \tag{1.319}$$

Man nennt dann g die *Umkehrfunktion* von f kurz, $g = f^{-1}$.
Es gilt dann

$$g(f(x)) = x \qquad \forall x \in I \tag{1.320}$$

$$f(g(x)) = x \qquad \forall x \in I' \tag{1.321}$$

Für die Ableitung von $g = f^{-1}$ gilt dann

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad \forall x \in I' \tag{1.322}$$

sofern $f'(x)$ für alle $x \in I$ existiert.

Beweis. (Ableitung)

$$f(g(x)) = x \implies 1 = (x)' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{1.323}$$

$$\implies g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \tag{1.324}$$

□

Beispiele [...]

1.5.4. Höhere Ableitungen

- f ist differenzierbar auf $I \subseteq \mathbb{R} \implies \exists$ Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$
- f ist differenzierbar auf $I \implies \exists$ Ableitung $(f')' : I \to \mathbb{R}$; $f'' := (f')'$ 2. Ableitung von f
- n-te Ableitung von f: $f^{(n)}$

$$f^{(0)}(x) := f(x) \tag{1.325}$$

$$f^{(1)}(x) := f'(x) \tag{1.326}$$

$$f^{(n+1)}(x) := (f^{(n)}(x))' \tag{1.327}$$

- Differentialschreibweise

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \tag{1.328}$$

$$f'' = \frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}f)}{\mathrm{d}x\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \tag{1.329}$$

$$f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} \tag{1.330}$$

Beispiel

$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2, & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{1.331}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } x \geq 0 \\ -2x, & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad f'(0) = 0 \tag{1.332}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & \text{für } x > 0 \\ -2, & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad f''(0) \text{ existiert nicht.} \tag{1.333}$$

$$f'''(x) = 0 \ \forall x \neq 0, \ f'''(0) \text{ existiert nicht} \tag{1.334}$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \ \forall x \neq 0 \ \forall n \geq 3 \tag{1.335}$$

1.6. Anwendung der Differentialrechnung

1.6.1. Grenzwertregeln von l'Hospital

Sei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ bzw. $\pm\infty$. Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{1.336}$$

sofern der zweite Grenzwert existiert. Diese Regel ist analog anwendbar für $x \to x_0 \pm 0$ sowie für $x \to \pm\infty$.

Beispiel:

- $$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0+0} (x \ln x) && (1.337)\\ &= \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} && (1.338)\\ &= \lim_{x\to 0+0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} && (1.339)\\ &= \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} && (1.340)\\ &= \lim_{x\to 0+0} \frac{x^2}{-x} && (1.341)\\ &= \lim_{x\to 0+0} -\frac{x}{1} && (1.342)\\ &= 0 && (1.343)\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0+0} x^x \qquad ((0^0),\ a^b = e^{\ln a^b} = e^{b\cdot lna}) && (1.344)\\ x^x &= e^{x\cdot \ln x} \qquad (e^{(\cdot)} \text{ ist stetige Funktion.}) && (1.345)\\ &= \lim_{x\to 0+0} e^{x\cdot \ln x} && (1.346)\\ &= e^{\lim_{x\to 0+0} x\cdot \ln x} && (1.347)\\ &= e^0 = 1 && (1.348)\end{aligned}$$

1.6.2. Zwei Hauptsätze

Zwischenwertsatz

Ist f stetig auf dem Intervall $I = [a, b]$ und gilt

$$f(a) < c < f(b) \;\text{ bzw. }\; f(b) < c < f(a)\,, \tag{1.349}$$

so hat die Gleichung

$$f(x) = c \tag{1.350}$$

eine Lösung $x \in (a, b)$.

Beispiel: [...]

Mittelwertsatz

Ist f stetig auf Intervall $I = [a, b]$ und differenzierbar auf (a, b), so gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit:

$$\underbrace{f'(x_0)}_{\text{Anstieg der Tangente an Kurve } y=f(x) \text{ in } x_0} = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{Anstieg der Geraden durch Punkte } (a,f(a)),(b,f(b))} \tag{1.351}$$

1.6.3. Monotonieverhalten

Vorraussetzung: f sei stetig auf $I = [a, b]$ und differenzierbar auf (a, b).
Aus dem Mittelwertsatz folg: Sind $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$, so ist

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0) \tag{1.352}$$

für ein x_0 mit $x_1 < x_0 < x_2$.

Fall 1:

$$f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b). \tag{1.353}$$

Dann folgt aus Gleichung 1.352:

$$\forall x_1, x_2 \in I : f(x_1) = f(x_2), \tag{1.354}$$

d. h. $f(x) = \text{const.} \ \forall x \in I$

Fall 2:

$$f'(x) > 0 \ \forall x \in (a, b). \tag{1.355}$$

Dann folgt aus Gleichung 1.352:

$$\forall x_1, x_2 \in I : (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)) \,, \tag{1.356}$$

d. h. f ist streng monoton wachsend.

Fall 3:

$$f'(x) < 0 \ \forall x \in (a, b). \tag{1.357}$$

Dann folgt aus (s.o.):

$$\forall x_1, x_2 \in I : (x_1 < x_2 \implies f(x_2) < f(x_1)) \,, \tag{1.358}$$

d. h. f ist streng monoton fallend.

Injektivitätstest Sei f stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f \text{ injektiv auf } I \Leftrightarrow f \text{ ist streng monoton wachsend} \tag{1.359}$$
$$\text{oder streng monoton fallend auf } I \tag{1.360}$$

1.6.4. Extremwerte für Funktionen $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(1) **Maximum/Supremum bzw. Minimum/Infimum**
Gegeben: $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \varnothing,\ s \in \mathbb{R}$
Definition 1

(a) **1.13.** s heißt **obere Schranke** von A, falls gilt: $\forall x \in A : x \leq s$

1.14. s heißt **Supremum** von A (in Zeichen: $\sup A = s$), falls s die kleinste obere Schranke von A ist, d.h. falls gilt:

(b) (b1) $\forall x \in A : x \leq s$

(b2) $\forall s' < s : \exists x \in A : x > s'$

Bemerkung Besitzt A keine obere Schranke, so schreibt man $\sup A = +\infty$

1.15. s heißt **Maximum** von A ($\max A = s$), falls s größtes Element in A ist, d.h. falls gilt:

(c)
(c1) $s \in A$

(c2) $\forall x \in A : x \leq s$

Regeln $\forall A \subseteq \mathbb{R}\ A \neq \varnothing$ gilt:

(R1) $\sup A$ existiert und ist eindeutig bestimmt.

(R2) $\sup A < \infty \Leftrightarrow A$ ist nach oben beschränkt,
d.h. A hat obere Schranke $s \in \mathbb{R}$.

(R3) $\sup A = s, s \in A \Leftrightarrow \max A = s$

Beispiel

- $\sup[0,1) = 1,\ \max[0,1)$ existiert nicht, da $1 \notin [0,1)$
- $\sup[0,1] = \max[0,1] = 1$

Definition 2

(a) s heißt *untere Schranke* von A, falls gilt:
$\forall x \in A : x \geq s$.

(b) s heißt *Infimum* von A (in Zeichen : $\inf A = s$), falls s die größte untere Schranke von A ist, d.h. falls gilt:

(b1) $\forall x \in A : x \geq s$

(b2) $\forall s' > s \ \exists x \in A : x < s'$

Bemerkung Besitzt A keine untere Schranke, so schreibt man:
$\inf A = \infty$

(c) s heißt *Minimum* von A (in Zeichen $\min A = s$), falls s kleinstes Element in A ist, d.h. falls gilt:

(c1) $s \in A$

(c2) $\forall x \in A : x \geq s$

Beispiel

- $\inf(0,1] = 0$, $\min(0,1]$ existiert nicht
- $\inf[0,1] = 0$, $\min[0,1] = 0$
- $\inf\{-1,-2,-3,\ldots\} = -\infty$, $\min\{-1,-2,-3,\ldots\}$ existiert nicht

(2) **Globale und lokale Extremwerte von $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**
Gegeben

- $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $I \subseteq D$ Menge (oft ein Intervall)

Globale Extremwerte von f auf I suchen:

$$\max\{f(x)|x \in I\} \text{ bzw } \min\{f(x)|x \in I\} \tag{1.361}$$

Ist $x = a$ aus I und gilt:

$$f(a) = \max\{f(x)|x \in I\} \text{ bzw } f(a) = \min\{f(x)|x \in I\} \tag{1.362}$$

So heißt

- $x = a$: *globale Maximalstelle* bzw *globale Minimalstelle* von f auf I.
- $f(a)$: *globales Maximum* bzw *globales Minimum* von f auf I.

Bezeichnung

- $\max\{f(x) | x \in I\}$
- $\max_{x \in I} f(x)$

analog für min/sup/inf.

Bemerkung $m = \max_{x \in I} f(x) \Leftrightarrow \forall x \in I : f(x) \leq m$ und $\exists x_0 \in I : f(x_0) = m$

Beispiel [...]

Lokale Extremwerte von f Man nennt $x = a$ eine *lokale Maximumstelle* bzw. *lokale Minimumstelle* von f, falls es ein offenes Intervall $I_0 \subseteq D$ gibt mit $a \in I_0$ und

$$f(a) = \max_{x \in I_0} f(x) \text{ bzw } f(a) = \min_{x \in I_0} f(x) \tag{1.363}$$

Dann heißt $f(a)$ *lokales Maximum* bzw *lokales Minimum* von f.

Beispiel [...]

Satz 1.6 (Weierstrass)**.** *Ist $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und ist f stetig auf I, so gilt:*

(a) $A = \{f(x) | x \in I\}$ *ist ein abgeschlossenes Intervall*

(b) $\max_{x \in I} f(x)$ *und* $\min_{x \in I} f(x)$ *existieren.*

(c) Ist $x_0 \in I$ und $f(x_0) = \max_{x \in I} f(x)$ bzw $f(x_0) = \min_{x \in I} f(x)$, so ist $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ oder $x_0 \in (a, b)$ und $f(x_0)$ ist lokales Maximum bzw lokales Minimum von f.

(3) Notwendige Bedingung für lokale Extremwerte

Voraussetzung f ist in x_0 differenzierbar.
Behauptung

$$f(x_0) \text{ ist lokale Maximalstelle / lokale Minimalstelle} \tag{1.364}$$

$$\Longrightarrow f'(x_0) = 0 \tag{1.365}$$

Beweis. (für lokale Maximalstelle)
Dann gibt es ein offenes Intervall $I_0 \subseteq D, x_0 \in I_0$ und $f(x_0) = \max_{x\in I_0} f(x)$

$$\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0 \text{ für } x_0 + h \in I_0 \tag{1.366}$$

$$\frac{\Delta f(x_0 + h)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \geq 0, \text{ für } h < 0 \\ \leq 0, \text{ für } h > 0 \end{cases} \tag{1.367}$$

$$\implies f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x_0, h)}{h} = 0 \tag{1.368}$$

□

Folgerung aus dem Satz von Weierstrass Sei f stetig auf $I = [a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Sei

$$B = \{f(a), f(b)\} \cup \{f(x) | x \in (a, b), f'(x) = 0\} \tag{1.369}$$

Dann gilt:

$$\max_{x\in I} f(x) = \max B \tag{1.370}$$

$$\min_{x\in I} f(x) = \min B \tag{1.371}$$

Bezeichnung:
Ist $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 *stationärer Punkt* bzw *extremwertverdächtige Stelle* von f.

(4) **Hinreichende Bedingung für lokale Extremwerte**
$f(x_0)$ ist lokales Maximum bzw lokales Minimum von f, falls eine der folgenden Bedingungen (Typ I oder Typ II) erfüllt ist.

Typ I

(1) $f'(x_0) = 0$

(2) $\exists \varepsilon > 0$ derart, dass gilt:

$$f'(x) \begin{cases} > 0 \text{ für } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ < 0 \text{ für } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{cases} \quad \text{bzw } f'(x) = \begin{cases} < 0 \text{ für } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ > 0 \text{ für } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{cases}$$

Typ II

(1) $f'(x) = 0$

(2) $\underbrace{f''(x_0) < 0}_{\text{lokales Maximum}}$ bzw $\underbrace{f''(x_0) > 0}_{\text{lokales Minimum}}$

Dabei muss f'' in einer Umgebung von x_0 existieren.

Beweisidee für $f''(x_0) < 0$.
Dann gibt es ein Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ und $f''(x) < 0$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_o + \varepsilon)$.
Dann ist f' streng monoton fallend auf $I_0 = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Da $f'(x_0) = 0$ ist, folgt daraus:
$f'(x) > f'(x_0) = 0$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'(x_0) = 0 > f'(x)$ für $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$.
Also ist f streng monoton wachsend auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ und streng monoton fallend auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$.

1.6.5. Krümmung, Wendepunkte

$$x \in (x_1, x_2) \Leftrightarrow x = x_1 + \alpha(x_2 - x_1) \text{ mit } \alpha \in (0, 1) \tag{1.372}$$

Definitionen

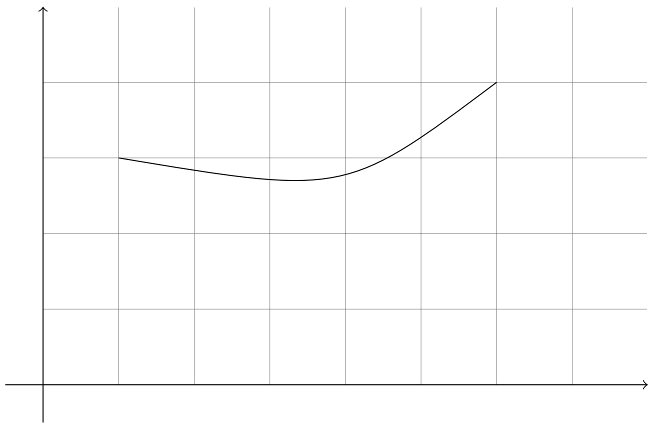

Abbildung 1.7.: Konvex

1.16. Die Funktion f heißt *streng konvex* auf dem Intervall I, falls

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x_2 \text{ und } \forall \alpha \in (0, 1)$$

gilt:

$$f(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) < f(x_1) + \alpha\,(f(x_2) - f(x_1))$$

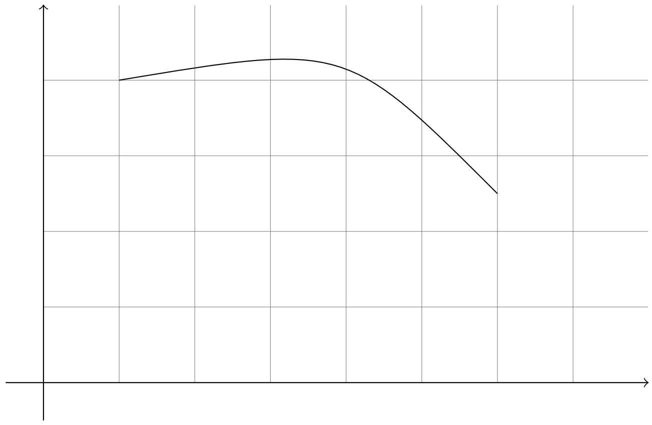

Abbildung 1.8.: Konkav

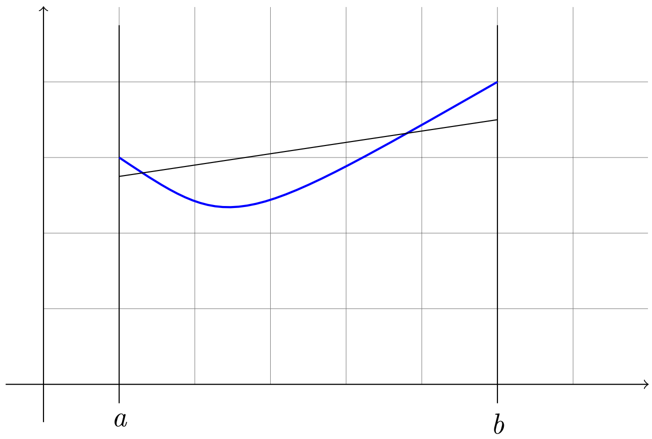

Abbildung 1.9.: ?

1.17. Die Funktion f heißt *streng konkav* auf dem Intervall I, falls

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x_2 \text{ und } \forall \alpha \in (0,1)$$

gilt:

$$f(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) > f(x_1) + \alpha\left(f(x_2) - f(x_1)\right)$$

Kriterien:

Sei f stetig auf $I = [a; b]$ und 2-mal differenzierbar auf (a, b). Dann gilt:

(a) f streng konvex (bzw. streng konkav) auf $I \iff f'$ ist streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) auf I

(b) $f''(x) > 0 \forall x \in (a, b) \implies f$ streng konvex auf I

(c) $f''(x) < 0 \forall x \in (a, b) \implies f$ streng konkav auf I

Beispiel:

$$f(x) = x^3 \quad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1.373}$$

$$f'(x) = 3x^2 \tag{1.374}$$

$$f''(x) = 6x \tag{1.375}$$

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 & , \text{für } x > 0 \\ < 0 & , \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{1.376}$$

$$\implies f \text{ ist streng } \begin{Bmatrix} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{Bmatrix} \text{ auf } \begin{cases} I = [0, \infty) \\ I' = (-\infty, 0] \end{cases} \tag{1.377}$$

Satz

Satz 1.7. *Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und sei f stetig auf I. Ist f streng konvex auf I, so gilt*

$$\max_{x \in I} f(x) = \max\{f(a), f(b)\} \tag{1.378}$$

Ist f streng konkav auf I, so gilt

$$\min_{x \in I} f(x) = \min\{f(x), f(b)\} \tag{1.379}$$

Beispiel:

- $f(x) = e^x - \ln x + x, I = [1, 2]$
- f ist stetig auf I

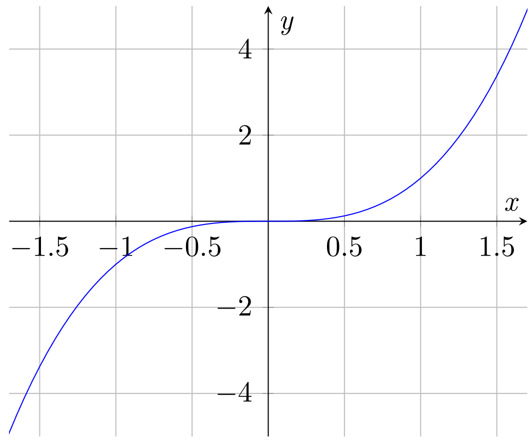

Abbildung 1.10.: $f(x) = x^3$

- $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} - 1$
- $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 \forall x \in (1,2) \implies f$ konvex auf $I = [1,2]$
- Somit gilt

$$\max_{x \in I} f(x) = \max \left\{ f(1) = e + 1, f(2) = e^2 + 2\ln 2 \right\} = f(2)$$

- $f''(x) > 0 \forall x \in (1,2) \implies f'$ streng monoton wachsend auf $I = [1,2] \implies f'(1) < f'(x) \forall x \in (1,2]$, d. h. $e = f'(1) < f'(x) \forall x \in (1,2]$. Also $f'(x) = 0$ hat keine Lösung $x \in I \implies$ Minimum liegt auch auf dem Rand von I, d. h.

$$\min_{x \in I} f(x) = \min \left\{ f(1), f(2) \right\} = f(2)$$

Wendepunkte

1.18. x_0 ist *Wendepunkt* von f, falls f an der Stelle x_0 bezüglich einer Umgebung von x_0 sein Konvexitätsverhalten ändert.

Wendepunkttest

Vorraussetzung. f ist in einer Umgebung von x_0 differenzierbar, eventuell mehrfach

Satz 1.8. *x_0 Wendepunkt von f $\iff$ x_0 lokale Maximalstelle bzw. lokale Minimalstelle von f'.*

Notwendige Bedinung. x_0 Wendepunkt von $f \implies f''(x_0) = 0$.

Hinreichende Bedingung. x_0 Wendepunkt von f, falls gilt

(1) $f''(x_0) = 0$

(2) $f'''(x_0) \neq 0$

Satz

Satz 1.9. *Sei $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)} = 0$ und $f^{(n)} \neq 0$ mit $n \geq 0$. Dann gilt:*

(a) x_0 ist Wendepunkt $\iff$ n ungerade

(b) x_0 lokale Maximalstelle $\iff$ n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$

(c) x_0 lokale Minimalstelle $\iff$ n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$

Beispiel.

$$f(x) = x^4 \qquad x_0 = 0$$

- $f'(x) = 4x^3$
- $f''(x) = 12x^2$
- $f'''(x) = 24x$
- $f^{(4)}(x) = 24$
- $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$
- $f^{(4)} = 24 > 0$
- $\implies$ x_0 lokale Minimalstelle

1.7. Taylorreihen und Potenzreihen

1.7.1. Taylorpolynom

Gegeben.

- Funktion $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in D$
- Werte $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \ldots$

Gesucht.

- Näherung für $f(x)$ für x nahe x_0

Satz 1.10. *Sei*

$$p(x) = a_n(x - x_0)^n + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \cdots + a_1(x - x_0) + a_0$$

ein Polynom von Grad $\leq n$. *Dann gilt für* $0 \leq k \leq n$:

$$p^{(k)}(x_0) = k! a_k \tag{1.380}$$

Beweis.

$$p(x) = a_n(x - x_0)^n + \cdots + a_2(x - x_0)^2 + a_1(x - x_0) + a_0 \qquad : p(x_0) = a_0 \tag{1.381}$$

$$p'(x) = n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots + 2a_2(x - x_0)^1 + a_1 \qquad : p'(x_0) = a_1 \tag{1.382}$$

$$p''(x) = (n-1)n \cdot a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots + 2a_2 \qquad : p''(x_0) = 2a_2 \tag{1.383}$$

$$\vdots \qquad \vdots \tag{1.384}$$

$$p^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n \cdot a_n \qquad : p^{(n)}(x_0) = n! a_n \tag{1.385}$$

□

Beispiel: Es sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad $\leq n = 2$ mit $p(1) = -1$, $p'(1) = 0$ und $p''(1) = 4$. Dann gilt:

$$p(x) = a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

und $a_k = \frac{p^{(k)}(1)}{k!}$ für $0 \leq k \leq 2$. Also gilt:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{p(1)}{1} = -1 \\ a_1 &= \frac{p'(1)}{1} = 0 \\ a_2 &= \frac{p''(1)}{2!} = 2 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2(x-1)^2 + 0(x-1) - 1 \\ &= 2(x-1)^2 - 1 \\ &= 2x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

1.19. Das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \, (x - x_0)^k \right) \tag{1.386}$$

mit

$$a_k = \frac{f^{(k)} \, (x_0)}{k!} \tag{1.387}$$

für $0 \leq k \leq n$ heißt *Taylorpolynom* von f an der Stelle x_0.

Bemerkung 1.

$$T_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1.388}$$

Dann ist $y = T_1(x)$ die *Tangente* von f an der Stelle x_0.

Bemerkung 2. Für $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$T_n^{(k)}(x_0) = k! \, a_k = f^{(k)}(x_0) \tag{1.389}$$

Dann ist $T_n(x)$ eine Näherung für $f(x)$ mit der Abweichung

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \tag{1.390}$$

also

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \tag{1.391}$$

Es gilt dann

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \tag{1.392}$$

d. h., $R_n(x)$ geht für $x \to x_0$ schneller gegen 0 als $(x - x_0)^n$.

Beispiel.

- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $D = [0, \infty)$
- $x_0 = 1,96 = \frac{49}{25}$

$$f(x) = \sqrt{x} \tag{1.393}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{1.394}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} = \frac{-1}{4x\sqrt{x}} \tag{1.395}$$
$$f_0(x_0) = \frac{7}{5} \tag{1.396}$$
$$f'(x_0) = \frac{5}{14} \tag{1.397}$$
$$f''(x_0) = \frac{-125}{1372} \tag{1.398}$$
$$T_0(x) = f(x_0) = \frac{7}{5} \tag{1.399}$$
$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \frac{7}{5} + \frac{5}{14}\left(x - \frac{49}{25}\right) = \frac{7}{10} + \frac{5}{14}x \tag{1.400}$$
$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = \frac{21}{40} + \frac{15}{28}x - \frac{125}{2744}x^2 \tag{1.401}$$
$$\sqrt{2} = f(2) \approx T_2(2) = \frac{21}{40} + \frac{15}{14} - \frac{125}{606} \tag{1.402}$$

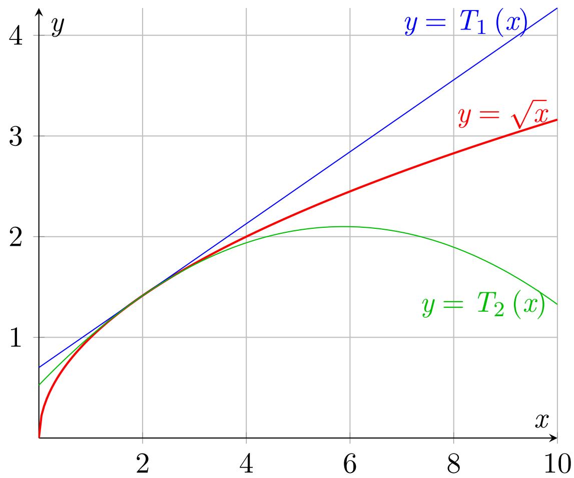

Abbildung 1.11.: Taylorreihe vs. Originalfunktion $f(x) = \sqrt{x}$

Satz 1.11. *Die Tangente $y = T_1(x)$ von f an der Stelle x_0, d. h.*

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1.403}$$

ist die beste lineare Näherung von $f(x)$ für x nahe x_0, d. h., ist

$$G(x) = f(x_0) + a(x - x_0) \tag{1.404}$$

eine Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ *und gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - G(x)}{x - x_0} = 0 \tag{1.405}$$

so ist

$$a = f'(x_0) \tag{1.406}$$

und somit

$$G(x) = T_1(x) \tag{1.407}$$

Beweis.

$$\frac{f(x) - G(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} \tag{1.408}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \tag{1.409}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - G(x)}{x - x_0} = 0 \tag{1.410}$$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \tag{1.411}$$

$$\iff a = f'(x_0) \tag{1.412}$$

Beachte:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1.413}$$

$$\underset{x = x_0 + h}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.414}$$

□

1.7.2. Taylorreihe von f an der Stelle x_0

Definition

1.20.

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k (x - x_0)^k \right) \tag{1.415}$$

$$\text{mit } a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{1.416}$$

heißt *Taylorreihe* von f an der Stelle x_0.

Bemerkung. Für festes $x \in \mathbb{R}$ ist $T(x)$ die Summe einer Reihe, sofern die Reihe konvergent ist. Es gilt

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \tag{1.417}$$

d. h., das TAYLORpolynom $T_n(x)$ ist die n-te Partialsumme der TAYLORreihe $T(x)$.

Problem

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt: $T(x) = f(x)$?

n-tes Reihenglied

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) \tag{1.418}$$

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \tag{1.419}$$

Dann gilt für festes $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = T(x) \tag{1.420}$$

$$= \lim_{n\to\infty} T_n(x) \tag{1.421}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \tag{1.422}$$

Restgliedformel von Lagrange

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\widetilde{x}$ mit $x_0 \leq \widetilde{x} \leq x$ bzw. $x \leq \widetilde{x} \leq x_0$, sodass gilt

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\widetilde{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{1.423}$$

Dabei muss f auf dem Intervall (x, x_0) bzw. (x_0, x) $(n+1) - mal$ differenzierbar sein.

Beispiel 1.

$$f(x) = \sin x \tag{1.424}$$
$$f'(x) = \cos x \tag{1.425}$$
$$f''(x) = -\sin x \tag{1.426}$$
$$f'''(x) = -\cos x \tag{1.427}$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x \tag{1.428}$$
$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x \tag{1.429}$$
$$a_{2k} = \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = 0 \tag{1.430}$$
$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \tag{1.431}$$
$$a_{2k+1} = \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \tag{1.432}$$
$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{2k+1}\cdot x^{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right) \tag{1.433}$$
$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \tag{1.434}$$
$$T_0(x) = 0 \tag{1.435}$$
$$T_1(x) = x \tag{1.436}$$
$$T_2(x) = x \tag{1.437}$$
$$T_3(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3 \tag{1.438}$$
$$\text{Restgliedformel: } R_n(x) = f(x) - T_n(x) \tag{1.439}$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(\widetilde{x})}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{1.440}$$
$$\text{mit } x_0 < \widetilde{x} < x \tag{1.441}$$
$$\text{bzw. } x < \widetilde{x} < x_0 \tag{1.442}$$
$$\left|f^{(n+1)}(\widetilde{x})\right| = |\cos\widetilde{x}| \text{ bzw. } |\sin\widetilde{x}| \tag{1.443}$$
$$\Longrightarrow \left|f^{(n+1)}(\widetilde{x})\right| \leq 1 \tag{1.444}$$
$$\Longrightarrow |R_n(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\widetilde{x})\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{1.445}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0\ \forall x \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0 \forall x \Longrightarrow \lim R_n(x) = 0 \forall x \tag{1.446}$$
$$\text{Also gilt: } f(x) = T(x)\ \sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.447}$$

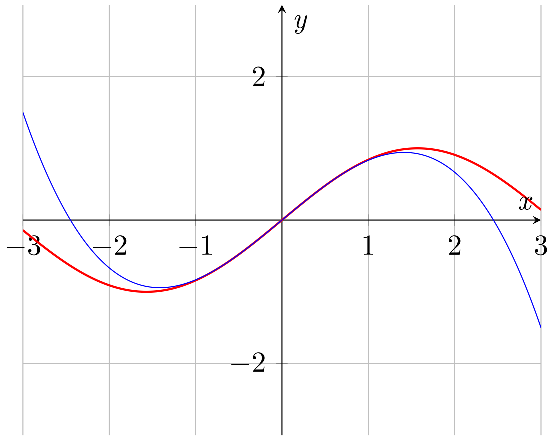

Abbildung 1.12.: Sinusfunktion und Annäherung über $T_3(x)$

Beispiel:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1.448}$$
$$f(x) = e^x \tag{1.449}$$
$$x_0 = 0 \tag{1.450}$$
$$f^{(k)}(x) = e^x \tag{1.451}$$
$$f^{(k)}(0) = 1 \tag{1.452}$$
$$a_k = \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \tag{1.453}$$
$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \tag{1.454}$$
$$T_0(x) = 1 \tag{1.455}$$
$$T_1(x) = 1 + x \tag{1.456}$$
$$T_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \tag{1.457}$$
$$T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \tag{1.458}$$
$$\text{Restglied: } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\widetilde{x})}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{mit } x < \widetilde{x} < x_0 \text{ oder } x_0 < \widetilde{x} < x \tag{1.459}$$
$$\left| f^{(n+1)}(\widetilde{x}) \right| = e^{\widetilde{x}} \begin{cases} \leq e^0 & \text{für } x < x_0 = 0 \\ \leq e^x & \text{für } 0 = x_0 < \widetilde{x} < x \end{cases} \tag{1.460}$$
$$\Longrightarrow \quad |R_n(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{(n+1)!} \; |x|^{n+1} & \text{für } x < 0 \\ \frac{e^x}{(n+1)!} \; |x|^{n+1} & \text{für } 0 < x \end{cases} \tag{1.461}$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \tag{1.462}$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^x \; |x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \tag{1.463}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x \to \infty} |R_n(x)| = 0 \tag{1.464}$$
$$\text{und somit } \lim_{x \to \infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.465}$$
$$\tag{1.466}$$

$$\text{Also gilt } \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = T(x) \tag{1.467}$$

$$\text{d. h. } e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots \tag{1.468}$$

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots \tag{1.469}$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \tag{1.470}$$

$$|e - s_n| = |f(1) - T_n(1)| = |R_n(1)| \tag{1.471}$$

$$\leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} \tag{1.472}$$

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} a_k \qquad = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0 \quad \forall k \tag{1.473}$$

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} \tag{1.474}$$

$$\Longrightarrow \; T(x) = f(x) \;\text{ nur für } x = x_0 = 0 \tag{1.475}$$

1.7.3. Potenzreihen

Definition

1.21. Reihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots \tag{1.476}$$

werden *Potenzreihe* genannt. Weiterhin heißen

- $x_0 \in \mathbb{R}$ *Zentrum* (bzw. Entwicklungsstelle) der Potenzreihe
- $a_k \in \mathbb{R}$ *Koeffizienten* der Potenzreihe
- x *Unbestimmte* der Potenzreihe

Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots \quad (x_0 = 0, a_k = 1 \; \forall k \geq 0)$$

Potenzreihe ist konvergent für $|x| < 1$ (siehe Abschnitt Reihen TBD) und $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ (für $|x| < 1$).

Konvergenzverhalten von Potenzreihen

Es gibt stets ein Intervall der Form

$$I = (x_0 - r, x_0 + r) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\right\}$$

sodass gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } x \in I, \text{ also } |x - x_0| < r \\ \text{divergent} & \text{für } x \text{ mit } |x - x_0| > r \\ ? & \text{für } x = x_0 \pm r \end{cases} \tag{1.477}$$

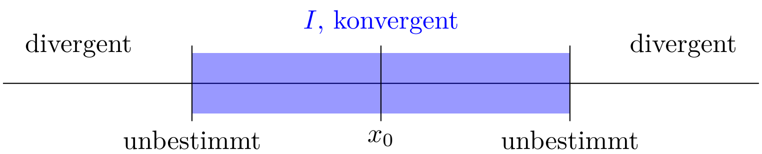

Abbildung 1.13.: Konvergenzradius der Potenzreihe

Konvergenzradius der Potenzreihe: Dann existiert $\forall x \in I$ die Summe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{1.478}$$

Dann ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wird *Summenfunktion* der Potenzreihe genannt.

Bestimmung von I

Wurzel- bzw. Quotientenkriterium.

$$q(x) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|a_k (x - x_0)^k\right|} \qquad q(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|a_k (x - x_0)^{k+1}\right|}{\left|a_k (x - x_0)^k\right|} \tag{1.479}$$

Dann gilt (siehe Abschnitt über Reihen):

$$\text{PR ist für } x \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{, falls } q(x) < 1 \\ \text{divergent} & \text{, falls } q(x) > 1 \\ ? & \text{, falls } q(x) = 1 \end{cases} \tag{1.480}$$

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \cdots \qquad \left(x_0 = 0, a_k = \frac{1}{k} \ \forall k \leq 1, a_0 = 0 \right) \tag{1.481}$$

$$q(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{\left| \frac{1}{k+1} x^{k+1} \right|}{\frac{1}{k} x^k} \tag{1.482}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{|x| k}{k+1} \tag{1.483}$$

$$= |x| \lim_{k \to \infty} \frac{k}{k+1} \tag{1.484}$$

$$= |x| \cdot 1 = |x| \tag{1.485}$$

$$q(x) < 1 \iff |x| < 1 \iff -1 < x < 1 \tag{1.486}$$

$$\text{Konvergenzintervall } I = (-1, 1)\,, \text{ Radius } r = 1 \tag{1.487}$$

$$\text{Summenfunktion } f\colon I \to \mathbb{R} \tag{1.488}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \tag{1.489}$$

1.7.4. Rechnen mit Potenzreihen

Seien f, g die Summenfunktionen von Potenzreihen mit Zentrum x_0, etwa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \forall x \in I_1 \tag{1.490}$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \quad \forall x \in I_2 \tag{1.491}$$

Dann gilt (siehe (3.6) TBD):

$$\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)(x - x_0)^k \quad \forall x \in I_1 \cap I_2 \tag{1.492}$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0)(x - x_0)^k \quad \forall x \in I_1 \cap I_2 \tag{1.493}$$

f ist stetig und differenzierbar auf Konvergenzintervall I_1, Ableitung wird gliedweise gebildet.

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k (x - x_0)^k \right)' \tag{1.494}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \quad \forall x \in I_1 \tag{1.495}$$

f ist stetig und differenzierbar auf I_1 und es gilt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \geq 0 \tag{1.496}$$

d. h. die Potenzreihe ist die Taylorreihe ihrer Summenfunktion.

Beweis.

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \cdots \qquad f(x_0) = a_0 \tag{1.497}$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 (x - x_0) + 3a_3 (x - x_0)^2 + \cdots \qquad f'(x_0) = a_1 \tag{1.498}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 (x - x_0) + \cdots \qquad f''(x_0) = 2!a_2 \tag{1.499}$$

$$f'''(x) = 3!a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 (x - x_0) + \cdots \qquad f'''(x_0) = 3!a_3 \tag{1.500}$$

$$\vdots$$

□

Beispiel: Summenfunktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$

mit $I = (-1, 1)$.

$$f(0) = 0 \tag{1.501}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} x^k \right)' \tag{1.502}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1 + x + x^2 + \cdots \quad \text{(geometrische Reihe)} \tag{1.503}$$

$$= \frac{1}{1 - x} \tag{1.504}$$

Ableitung integieren:

$$f(x) = -\ln|1-x| + c \tag{1.505}$$
$$0 = f(0) = \ln 1 + c = 0 + c \tag{1.506}$$
$$\Longrightarrow \ c = 0 \tag{1.507}$$
$$f(x) = -\ln|1-x| \text{ für } -1 < x < 1 \tag{1.508}$$
$$-\ln|1-x| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \tag{1.509}$$

Kapitel 2.

Integralrechnung für Funktionen $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2.1. Das bestimmte Integral

Gegeben:

$$f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to R \text{ Funktion} \tag{2.1}$$

$$I = [a, b] \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall} \tag{2.2}$$

2.1.1. Summendefinition

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) \cdot \Delta x_k \tag{2.3}$$

$$\tag{2.4}$$

- $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$: Unterteilung von $I = [a, b]$
- $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$: Länge des Teilintervalls $I_k = [x_k, x_{k+1}]$
- $\alpha_k \in I_k$: Zwischenwert
- $f(\alpha_k)\,\Delta x_k$: $\pm$ Flächeninhalt des Rechtecks über I_k mit Höhe $f(x_k)$
- Existiert der Grenzwert der Summe
$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k)\,\Delta x_k$$
für alle $n \to \infty$ und $\Delta x_k \to 0$ und hat stets denselben Wert, so heißt dieser Grenzwert *Wert des bestimmten Integrals* von f über $I = [a, b]$, in Zeichen
$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
Die Funktion f heißt dann über I *integrierbar*.

Beispiel:

$$I = \int_1^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

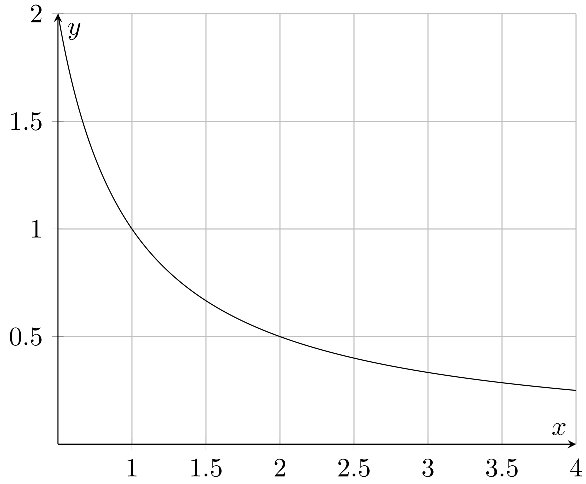

Abbildung 2.1.: $f(x) = \frac{1}{x}$
;

- Unterteilen des Intervalls $I = [1, 3]$ in n gleichgroße Teilintervalle $I_K = [x_k, x_{k+1}]$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$
- Schrittweite $h = \Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{2}{n}$, also gilt

$$x_k = x_0 + kh = 1 + k\frac{2}{n} = \frac{2k+n}{n}$$

- Für $\alpha_k \in I_k$ wählen wir $\alpha_k = x_k$ mit $f(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k} = \frac{1}{x_k} = \frac{n}{2k+1}$
- Summenfunktion

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2k+n}$$

- Existiert das Integral von f über $I = [1, 2]$ (???), so gilt

$$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2k+n}$$

- Werte von $S_n : S_{20} \approx 1,132\ldots; S_{300} \approx 1,1008$

$$I = \int_1^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 3 \approx 1,0986$$

2.1.2. Existenz

Ist f stetig auf $I = [a, b]$, so ist f integrierbar.

2.1.3. Geometrische Deutung (Flächeninhalt)

Abbildung 2.2.: Durch das Integral berechnete Flächeninhalte

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 + A_2 - B \tag{2.5}$$

2.1.4. Mittelwertsatz

2.1. Es sei f auf $I = [a, b]$ stetig. Dann ist

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

der *Mittelwert* von f auf I. Es gibt dann ein $\alpha \in [a, b]$ mit

$$M = f(\alpha) \tag{2.7}$$

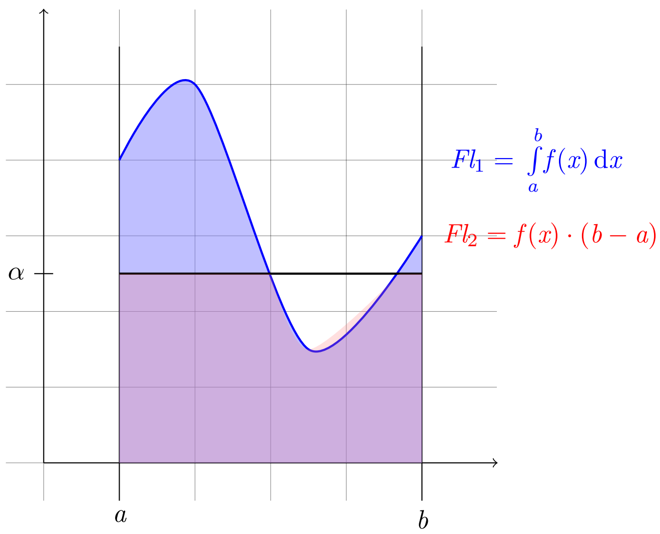

Abbildung 2.3.: Mittelwertsatz

Es gibt also ein $\alpha \in [a, b]$ mit $Fl_2 = Fl_1$, also mit $f(\alpha)\,(b-a) = \int_x^a f(x)\,\mathrm{d}f(x)b$.

2.1.5. Folgerungen aus der Summendefinition

Ist f über $I = [a, b]$ integrierbar, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit } c \in [a, b] \tag{2.8}$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{2.9}$$

Bemerkung. Ist $a < b$, so definiert man

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.10}$$

2.2. Das unbestimmte Integral

Gegeben.

- $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $I = [a, b] \subseteq D$ mit $a < b$
- f stetig auf I

Gesucht.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.11}$$

Bemerkung. Benutzen wir die Summendefinition aus Abschnitt 2.1.1 wie im Beispiel, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} \tag{2.12}$$

Wir suchen eine bessere Methode für die Berechnung von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2.2.1. Stammfunktionen

Man betrachte die Funktion

$$F_1\,(x) = \int\limits_a^x f(x)\,\mathrm{d}t \tag{2.13}$$

für $x \in I$.

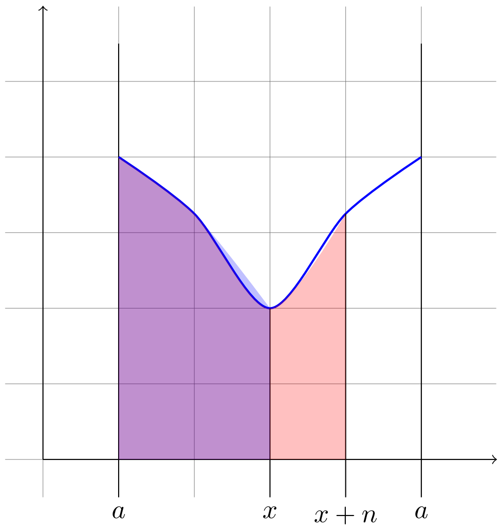

Abbildung 2.4.: Bildunterschrift TBD

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
F_1\,(x+n) &= \int\limits_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t && (2.14)\\
&= F_1\,(x) + \int\limits_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t && (2.15)\\
\Longrightarrow\; F_1\,(x+h) - F_1\,(x) &= \int\limits_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{Mittelwertsatz} && (2.16)\\
\text{mit } I = [x, x+h] : \quad &= f(x)\,h \text{ für ein } \alpha \in [x, x+h] && (2.17)\\
\Longrightarrow\; \frac{F_1\,(x+h) - F_1\,(x)}{h} &= f(\alpha) \;\text{ mit } \alpha \in [x, x+h] && (2.18)
\end{aligned}$$

$h \to 0$:

$$F_1{}'\,(x) \qquad\qquad f(x) \tag{2.19}$$

Somit gilt:

$$F_1{}'(x) = f(x) \quad \forall x \in I \tag{2.20}$$

2.2. Eine Funktion $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f auf I, falls gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I \tag{2.21}$$

Bemerkung. Sind $F, G : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von f auf I, so gilt

$$F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I \text{ mit Konstante } c \in \mathbb{R} \tag{2.22}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (F(x) - G(x))' &= F'(x) - G'(x) && (2.23)\\ &= f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I && (2.24)\\ \implies F(x) - G(x) &= c \quad \forall x \in I \text{ siehe Kap. 6 Monotonie TBD} && (2.25) \end{aligned}$$

□

2.2.2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f auf $I = [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \tag{2.26}$$

Beweis.

$$F_1(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ ist Stammfunktion von } f \text{ auf } I \tag{2.27}$$

$$F \text{ Stammfunktion von } f \text{ auf } I \implies F(x) = F_1(x) + c \quad \forall x \in I \text{ mit Konstante } c \tag{2.28}$$

$$F(a) = F_1(a) + c = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + c = 0 + c = c \tag{2.29}$$

$$F(b) = F_1(b) + c = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + c = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + F(a) \tag{2.30}$$

$$\implies F(b) - F(a) = \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.31}$$

$\square$

Beispiel:

$$\int_2^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$F(x) = \ln x \text{ ist Stammfunktion von } f \text{ auf } I = [2,3], \tag{2.32}$$

$$\text{da } (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0 \text{ ist} \tag{2.33}$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x \Big|_{x=2}^{x=3} = \ln 3 - \ln 2 \tag{2.34}$$

2.3. Die Menge aller Stammfunktionen von f auf I heißt unbestimmtes Integral von f auf I

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c \iff F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I \tag{2.35}$$

Beispiel:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + c \quad (I = (0,\infty)) : (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in I \tag{2.36}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + c \quad (I = (-\infty,0)) : (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in I \tag{2.37}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c \quad (I = \mathbb{R} \setminus \{0\}) \tag{2.38}$$

Bemerkung.

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c \tag{2.39}$$

Beispiel:

$$F(x) = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \tag{2.40}$$

$$F'(x) = x^{\alpha} \tag{2.41}$$

$$\Longrightarrow \int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \tag{2.42}$$

2.3. Integrationsregeln

2.3.1. Grundintegrale

$$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1) \tag{2.43}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c \tag{2.44}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c \tag{2.45}$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c \tag{2.46}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + c \tag{2.47}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c \tag{2.48}$$

$$\int e^{x}\,\mathrm{d}x = e^{x} + c \tag{2.49}$$

2.3.2. Summenregeln und Linearität

$$\int (f(x) \pm g(x))\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, \mathrm{d}x \pm \int g(x)\, \mathrm{d}x \tag{2.50}$$

$$\int \alpha f(x)\, \mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\, \mathrm{d}x \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \tag{2.51}$$

$$\tag{2.52}$$

Bemerkung.

$$\int e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = F(x) + c \tag{2.53}$$

$$\text{mit } F'(x) = e^{-x^2} \quad \forall x \tag{2.54}$$

$$\tag{2.55}$$

$F(x)$ lässt sich nicht mit Hilfe elementarer Funktionen ausdrücken.

2.3.3. Integration von Potenzreihen

Sei f die Summenfunktion einer Potenzreihe mit Konvergenzintervall I und Zentrum x_0, etwa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{2.56}$$

für alle $x \in I$. Dann ist f über I integrierbar und es gilt

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int a_k (x - x_0)^k\, \mathrm{d}x \tag{2.57}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{(k+1)} (x - x_0)^{k+1} + c \tag{2.58}$$

Beispiel:

$$\Phi(a) = \int_0^a e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ Fehlerfunktion, } a \geq 0 \tag{2.59}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.60}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-x^2\right)^k \tag{2.61}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \tag{2.62}$$

$$\Phi(a) = \int_0^a e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \tag{2.63}$$

$$= \int_0^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}\,\mathrm{d}x \tag{2.64}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^a \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}\,\mathrm{d}x \tag{2.65}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)\,k!} x^{2k+1} \right) \Bigg|_{x=0}^{a} \tag{2.66}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,k!} a^{2k+1} \quad \forall a \geq 0 \tag{2.67}$$

2.3.4. Partielle Integration

Für auf $I = [a, b]$ differenzierbare Funktionen $u = u(x)\,, v = v(x)$ gilt:

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x \tag{2.68}$$

$$\int_a^b uv'\,\mathrm{d}x = uv\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'v\,\mathrm{d}x \tag{2.69}$$

Beweis. Produktregel für $u \cdot v$ ergibt:

$$uv = \int (uv)' \,\mathrm{d}x \tag{2.70}$$

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{2.71}$$

$$uv = \int \left(u'v + uv'\right) \mathrm{d}x \tag{2.72}$$

$$= \int u'v \,\mathrm{d}x + \int uv' \,\mathrm{d}x \tag{2.73}$$

$$\implies \int uv' \,\mathrm{d}x = uv - \int u'v \,\mathrm{d}x \tag{2.74}$$

□

Beispiel 1:

$$I = \int x \cos x \,\mathrm{d}x \tag{2.75}$$

$$u = x \tag{2.76}$$

$$v' = \cos x \tag{2.77}$$

$$\implies u' = 1 \tag{2.78}$$

$$v = \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x (+c) \tag{2.79}$$

$$\implies I = \int uv' \,\mathrm{d}x = uv - \int u'v \,\mathrm{d}x \tag{2.80}$$

$$= x \sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x \tag{2.81}$$

$$= x \sin x \cdot \cos x + c \tag{2.82}$$

Beispiel 2:

$$I = \int \ln x \, \mathrm{d}x \tag{2.83}$$

$$u = \ln x \tag{2.84}$$

$$v' = 1 \tag{2.85}$$

$$\Longrightarrow \quad u' = \frac{1}{x} \tag{2.86}$$

$$v = \int 1 \, \mathrm{d}x = x(+c) \tag{2.87}$$

$$I = \int uv' \, \mathrm{d}x = uv - \int u'v \, \mathrm{d}x \tag{2.88}$$

$$= x \ln x - \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \tag{2.89}$$

$$= x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x \tag{2.90}$$

$$= x \ln x - x + c \tag{2.91}$$

Also ist $F(x) = x \ln x - x$ Stammfunktion von $\ln x$.

Probe:

$$F'(x) = (x \ln x)' - (x)' \tag{2.92}$$

$$= 1 \ln x + x\frac{1}{x} - 1 = \ln x \tag{2.93}$$

Beispiel 3:

$$I = \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x \tag{2.94}$$

$$u = \cos x \tag{2.95}$$

$$v' = \cos x \tag{2.96}$$

$$\Longrightarrow \quad u' = -\sin x \tag{2.97}$$

$$v = \sin x (+c) \tag{2.98}$$

$$\Longrightarrow \quad I = \int u v' \, \mathrm{d}x = uv - \int u' v \, \mathrm{d}x \tag{2.99}$$

$$= \cos x \cdot \sin x - \int - \sin^2 x \, \mathrm{d}x \tag{2.100}$$

$$\Longrightarrow \quad \int \cos^2 \mathrm{d}x = \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x \tag{2.101}$$

$$\text{Es gilt: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{2.102}$$

$$\Longrightarrow \quad \int \cos^2 \mathrm{d}x = \cos x + \sin x + \int \left(1 - \cos^2 x\right) \mathrm{d}x \tag{2.103}$$

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x \tag{2.104}$$

Das Integral auf der rechten Seite auf die linke Seite bringen, danach halbieren:

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(\cos x \cdot \sin x + x\right) + c \tag{2.105}$$

2.3.5. Substitutionsregel

Sei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$, also $F'(x) = f(x)$, und sei $x = g(t)$ eine injektive Funktion. Für

$$H(c) = F(g(t)) \tag{2.106}$$

gilt dann

$$H'(t) = F'(g(t))\, g'(t) = f(g(t))\, g\,(t) \tag{2.107}$$

also ist $H(t)$ Stammfunktion von $f(g(t)) \cdot g'(t)$ und es gilt:

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = F(x) + c = H\left(g^{-1}(t)\right) + c \tag{2.108}$$

2.4. Für die Substitution $x = g(t)$ mit g injektiv auf $I = [a, b]$ ist $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g'(t)$, also $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$ und es gilt:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left.\int f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t\right|_{t=g^{-1}(x)} \tag{2.109}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.110}$$

Beispiel:

$$J = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x \tag{2.111}$$

Substitution:

$$x = \sin t \tag{2.112}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t \tag{2.113}$$

$$t = \arcsin x \tag{2.114}$$

$$t = -\frac{\pi}{2} \iff x = -1 \tag{2.115}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \iff x = 1 \tag{2.116}$$

$$g(t) = \sin t \text{ ist injektiv auf } I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \tag{2.117}$$

$$J = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x \tag{2.118}$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t \tag{2.119}$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t \tag{2.120}$$

$$\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \quad \text{für } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \tag{2.121}$$

$$J = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \tag{2.122}$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \cos t \cdot \sin t\right)\Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} \tag{2.123}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + 0\right) \tag{2.124}$$

$$= \frac{\pi}{2} \tag{2.125}$$

$$\int \sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(t + \cos t \cdot \sin t\right)\Big|_{t=\arcsin x} = \cdots \tag{2.126}$$

$$\tag{2.127}$$

2.5. Für $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ und $f(x) = g\,(h\,(x)) \cdot h'\,(x)$ und mit Substitution

$$t = h\,(x) \tag{2.128}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = h'\,(x) \tag{2.129}$$

$$\mathrm{d}t = h'\,(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.130}$$

erhält man

$$\int g\,(h\,(x)) \cdot h'\,(x)\,\mathrm{d}x = \left.\int g\,(t)\,\mathrm{d}t\right|_{t=h(x)} \tag{2.131}$$

$$\int\limits_a^b g\,(h\,(x)) \cdot h'\,(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{h(a)}^{h(b)} g\,(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.132}$$

Beispiel 1:

$$I = \int e^{5x-7}\,\mathrm{d}x \tag{2.133}$$

Substitution:

$$t = 5x - 7 \tag{2.134}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 5 \tag{2.135}$$

$$\mathrm{d}t = 5\mathrm{d}x \tag{2.136}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{d}t \tag{2.137}$$

$$\Longrightarrow\ I = \int e^{5x-7}\,\mathrm{d}x \tag{2.138}$$

$$= \int e^t \frac{1}{5}\,\mathrm{d}t \tag{2.139}$$

$$= \frac{1}{5}\int e^t\,\mathrm{d}t \tag{2.140}$$

$$= \left.\frac{1}{5} e^t\right|_{t=5x-7} \tag{2.141}$$

$$= \frac{1}{5} e^{5x-7} + c \tag{2.142}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} I &= \int \tan x \,\mathrm{d}x && (2.143)\\ &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x && (2.144)\\ &= \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x \,\mathrm{d}x && (2.145) \end{aligned}$$

Substitution:

$$\begin{aligned} t &= \cos x && (2.146)\\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} &= -\sin x && (2.147)\\ \mathrm{d}t &= -\sin x \mathrm{d}x && (2.148)\\ \Longrightarrow I &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x && (2.149)\\ &= \int \frac{\sin x}{t}\,\mathrm{d}x && (2.150)\\ &= \int -\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t && (2.151)\\ &= -\ln |t| \big|_{t=\cos x} && (2.152)\\ &= -\ln |\cos x| + c && (2.153) \end{aligned}$$

Spezialfälle:

$$\begin{aligned} \int g\left(ax+b\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\int g\left(t\right)\mathrm{d}t\bigg|_{t=ax+b} && (2.154)\\ \int \frac{h'\left(x\right)}{h\left(x\right)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=h(x)} && (2.155)\\ &= \ln |h\left(x\right)| + c && (2.156)\\ \int \left(h\left(x\right)\right)^n \cdot h'\left(x\right)\mathrm{d}x &= \int t^n \,\mathrm{d}t\bigg|_{t=h(x)} && (2.157)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(h\left(x\right)\right)^{n+1} + c \qquad (n \neq -1) && (2.158) \end{aligned}$$

Nutzlose Substitutionen:

$$I = \int e^{2x}\cdot \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \qquad (2.159)$$

Substitution:

$$t = \sqrt{x} \tag{2.160}$$
$$x = t^2 \tag{2.161}$$
$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{2.162}$$
$$\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\mathrm{d}t = 2t\mathrm{d}t \tag{2.163}$$
$$I = \int e^{2x} \cdot \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \tag{2.164}$$
$$= \int e^{2t^2} \cdot t \cdot 2t\,\mathrm{d}t \tag{2.165}$$
$$= \int 2t^2 e^{2t^2}\,\mathrm{d}t \tag{2.166}$$
$$= \quad ? \tag{2.167}$$
$$\tag{2.168}$$

$\int e^{x^{-2}}\,\mathrm{d}x$ lässt sich nicht durch elementare Funktionen beschreiben, man muss Potenzreihen benutzen.

$$\int x e^{x^2}\,\mathrm{d}x \overset{t=x^2}{=} \int e^t \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \tag{2.169}$$
$$= \frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t \tag{2.170}$$
$$= \frac{1}{2} e^t \Big|_{t=x^t} \tag{2.171}$$
$$= \frac{1}{2} e^{x^2} \tag{2.172}$$

2.4. Uneigentliche Integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} \tag{2.173}$$
$$= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tag{2.174}$$
$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=2} \tag{2.175}$$
$$= -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} \;\lightning \tag{2.176}$$

Der Integrand $f(x) = \frac{1}{x^2}$ hat in $x = 0$ ein Unendlichkeitsstelle[1].

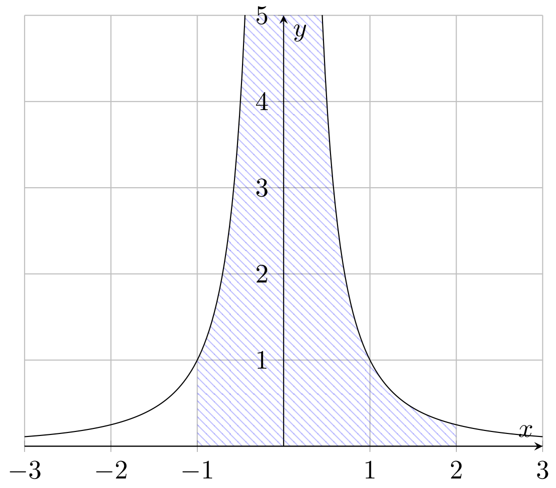

Abbildung 2.5.: TBD

2.4.1. Definition

2.6. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ heißt *uneigentliches Integral*, falls gilt:

(1) $a = -\infty$ oder $b = +\infty$ ist, oder

(2) f eine Unendlichkeitsstelle $c \in [a, b]$ hat, d. h. $\lim_{x \to c \pm 0} f(x) = \pm\infty$

[1] Polstelle

2.4.2. Unendliche Grenzen

Definition

Ist f stetig auf dem Integrationsintervall, so definiert man

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.177}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.178}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.179}$$

Die Integrale heißen *konvergent*, falls die Grenzwerte endlich sind.

Beispiele

(a)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \tag{2.180}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{b} \tag{2.181}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1 \tag{2.182}$$

(b)

$$\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos x\,\mathrm{d}x \tag{2.183}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \sin x\big|_{x=0}^{x=b} \tag{2.184}$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\sin b - \sin 0) \tag{2.185}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \sin b \ldots \text{ existiert nicht} \tag{2.186}$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} (\arctan x)\big|_{x=a}^{x=b} \tag{2.187}$$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} (\arctan(b) - \arctan(a)) \tag{2.188}$$

$$y = \arctan x \iff x = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \qquad -\infty < x < \infty \tag{2.189}$$

$$x \to -\infty \iff y \to -\frac{\pi}{2} + 0 \tag{2.190}$$

$$x \to +\infty \iff y \to +\frac{\pi}{2} - 0 \tag{2.191}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} (\arctan(b) - \arctan(a)) \tag{2.192}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \tag{2.193}$$

$$\implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 1 \tag{2.194}$$

2.7. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Dichtefunktion*, falls $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ ist.

Dichtefunktionen werden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung benutzt.

2.4.3. Unendlichkeitsstellen/Polstellen

Definition

$$a < b$$

(a) f stetig auf $(a, b]$, a Unendlichkeitsstelle, dann

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.195}$$

(b) f stetig auf $[a, b)$, b Unendlichkeitsstelle, dann

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.196}$$

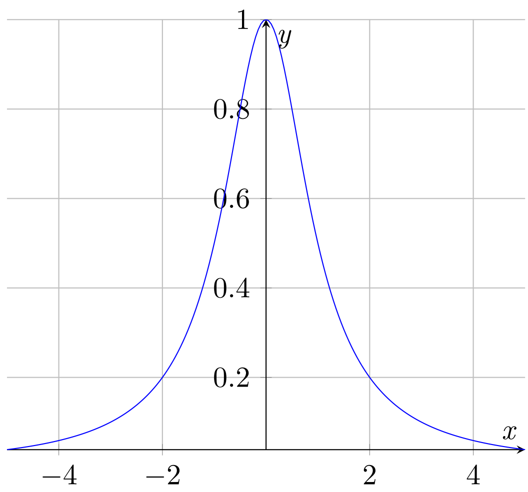

Abbildung 2.6.: $y = \frac{1}{1+x^2}$

(c) f stetig auf (a, b), a und b Unendlichkeitsstellen, dann

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0+0 \\ \varepsilon_2 \to 0+0}} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.197}$$

(d) f hat auf $[a, b]$ Unendlichkeitsstellen $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, dann

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_m}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.198}$$

Beispiele

(a)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \tag{2.199}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(2\sqrt{x}\right)\Big|_{x=0+\varepsilon}^{x=1} \tag{2.200}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2 - 0 = 2 \text{ konvergent} \tag{2.201}$$

(b)

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \tag{2.202}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_{0+\varepsilon}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \tag{2.203}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0+0} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=\varepsilon}^{x=2} \tag{2.204}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) + \lim_{\varepsilon\to 0+0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{2.205}$$

$$= +\infty + \infty = +\infty \text{ nicht konvergent} \tag{2.206}$$

2.5. Summen und Integrale

2.5.1. Harmonische Zahlenfolge

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{2.207}$$

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \text{ siehe TBD} \tag{2.208}$$

- Wie schnell wächst H_n, beachte $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} \geq H_n \quad \forall n$.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad x > 0 \tag{2.209}$$

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \tag{2.210}$$

$$\tag{2.211}$$

2.5.2. Monoton fallende Funktionen

Vorraussetzung:

- $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ ist stetige, monoton fallende Funktion
- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1,\infty)$

Dann:

$$f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.212}$$

Beweis. Siehe Abbildung 2.7. □

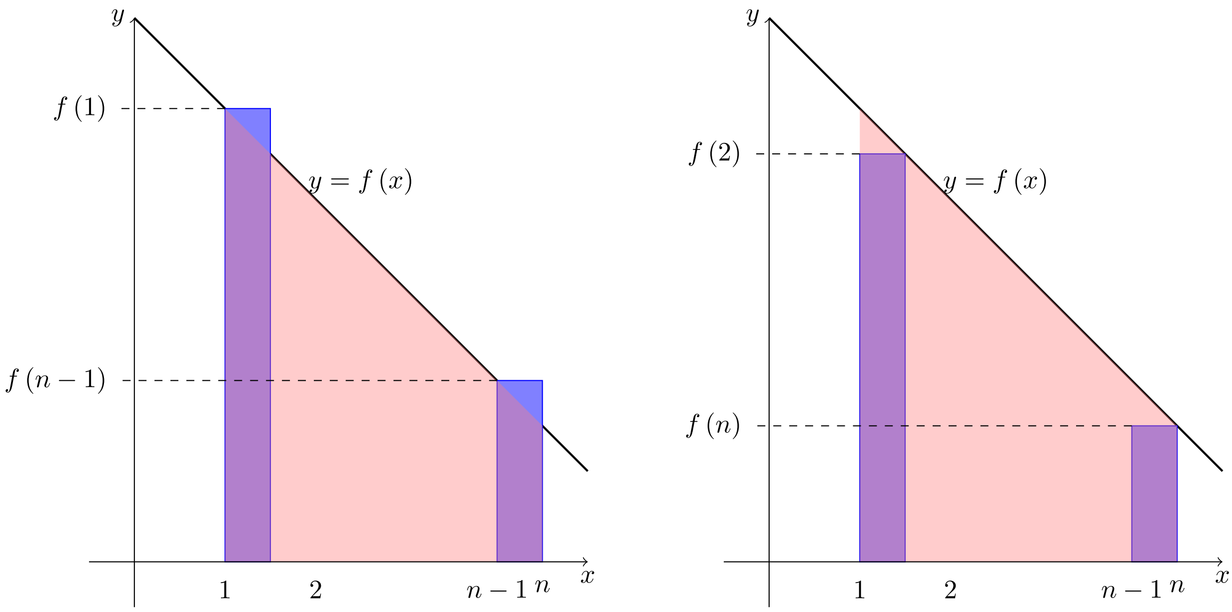

Abbildung 2.7.: TBD

2.5.3. Harmonische Zahlen

$$
\begin{aligned}
H_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} && (2.213)\\
&= \sum_{k=1}^{n} f(k) && (2.214)\\
f(x) &= \frac{1}{x} \text{ monoton fallend auf} [1, \infty) && (2.215)\\
f(x) &\geq 0 \quad \forall x \in [1, \infty) && (2.216)\\
\int_1^n \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x &= \ln x|_{x=1}^{x=n} && (2.217)\\
&= \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)\,, \text{ denn } \ln(1) = 0 && (2.218)\\
\text{Also gilt } f(n) + \ln(n) &\leq H_n \leq \ln(n) + f(1) && (2.219)\\
\ln(n) + \frac{1}{n} &\leq H_n \leq \ln(n) + 1 && (2.220)\\
\implies \frac{\ln(n) + \frac{1}{n}}{\ln(n)} &\leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n) + 1}{\ln(n)} && (2.221)\\
&\overset{n\to\infty}{\to} 1 \leq \cdots \leq 1 && (2.222)\\
\implies \lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} &= 1 && (2.223)\\
\text{d. h. } H_n &\sim \ln(n) && (2.224)\\
\text{und somit } H_n &= \Theta(\ln(n)) && (2.225)
\end{aligned}
$$

2.5.4. Monoton wachsende Funktionen

Vorraussetzung:

- $f\colon [1, \infty] \to \mathbb{R}$ ist stetige monoton wachsende Funktion
- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, \infty)$

Dann:

$$
f(1) + \int_1^n f(x) \, \mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(n) + \int_1^n f(x) \, \mathrm{d}x \tag{2.226}
$$

Beweis. Siehe Abbildung 2.8. □

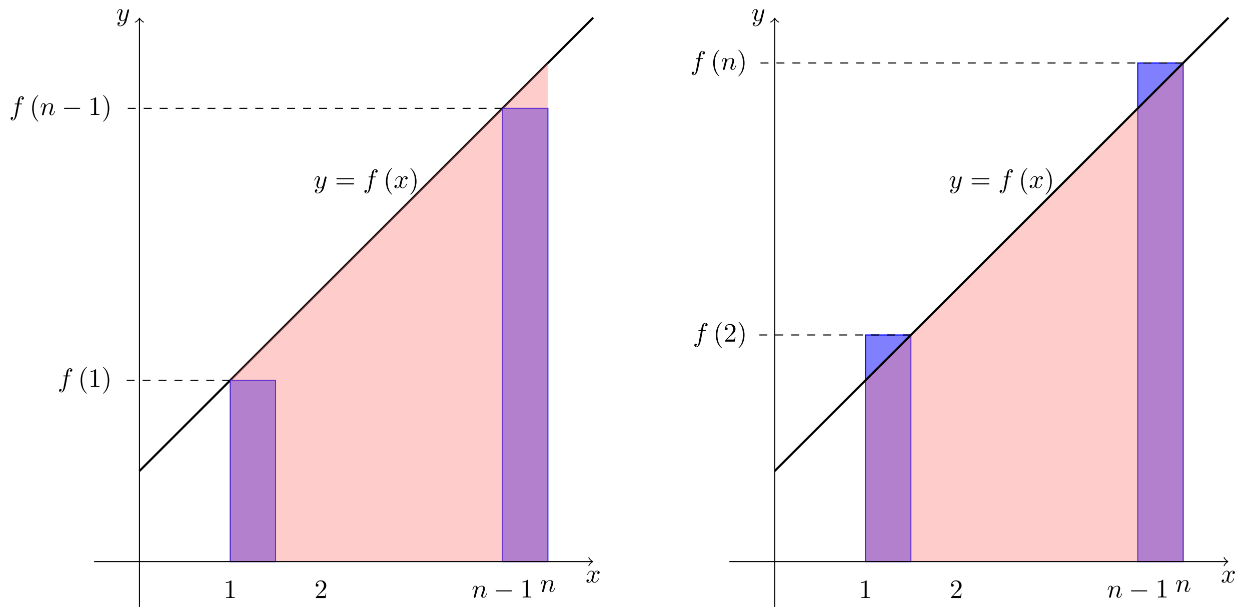

Abbildung 2.8.: TBD

2.5.5. Integralkriterium

Es sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige monoton fallende Funktion mit $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, \infty)$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x) \ \text{ konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergent} \tag{2.227}$$

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}} : f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}} \tag{2.228}$$

f ist monoton fallend, stetig und ≥ 0 auf $[1, \infty)$.

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \left(-2x^{-\frac{1}{x}}\right)\Big|_{x=1}^{x=\infty} \tag{2.229}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{x}}\right) + 2 = 2 \tag{2.230}$$

$$\Longrightarrow \text{ Reihe ist konvergent} \tag{2.231}$$

$$\text{Für die Partialsummenfolge } s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^3}} \tag{2.232}$$

$$\text{gilt (siehe Abschnitt 2.5.2): } f(n) + \int\limits_1^n \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x \leq s_n \leq \int\limits_1^n \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x + f(1) \tag{2.233}$$

$$\int\limits_1^n \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Big|_{x=1}^{x=n} \tag{2.234}$$

$$= \left(-\frac{2}{\sqrt{n}} + 2\right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \tag{2.235}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n^3}} + \left(2 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \leq s_n \leq \left(2 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) + 1 \tag{2.236}$$

Kapitel 3.

Lineare Algebra

3.1. Komplexe Zahlen

3.1.1. Einführung

- $\mathbb{N}$: $x + a = 0$ keine Lösung $\quad (a \neq 0)$
- $\mathbb{Z}$: $x + a = 0 \iff x = -1$
  keine Lösung für $x \cdot a = 1 \quad (a \neq 1)$
- $\mathbb{Q}$: $x \cdot a = 1 \iff x = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$
  keine Lösung für $x^2 = 2$
- $\mathbb{R}$: $x^2 = a \iff x = \pm\sqrt{a} \quad (a \geq 0)$
  keine Lösung für $x^2 = -1$
- $\mathbb{C}$: $x^2 = -1 \iff x = \pm\,\mathrm{i} \quad (\mathrm{i}^2 = -1, \mathrm{i} = \sqrt{-1})$
  $x^2 - 4x + 13 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{9} = 2 \pm 3\,\mathrm{i}$

3.1.2. Algebraische Form komplexer Zahlen

3.1. Komplexe Zahlen sind Ausdrücke z der Form

$$z = x + \mathrm{i}\,y \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

Bezeichnungen:

- $x = \Re(z)$: Realteil von z
- $y = \Im(z)$: Imaginärteil von z
- i: imaginäre Einheit, $\mathrm{i}^2 = -1$
- $\mathbb{C} = \left\{ z = x + \mathrm{i}\,y \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Dann gilt für $z \in \mathbb{C}$:

$$z \in \mathbb{R} \iff \Im(z) = 0 \iff z = x + \mathrm{i} \cdot 0 = x \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{3.2}$$

3.1.3. Arithmetische Operationen auf $\mathbb{C}$

Gegeben seien komplexe Zahlen z, u:

$$z = a + \mathrm{i}\, b \tag{3.3}$$
$$u = c + \mathrm{i}\, d \tag{3.4}$$
$$a, b, c, d \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

Gleichheit:

$$z = u \iff a = c \wedge b = d \tag{3.6}$$
$$\iff \Re(z) = \Re(u) \wedge \Im(z) = \Im(u) \tag{3.7}$$

Addition/Subtraktion:

$$z \pm u = (a + \mathrm{i}\, b) \pm (c + \mathrm{i}\, d) \tag{3.8}$$
$$= (a \pm c) + \mathrm{i}\,(b \pm d) \tag{3.9}$$
$$\Re(z \pm u) = \Re(z) \pm \Re(u) \tag{3.10}$$
$$\Im(z \pm u) = \Im(z) \pm \Im(u) \tag{3.11}$$

Multiplikation:

$$z \cdot u = (a + \mathrm{i}\, b) \cdot (c + \mathrm{i}\, d) \tag{3.12}$$
$$= a\,(c + \mathrm{i}\, d) + \mathrm{i}\, b\,(c + \mathrm{i}\, d) \tag{3.13}$$
$$= ac + \mathrm{i}\, ad + \mathrm{i}\, bc + \mathrm{i}^2\, bd \tag{3.14}$$
$$= ac + \mathrm{i}\, ad + \mathrm{i}\, bc - bd \tag{3.15}$$
$$= \underbrace{ac - bd}_{\Re(u \cdot u)} + \mathrm{i}\,\underbrace{(ad + bc)}_{\Im(z \cdot u)} \tag{3.16}$$

Division

$$\frac{z}{u} = \frac{a + \mathrm{i}\, b}{c + \mathrm{i}\, d} \quad \text{Erweiterung mit } c - \mathrm{i}\, d \tag{3.17}$$
$$= \frac{(a + \mathrm{i}\, b)\,(c - \mathrm{i}\, d)}{(c + \mathrm{i}\, d)\,(c - \mathrm{i}\, d)} \tag{3.18}$$
$$= \frac{ac + \mathrm{i}\, bc - \mathrm{i}\, ad - \mathrm{i}^2\, bd}{c^2 - \mathrm{i}^2\, d^2} \tag{3.19}$$
$$= \frac{(ac + bd) + \mathrm{i}\,(bc - ad)}{c^2 + d^2} \tag{3.20}$$
$$= \underbrace{\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}}_{\Re\left(\frac{z}{4}\right)} + i\,\underbrace{\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}}_{\Im\left(\frac{z}{u}\right)} \tag{3.21}$$

Dies geht nur, wenn $u = c + \mathrm{i}\, d \neq 0 + \mathrm{i}\, 0 = 0$ ist, d. h., $(c, d) \neq (0, 0)$.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{3+2\,\mathrm{i}}{1+2\,\mathrm{i}} && (3.22)\\
&= \frac{(3+2\,\mathrm{i})\,(1-2\,\mathrm{i})}{(1+2\,\mathrm{i})\,(1-2\,\mathrm{i})} && (3.23)\\
&= \frac{3-6\,\mathrm{i}+2\,\mathrm{i}-4\,\mathrm{i}^2}{1-4\,\mathrm{i}^2} && (3.24)\\
&= \frac{7-4\,\mathrm{i}}{5} && (3.25)\\
&= \frac{7}{5}+\mathrm{i}\left(-\frac{4}{5}\right) && (3.26)
\end{aligned}
$$

Für die arithmetischen Operationen $+, \cdot$ in $\mathbb{C}$ gelten dieselben Gesetze wie für $\mathbb{R}$ (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Distributivgesetz u. s. w.). Insbesondere ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein *Körper*[1].

3.1.4. Betrag komplexer Zahlen und konjugierte komplexe Zahlen

Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}\,y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ definiert man

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{Betrag von } z \qquad (3.27)$$

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y \qquad \text{konjugierte komplexe Zahl von } z \qquad (3.28)$$

Regeln:

(R1) $z \cdot \overline{z} = (x+\mathrm{i}\,y)\,(x-\mathrm{i}\,y) = x^2 - \mathrm{i}^2\,y^2 = x^2+y^2 = |z|^2,\ \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

(R2) $\Re(\overline{z}) = \Re(z),\ \Im(\overline{z}) = -\Im(z),\ |\overline{z}| = |z|$

(R3) $|z|$ ist reelle Zahl ≥ 0
$|z| = 0 \iff z = 0$

(R4) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

(R5) $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ (Dreiecksungleichung)

3.1.5. Gauß'sche Zahlenebene

- Die Komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}\,y$ (mit $x, y \in R$) entspricht dem Punkt $P(x, y)$ mit Ortsvektor $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in der Ebene.
- Pythagoras: $x^2+y^2 = r^2$, also $r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$ Also $|z|$ entspricht der Länge des Ortsvektors $\overrightarrow{x}$ bzw. dem Abstand von 0 (= Nullpunkt) zu $P(x, y)$

[1] Siehe dazu Vorlesung "Grundlagen und Diskrete Strukturen", Kapitel 5

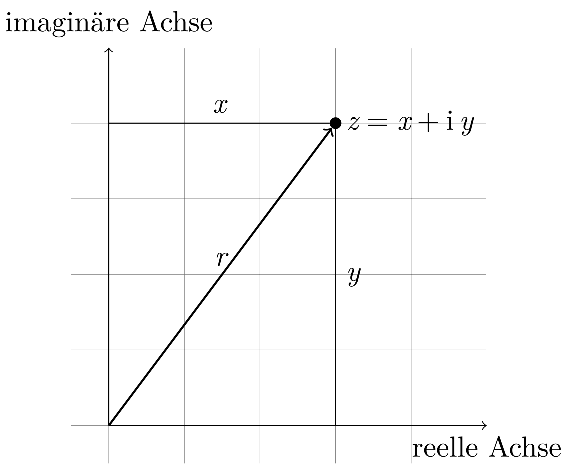

Abbildung 3.1.: GAUSS'sche Zahlenebene

- Addition/Subtraktion komplexer Zahlen $z = a + \mathrm{i}\, b, u = c + \mathrm{i}\, d$ entspricht Addition/Subtraktion der Ortsvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

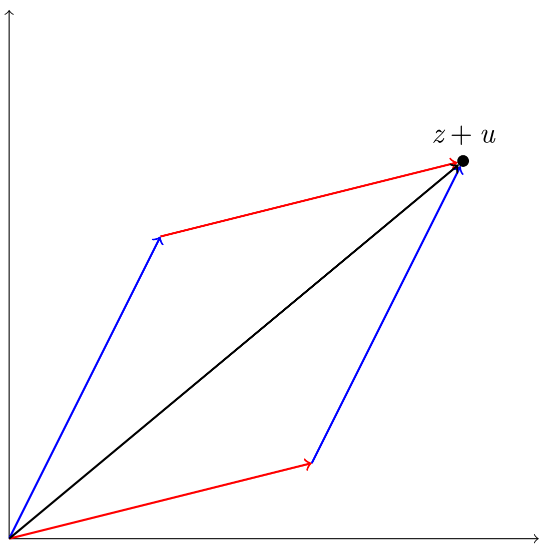

Abbildung 3.2.: Addition von komplexen Zahlen

Beispiel:

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = 2 \right\} \tag{3.29}$$

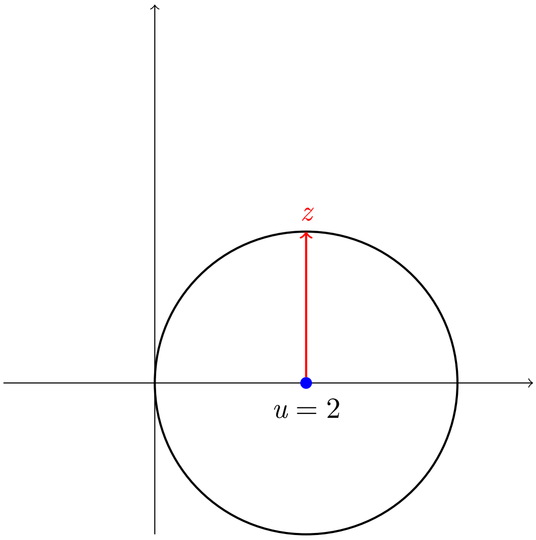

Abbildung 3.3.: $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| = 2\}$

$$
\begin{aligned}
z &= x + \mathrm{i}\, y && (3.30)\\
z - 2 &= (x-2) + \mathrm{i}\, y && (3.31)\\
|z-2| &= \sqrt{(x-2)^2 + y^2} && (3.32)\\
|z-2| = 2 \iff & \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2 && (3.33)\\
\iff & (x-2)^2 + y^2 = 4 && (3.34)
\end{aligned}
$$

3.1.6. Komplexe Zahlenfolgen und Reihen

Gegeben Komplexe Zahlenfolge, d. h., Abbildung $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $z_n = z(n)$, sowie komplexe Zahl $u \in \mathbb{C}$.

Definition:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = u \iff \lim_{n\to\infty} |z_n - u| = 0 \tag{3.35}$$

Beachte: Die Fehlerfolge $f_n = |z_n - u|$ ist eine reelle Zahlenfolge.

Beispiel:

$$z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \mathrm{i}\,\frac{1}{n} \tag{3.36}$$

$$u = 1 + \mathrm{i}\,0 = 1 \tag{3.37}$$

$$z_n - u = \frac{1}{n} + \mathrm{i}\,\frac{1}{n} \tag{3.38}$$

$$|z_n - u| = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} \tag{3.39}$$

$$\to 0 \tag{3.40}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} z_n = u \tag{3.41}$$

Allgemein gilt: Ist $z_n = x_n + \mathrm{i}\,y_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \mathrm{i}\lim_{n\to\infty} y_n \tag{3.42}$$

sofern die Grenzwerte $\lim x_n$, $\lim y_n$ existieren.

Analog für Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{\infty} y_k \tag{3.43}$$

für $z_k = x_k + \mathrm{i}\,y_k$ mit $x_k, y_k \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. Für komplexe Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ gilt das Quotientenkriterium bzw. Wurzelkriterium. Bilden Grenzwert

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} \qquad\qquad q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|z_k|} \tag{3.44}$$

Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \begin{cases} \text{ist (absolut) konvergent} & \text{, falls } q < 1 \\ \text{ist divergent} & \text{, falls } q > 1 \\ \text{keine Aussage} & \text{, falls } q = 1 \end{cases} \tag{3.45}$$

3.1.7. Die Eulersche Formel

Komplexe e-Funktion

Man betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \cdots \tag{3.46}$$

mit $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $z_k = \frac{1}{k!} z^k$ und

$$q(z) = \lim_{k \to \infty} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} \tag{3.47}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{|z|^{k+1} k!}{(k+1)!\, |z|^k} \tag{3.48}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{|z|}{k+1} \tag{3.49}$$

$$= 0 < 1 \tag{3.50}$$

Also ist die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent. Die Summenfunktion dieser Potenzreihe heißt *komplexe e-Funktion*, kurz e^z, d. h.

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \qquad (exp(z)) \tag{3.51}$$

Dann gilt

(E1) $e^0 = 1,\ e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ (Eulersche Zahl)

(E2) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ ist reelle e-Funktion für $x \in \mathbb{R}$

(E3) $e^{z+k} = e^z \cdot e^k \quad \forall z, u \in \mathbb{C}$

Beweis. (E1) einsetzen, bzw. Definition der Eulerschen Zahl e

(E2) Taylorentwicklung der reellen e-Funktion

(E3) siehe Übung, Cauchy-Produkt von absolut konvergenten Reihen. □

Eulersche Formel

Satz 3.1.

$$e^{\mathrm{i}\,\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \qquad \varphi \in \mathbb{R} \tag{3.52}$$

Beweis.

$$e^{\mathrm{i}\,\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{i}\,\varphi)^k \tag{3.53}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{k!} \varphi^k \tag{3.54}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2k}}{(2k)!} \varphi^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2k+1}}{(2k+1)!} \varphi^{2k+1} \tag{3.55}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \varphi^{2k}}_{\cos\varphi} + \mathrm{i} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \varphi^{2k+1}}_{\sin\varphi} \tag{3.56}$$

$$= \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \tag{3.57}$$

siehe auch dazu: Taylorreihen von $\cos x$ bzw. $\sin x$ in Abschnitt 1.7.2 bzw. den Übungen.

$$\Longrightarrow \quad e^{\mathrm{i}\,\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \tag{3.58}$$

□

Folgerung: Für $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \tag{3.59}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+\mathrm{i}\,y} && (3.60)\\ &= e^x + e^{\mathrm{i}\,y} && (3.61)\\ &= e^x + (\cos y + \mathrm{i}\sin y) && (3.62) \end{aligned}$$

□

3.1.8. Polarkoordinaten, exponentielle Form komplexer Zahlen

Gegeben:

$$z = x + \mathrm{i}\,x \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \tag{3.63}$$

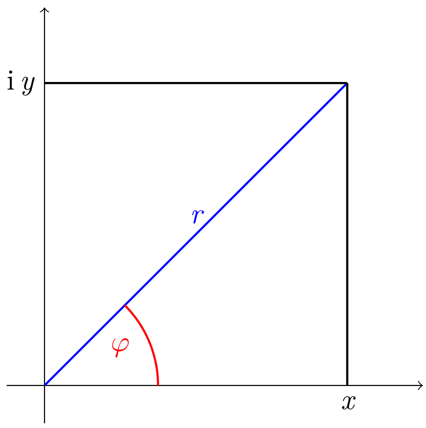

Abbildung 3.4.: Kartesiche und Polarkoordinaten eines Punktes in der Ebene

Dann gilt:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \geq 0 && (3.64)\\ x &= r\cos\varphi && (3.65)\\ y &= r\sin\varphi && (3.66) \end{aligned}$$

Man nennt:

- x, y: *kartesische Koordinaten* von z
- r, φ: *Polarkoordinaten* von z mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ (bzw. $\varphi \in (-\pi, \pi)$; φ heißt dann *Hauptwert* von z, kurz $\varphi = \arg(z)$)

Somit gilt:

$$\begin{aligned} z &= r\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot r\sin\varphi && (3.67)\\ &= r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) && (3.68)\\ &= r\cdot e^{\mathrm{i}\,\varphi} && (3.69)\end{aligned}$$

Die Darstellung von z in der Form $z = re^{\mathrm{i}\,\varphi}$ mit $r = |z| > 0$ und $\varphi = \arg(z)$ heißt *exponentielle Form* von z. Sofern $z \neq 0$ ist, ist die exponentielle Form eindeutig bestimmt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} z &= 2 + 2\,\mathrm{i} && (3.70)\\ x &= \Re(z) = 2 && (3.71)\\ y &= \Im(z) = 2 && (3.72)\\ r &= |z| && (3.73)\\ &= \sqrt{x^2 + y^2} && (3.74)\\ &= \sqrt{8} && (3.75)\\ &= 2\sqrt{2} && (3.76)\\ \cos\varphi &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} && (3.77)\\ \sin\varphi &= \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} && (3.78)\\ \Longrightarrow \quad \varphi &= \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z} && (3.79)\end{aligned}$$

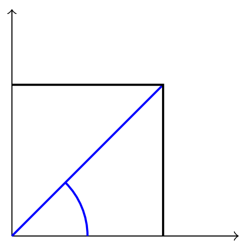

Abbildung 3.5.: $z = 2 + 2\,\mathrm{i}$

Folgerungen aus der eulerschen Formel:

(F1) $e^{\mathrm{i}\,\varphi} = e^{\mathrm{i}(\varphi + k2\pi)}, k \in \mathbb{Z}$

(F2) $\left|e^{\mathrm{i}\,\varphi}\right| = 1$, denn $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

(F3) $e^{\mathrm{i}\,\varphi_1} \cdot e^{\mathrm{i}\,\varphi_2} = e^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$

(F4) $\left(e^{\mathrm{i}\,\varphi}\right)^n = e^{i(n\varphi)}$ $((\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)$

(F5) $\dfrac{e^{\mathrm{i}\,\varphi_1}}{e^{\mathrm{i}\,\varphi_2}} = e^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}$

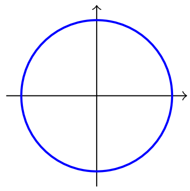

Abbildung 3.6.: $e^{\mathrm{i}\,\varphi}$

Beispiel: Potenzen komplexer Zahlen

$$u = (2 + 2\,\mathrm{i})^{20} \tag{3.80}$$
$$\Re(u) = ? \tag{3.81}$$
$$\Im(u) = ? \tag{3.82}$$
$$u = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot 2^k (2\,\mathrm{i})^{20k} = \text{ viel Spaß} \tag{3.83}$$
$$z = 2 + 2i \tag{3.84}$$
$$= 2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} \tag{3.85}$$
$$\Longrightarrow \quad u = z^{20} \tag{3.86}$$
$$= \left(2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)^{20} \tag{3.87}$$
$$= \left(2\sqrt{2}\right)^{20} \cdot \left(e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)^{20} \tag{3.88}$$
$$= 2^{20} \cdot 2^{10} \cdot e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} \tag{3.89}$$
$$= 2^{30} e^{\mathrm{i}\,5\pi} \tag{3.90}$$
$$= 2^{30} e^{\mathrm{i}\,\pi} \tag{3.91}$$
$$= 2^{30} (\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) \tag{3.92}$$
$$\Re(u) = -2^{30} \tag{3.93}$$
$$\Im(u) = 0 \tag{3.94}$$

3.1.9. Lösungen der Gleichung $z^n = w$

Gegeben:

$$w \in \mathbb{C} \tag{3.95}$$
$$w \neq 0 \tag{3.96}$$
$$n \geq 1 \tag{3.97}$$
$$n \in \mathbb{N} \tag{3.98}$$

Gesucht:

$$L = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = w\} \tag{3.99}$$
$$\tag{3.100}$$

Lösung:

Schritt 1:

Bestimmung der exponentiellen Form von w:

$$w = R \cdot e^{\mathrm{i}\,\Phi} \tag{3.101}$$
$$= R \cdot e^{\mathrm{i}(\Phi + k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{3.102}$$
$$\text{mit } R = |w| \tag{3.103}$$
$$\Phi = \arg(w) \tag{3.104}$$

Schritt 2:

Ansatz für z:

$$z = re^{\mathrm{i}\,\Phi} \tag{3.105}$$
$$\text{mit } r \geq 0 \text{ und } 0 \leq \varphi < 2\pi \tag{3.106}$$

Einsetzen in Gleichung:

$$z^n = r^n \cdot e^{\mathrm{i}\,n\varphi} = w = R \cdot e^{i(\Phi + k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{3.107}$$

Vergleich ergibt:

$$r^n = R \tag{3.108}$$
$$\text{und } n\varphi = \Phi + k2\pi \tag{3.109}$$

r

$$= \sqrt[n]{R} \tag{3.110}$$
$$\text{und } \varphi = \frac{1}{n}\Phi + \frac{2\pi}{n}k \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{3.111}$$

Lösungen:

$$
\begin{aligned}
z_k &= r \cdot e^{\mathrm{i}\,\varphi} && (3.112)\\
&= \sqrt[n]{R} \cdot e^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{n}\Phi + \frac{2\pi}{n}k\right)} \qquad k \in \mathbb{Z} && (3.113)\\
L &= \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\} && (3.114)
\end{aligned}
$$

Bemerkung.

$$
\begin{aligned}
z_n &= \sqrt[n]{R} \cdot e^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{n}\Phi + 2\pi\right)} && (3.115)\\
&= \sqrt[n]{R} \cdot e^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{n}\Phi\right)} = z_0 && (3.116)\\
Z_{n+1} &= z_1, z_{n+1} = z_2, \ldots && (3.117)\\
& && (3.118)
\end{aligned}
$$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
L &= \left\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 2 - 2\,\mathrm{i} = 0\right\} && (3.119)\\
z^3 - 2 - 2\,\mathrm{i} = 0 \iff z^3 &= 2 + 2\,\mathrm{i} && (3.120)\\
w &= 2 + 2\,\mathrm{i} && (3.121)
\end{aligned}
$$

Schritt 1:

$$
\begin{aligned}
R &= |w| = \sqrt{2^2 + 2^2} && (3.122)\\
&= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} && (3.123)\\
\Phi &= \arg(w) = \frac{\pi}{4} && (3.124)\\
w &= 2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)} \qquad k \in \mathbb{Z} && (3.125)
\end{aligned}
$$

Schritt 2:

Ansatz für z:

$$
z = r \cdot e^{\mathrm{i}\,\varphi} \qquad r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi \qquad (3.126)
$$

Einsetzen in Gleichung:

$$
\begin{aligned}
z^3 &= r^3 \cdot e^{\mathrm{i}\,3\varphi} && (3.127)\\
&= w = 2\sqrt{2} \cdot e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)} && (3.128)
\end{aligned}
$$

Vergleich:

$$\begin{aligned}
r^3 &= 2\sqrt{2} && && (3.129)\\
3\varphi &= \frac{\pi}{4} + k2\pi && yk \in \mathbb{Z} && (3.130)\\
\Longrightarrow \quad r &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}} && && (3.131)\\
&= \sqrt[3]{\sqrt{8}} && && (3.132)\\
&= \sqrt{\sqrt[3]{8}} && && (3.133)\\
&= \sqrt{2} && && (3.134)\\
\varphi &= \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} && k \in \mathbb{Z} && (3.135)
\end{aligned}$$

Lösungen:

$$\begin{aligned}
z_k &= r \cdot e^{\mathrm{i}\,\varphi} && && (3.136)\\
&= \sqrt{2} \cdot e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}\right)} && k = 0, 1, 2 && (3.137)\\
z_0 &= \sqrt{2} \cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{12}} && && (3.138)\\
z_1 &= \sqrt{2} \cdot e^{\mathrm{i}\left(\frac{9\pi}{12}\right)} && && (3.139)\\
z_2 &= \sqrt{2} \cdot e^{\mathrm{i}\left(\frac{17\pi}{12}\right)} && && (3.140)\\
L &= \{z_0, z_1, z_2\} && && (3.141)
\end{aligned}$$

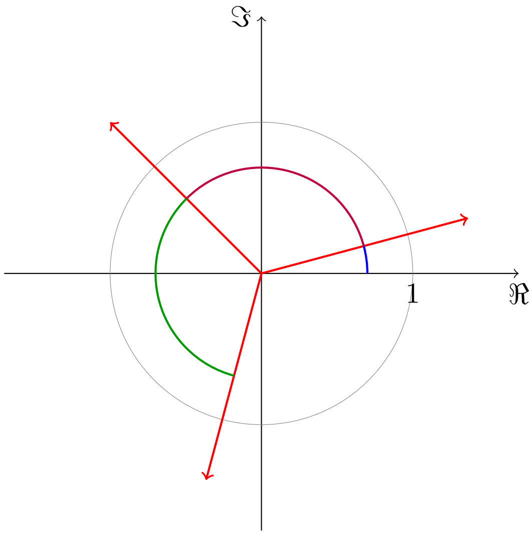

Abbildung 3.7.: Lösungen z_k

3.2. Polynome

3.2.1. Darstellung von Polynomen

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \cdots \tag{3.142}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{3.143}$$

Bezeichnungen:

- $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — *Koeffizienten* von$p(x)$; sind aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, nur endlich viele Koeffizienten sind $\neq 0$
- x — *Unbestimmte* von $p(x)$
- $\operatorname{grad}(p(x)) := \begin{cases} -\infty & \text{, falls } a_k = 0\ \forall k \geq 0 \\ n & \text{, falls } a_n \neq 0 \text{ und } a_k = 0\ \forall k \geq n+1 \end{cases}$
- $p(\alpha)$ — *Wert* von $p(x)$ für $x = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ oder $\alpha \in \mathbb{C}$). $p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots$ $(x^0 = 1, \alpha^0 = 1)$
- α heißt *Nullstelle* von $p(x)$, falls $p(\alpha) = 0$ ist.

Beispiel:

$$p(x) = 2x^2 - \mathrm{i} \tag{3.144}$$

$$a_0 = -\mathrm{i} \tag{3.145}$$

$$a_1 = 0 \tag{3.146}$$

$$a_2 = 2 \tag{3.147}$$

$$a_k = 0\ \forall k \geq 3 \tag{3.148}$$

$$\operatorname{grad}(p(x)) = 2 \tag{3.149}$$

Nullpolynom:

$$p(x) \equiv 0, \text{ also} \tag{3.150}$$

$$\forall k \geq 0 : a_k = 0 \tag{3.151}$$

$$\operatorname{grad}(p(x)) = -\infty \tag{3.152}$$

$$p(\alpha) = 0\ \forall \alpha \in \mathbb{C} \tag{3.153}$$

Also hat das Nullpolynom unendlich viele Nullstellen.

Konstantes Polynom:

$$p(x) \equiv a \qquad (a_0 = a, a_k = 0\ \forall k \geq 1) \tag{3.154}$$
$$\text{Ist } a \neq 0, \tag{3.155}$$
$$\text{so ist } \operatorname{grad}(p(x)) = 1 \tag{3.156}$$
$$\text{und } p(\alpha) = a \neq 0 \forall \alpha \in \mathbb{C} \tag{3.157}$$

Dieses Polynom hat also keine Nullstellen.

Lineares Polynom:

$$p(x) = ax + b \qquad a \neq 0\,(a_0 = b, a_1 = a, a_k = 0\ \forall k \geq 2) \tag{3.158}$$
$$\operatorname{grad}(p(x)) = 1 \tag{3.159}$$
$$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a} \tag{3.160}$$
$$\implies \alpha = -\frac{b}{a} \qquad \text{(genau eine Nullstelle)} \tag{3.161}$$

3.2.2. Arithmetische Operationen

Gegeben:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{3.162}$$
$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \tag{3.163}$$

Gleichheit: (Koeffizientenvergleich)

$$p(x) = q(x) \iff a_k = b_k\ \forall k \geq 0 \tag{3.164}$$
$$\tag{3.165}$$

Bemerkung.

$$p(x) = q(x) \iff p(\alpha) = q(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ (\text{bzw. } \forall \alpha \in \mathbb{C}) \tag{3.166}$$

Addition/Subtraktion:

$$p(x) \pm q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)\, x^k \tag{3.167}$$

Multiplikation (Cauchyprodukt)

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{3.168}$$

$$\text{mit } c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 \tag{3.169}$$

Bemerkung 1.

$$\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_i x^i + \cdots\right)\left(b_0 + b_1 x + \cdots + b_j x^j + \cdots\right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i b_j x^{i+j} \tag{3.170}$$

Bemerkung 2.

$$\operatorname{grad}(p(x) \cdot q(x)) = \operatorname{grad}(p(x)) + \operatorname{grad}(q(x)) \tag{3.171}$$

3.2.3. Nullstellen

Gegeben:

Polynom $p(x)$ mit komplexen Zahlen

Gesucht: Nullstelle $\alpha \in \mathbb{C}$ von $p(x)$

Beispiel:

$$p(x) \equiv 0 \text{ Nullpolynom} \quad : p(\alpha) = 0 \; \forall \alpha \in \mathbb{C} \tag{3.172}$$

$$p(x) \equiv \alpha \text{ konstantes Polynom} \quad : p(\alpha) = \alpha \; \forall \alpha \in \mathbb{C} \tag{3.173}$$

Produktregel:

$$\text{Ist } p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)\text{, so gilt} \tag{3.174}$$

$$\alpha \text{ Nullstelle von } p(x) \iff \alpha \text{ Nullstelle } von p_1(x) \text{ oder } p_2(x) \tag{3.175}$$

Beweis.

$$p(alpha) = p_1(\alpha) \cdot p_2(\alpha) = 0 \iff p_1(\alpha) = 0 \vee p_2(\alpha) = 2 \tag{3.176}$$

□

Beispiel:

$$p(x) = \left(x^2 - 4\right)\left(x^2 - 2x + 10\right) \tag{3.177}$$
$$= x^4 + \ldots \tag{3.178}$$

Nullstellen:

$$x^2 - 4 = 0 \implies x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \tag{3.179}$$
$$x^2 - 2x + 10 = 0 \implies x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 10} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 + 3\,\mathrm{i} \tag{3.180}$$
$$\text{Nullstellen von } p(x) : x = 2, -2, 1 + 3\,\mathrm{i}, 1 - 3\,\mathrm{i} \tag{3.181}$$

Teilbarkeit

$$q(x) \mid p(x) \iff p(x) = g(x) \cdot q(x) \tag{3.182}$$

Division mit Rest

Zu jedem Polynom $q(x)$ mit $\operatorname{grad}(q(x)) \geq 0$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome $g(x)$ und $r(x)$ mit

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \tag{3.183}$$
$$\text{mit } \operatorname{grad}(r(x)) < \operatorname{grad}(q(x)) \tag{3.184}$$

Dann heißt

- $g(x)$ — *ganzer Teil* von $p(x)$ bei Division durch $q(x)$
- $r(x)$ — *Rest* von $p(x)$ bei Division durch $q(x)$

Beispiel:

$$p(x) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1 \tag{3.185}$$
$$q(x) = x^2 + x + 1 \tag{3.186}$$
$$2x^3 - 2x^2 + x + 1 : x^2 + x + 1 = 2x - 4 = g(x) \tag{3.187}$$
$$r(x) = 3x + 5 \tag{3.188}$$
$$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x) \tag{3.189}$$
$$\frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \tag{3.190}$$
$$\left(2x^2 - 2x^2 + x + 1\right) = (2x - 4)\left(x^2 + x + 1\right) + (3x + 5) \tag{3.191}$$

Bemerkung.

$$q(x) \mid p(x) \iff \text{Für den Rest } r(x) \text{ von } \frac{p(x)}{q(x)} \text{ gilt } r(x) = 0 \tag{3.192}$$

Spezialfall: Division durch Linearfaktor $x - \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{C})$. Dann ist $\operatorname{grad}(r(x)) < \operatorname{grad}(q(x)) = 1$, also $r(x) = a$ ist konstantes Polynom und es gilt

$$p(x) = g(x) \cdot (x - \alpha) + a \text{ mit } a = p(\alpha) \tag{3.193}$$

Beweis.

$$p(x) = g(x) \cdot (x - \alpha) + a \tag{3.194}$$
$$\Longrightarrow p(\alpha) = g(\alpha) \cdot 0 + a \tag{3.195}$$
$$= a \tag{3.196}$$

□

Folgerungen

Folgerung 1 (Abspaltregel)

$$\alpha \text{ ist Nullstelle von } p(x) \iff p(x) = g(x) \cdot (x - \alpha) \tag{3.197}$$
$$\iff x - \alpha \mid p(x) \tag{3.198}$$

Bemerkung. Ist $p(x) = g(x) \cdot (x - \alpha)$, so ist $\operatorname{grad}(g(x)) = \operatorname{grad}(p(x)) - 1$ und die Nullstellen von $p(x)$ sind α und die Nullstellen von $g(x)$.

Folgerung 2

Ist $\operatorname{grad}(p(x)) = n \geq 0$ (also $p(x) \neq$ Nullpolynom), so hat $p(x)$ höchstens n Nullstellen.

3.2. α heißt *k-fache Nullstelle* von $p(x)$, falls

$$p(x) = (x - \alpha)^k \cdot g(x) \tag{3.199}$$

mit $g(\alpha) \neq 0$.

Beispiel:

$$p(x) = x^3 - 3x + 2 \tag{3.200}$$

$$p(1) = 0 \tag{3.201}$$

$$g(x) = x^3 - 3x + 2 : (x-1) = x^2 + x - 2 \tag{3.202}$$

$$r(x) = 0 \tag{3.203}$$

$$\Longrightarrow \; p(x) = (x-1)\left(x^2 + x - 2\right) \tag{3.204}$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \tag{3.205}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \tag{3.206}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \tag{3.207}$$

$$x = -2 \text{ bzw. } x = 1 \tag{3.208}$$

$$\Longrightarrow \; x^2 + x - 2 = (x+2) \cdot (x-1) \tag{3.209}$$

$$p(x) = (x-1)^2 (x+2) \tag{3.210}$$

Nullstellen von $p(x)$:

$$x = 1 \text{ doppelte Nullstelle} \tag{3.211}$$

$$x = -2 \text{ einfache Nullstelle} \tag{3.212}$$

Fundamentalsatz der Algebra

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{3.213}$$

sei ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, also $a_n \neq 0$ und $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$. Dann hat $p(x)$ genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ (gezählt mit ihren Vielfachheiten). Sind $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von $p(x)$, so gilt

$$p(x) = a_n (x - z_1)(x - z_2) \cdot \cdots \cdot (x - z_n) \tag{3.214}$$

d. h. $p(x)$ ist Produkt aus n Linearfaktoren und dem konstanten Faktor a_n. Weiterhin ist

$$a_0 = (-1) \cdot a_n \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n \tag{3.215}$$

Faktorzerlegung im Reellen

Man betrachte das Polynom

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{3.216}$$

mit $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_1 \neq 0$, also $\operatorname{grad}(p(x)) = n \geq 0$.

(a) $p(x)$ besitzt n komplexe Nullstellen (Fundamentalsatz der Algebra).

(b) $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$
Bsp:

$$p(x) = x^2 + 1 \qquad z = 1 + \mathrm{i} \tag{3.217}$$
$$p(z) = (1 + \mathrm{i})^2 + 1 \tag{3.218}$$
$$= 1 + 2\,\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + 1 \tag{3.219}$$
$$= 1 + 2\,\mathrm{i} \tag{3.220}$$
$$p(\overline{z}) = p(1 - \mathrm{i}) \tag{3.221}$$
$$= (1 - \mathrm{i})^2 + 1 \tag{3.222}$$
$$= 1 - 2\,\mathrm{i} + i^2 + 1 \tag{3.223}$$
$$= 1 - 2\,\mathrm{i} \tag{3.224}$$
$$p(\overline{z}) = \overline{p(z)} \tag{3.225}$$

Für den allgemeinen Beweis benötigt man $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$:

Beweis.

$$\overline{p(z)} = \overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} \tag{3.226}$$
$$= \overline{a_n z^n} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \tag{3.227}$$
$$= \overline{a_n}\overline{z}^n + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} \tag{3.228}$$

Da $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$= a_n \overline{z}^n + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 \tag{3.229}$$
$$= p(\overline{z}) \tag{3.230}$$

□

(c) Ist $z \in \mathbb{C}$ Nullstelle von $p(x)$, so ist $\overline{z} \in \mathbb{C}$ auch Nullstelle von $p(x)$.

Beweis.

$$z \text{ Nullstelle} \implies p(z) = 0 \tag{3.231}$$
$$\implies \overline{p(z)} = \overline{0} = 0 \tag{3.232}$$
$$\implies 0 = \overline{p(z)} = p(\overline{z}) \tag{3.233}$$
$$\implies \overline{z} \text{ ist Nullstelle} \tag{3.234}$$

□

(d) Sind $z = a + \mathrm{i}\,b$ und $\overline{z} = a - \mathrm{i}\,b$ komplexe Nullstellen von $p(x)$, so gilt $b \neq 0$.

$$p(x) = \left(x^2 - 2ax + |z|^2\right) \cdot g(x) \tag{3.235}$$

Beweis.

$$p(x) = (x - z)(x - \overline{z}) \cdot g(x) \qquad \text{Abspaltregel} \tag{3.236}$$

$$= (x - zx - \overline{z}x + z\overline{z}) \cdot g(x) \tag{3.237}$$

$$= \left(x - (z + \overline{z})\, x + |z|^2\right) \cdot g(x) \tag{3.238}$$

$$= \underbrace{\left(x - 2a + |z|^2\right)}_{\text{Polynom mit reellen Koeffizienten}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\text{hat auch reelle Koeffizienten}} \tag{3.239}$$

$$\tag{3.240}$$

□

(e) $p(x)$ Produkt von r Linearfaktoren, s quadratischen Faktoren und a_n. Dann ist r die Anzahl der reellen Nullstellen (mit Vielfachheiten) und s die Anzahl der komplexen (nicht reellen) Nullstellen von $p(x)$ als Paare $z = a + \mathrm{i}\, b$, $\overline{z} = a - \mathrm{i}\, b$.

$$p(x) = x^3 + 9x^2 + x + 9 \tag{3.241}$$

$$p(\mathrm{i}) = \mathrm{i}^3 + 9\,\mathrm{i}^2 + \mathrm{i} + 9 \tag{3.242}$$

$$= -\,\mathrm{i} - 9 + \mathrm{i} + 9 = 0 \tag{3.243}$$

$$\Longrightarrow\ z = \mathrm{i}\ \text{ ist Nullstelle} \tag{3.244}$$

$$\Longrightarrow\ \overline{z} = -\,\mathrm{i}\ \text{ ist auch Nullstelle} \tag{3.245}$$

$$\Longrightarrow\ p(x) \text{ ist teilbar durch } (x - \mathrm{i}) \cdot (x - (-\,\mathrm{i})) \tag{3.246}$$

$$(x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i}) = x^2 + 1 \tag{3.247}$$

$$x^3 + 9x^2 + x + 9 : \left(x^2 + 1\right) = x + 9 \tag{3.248}$$

$$p(x) = \underbrace{\left(x^2 + 1\right)(x + 9)}_{\text{reelle Faktorzerlegung}} \tag{3.249}$$

$$= \underbrace{(x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})(x + 9)}_{\text{komplexe Faktorzerlegung}} \tag{3.250}$$

Gleichheit von Polynomen

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{3.251}$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \tag{3.252}$$

Dann gilt

$$p(\alpha) = q(\alpha) \iff a_k = b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \tag{3.253}$$

Beweis.

„←“:

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \alpha^k && (3.254)\\ &\overset{a_k=b_k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \alpha^k && (3.255)\\ &= q(\alpha) && (3.256)\end{aligned}$$

„→“:

$$\begin{aligned} &\text{Vor:} \quad p(\alpha) = q(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} && (3.257)\\ &\text{Beh:} \quad a_k = b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 && (3.258)\\ &\text{Bew:} \quad g(x) = p(x) - q(x) && (3.259)\\ &\qquad = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ mit } c_k = a_k - b_k && (3.260)\\ &g(\alpha) = p(\alpha) - q(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} && (3.261)\\ &\implies g \text{ hat unendlich viele Nullstellen} && (3.262)\\ &\implies g \text{ ist Nullpolynom} && (3.263)\\ &\implies c_k = 0 \quad \forall k && (3.264)\\ &\implies a_k = b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 && (3.265)\end{aligned}$$

□

Beispiel: Gesucht ist das Polynom vom Grad ≥ 2 mit $p(-1) = p(1) = 1$ und $p(0) = -1$. Dann ist

$$p(x) = ax^2 + bx + c \tag{3.266}$$

und man erhält ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} p(-1) &= a - b + c = 1 && (3.267)\\ p(1) &= a + b + c = 1 && (3.268)\\ p(0) &= c = -1 && (3.269)\\ \implies a &= 2 && (3.270)\\ b &= 0 && (3.271)\\ c &= -1 && (3.272)\\ \implies p(x) &= 2x^2 - 1 && (3.273)\end{aligned}$$

3.2.4. Integration gebrochenrationaler Funktionen mittels Partialbruchzerlegung

Gegeben:

$$f(x) = \frac{p\,(x)}{q\,(x)} \tag{3.274}$$

sei eine *echt gebrochen rationale Funktion* (d. h. $p\,(x)$, $q\,(x)$ Polynome und $\operatorname{grad}\,(p\,(x)) < \operatorname{grad}\,(q\,(x))$).

Gesucht:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.275}$$

Lösungsmethode: Man zerlegt $f(x)$ in eine Summe von Partialbrüchen (Teilbrüchen) und integriert die Summanden einzeln.

$$f(x) = \frac{p\,(x)}{q_1\,(x)\cdot q_2\,(x)\cdot\ldots} \tag{3.276}$$

$$= \frac{p_1\,(x)}{q_1\,(x)} + \frac{p_2\,(x)}{q_2\,(x)} + \ldots \tag{3.277}$$

3.3. Ein *Partialbruch* ist eine echt gebrochen rationale Funktion der Form $\frac{A}{x-a}$ bzw. $\frac{A}{(x-a)^m}$ für reelle Nullstellen a von $q\,(x)$ oder $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$ bzw. $\frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}$ für komplexe Nullstellen von $q\,(x)$, d. h. $\frac{\alpha^2}{4}-\beta<0$.

Satz 3.2. *Jede echt gebrochen rationale Funktion lässt sich als Summe von Partialbrüchen darstellen.*

Integrale über Partialbrüche

(a) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\cdot\ln|x-a|+c$

(b) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = A\cdot\frac{-1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+c$ für $n\geq 2$

(c) $\displaystyle\int \frac{Bx+c}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}\,\mathrm{d}x$ siehe Tafelwerke.

Am wichtigsten dabei ist $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + c$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x+7}{x^3 - 3x - 2} \tag{3.278}$$

1. Schritt: Nullstellen und Faktorzerlegung des Nenners

$$\begin{aligned}
x^3 - 3x - 2 &\overset{!}{=} 0 && (3.279)\\
\text{Nullstelle raten: } x_1 &= -1 \implies \text{ Faktor } x+1 && (3.280)\\
x^3 - 3x - 2 : (x+1) &= x^2 - x - 2 && (3.281)\\
\implies x^3 - 3x - 2 &= (x+1)\left(x^2 - x - 2\right) && (3.282)\\
\text{Weitere Nullstellen: } x_{2/3} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} && (3.283)\\
&= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} && (3.284)\\
x_2 &= -1 && (3.285)\\
x_3 &= 2 && (3.286)\\
\implies x^3 - 3x - 2 &= (x+1)(x+1)(x-2) && (3.287)
\end{aligned}$$

2. Schritt: Ansatz für Partialbruchzerlegung

Ansatz für Faktor:

$$(x-a)^n : \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} \tag{3.288}$$

$$\left(x^2 + \alpha x + \beta\right)^n : \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + \alpha x + \beta} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + \alpha x + \beta)^2} + \cdots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n} \tag{3.289}$$

Im Beispiel:

$$f(x) = \frac{x+7}{(x+1)^2 (x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} \tag{3.290}$$

3. Schritt: Berechnung der Konstanten

$$\frac{x+7}{(x+1)^2 (x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} \quad | \cdot \text{Nenner} \tag{3.291}$$

$$x + 7 = A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2 \tag{3.292}$$

Die Polynome sollen gleich sein.

Variante 1: Koeffizientenvergleich

$$x + 7 = A\left(x^2 - x - 2\right) + B(x-2) + C\left(x^2 + 2x + 1\right) \tag{3.293}$$

$$x + 7 = x^2 (A + C) + x(-A + B + 2C) - 2A - 2B + C \tag{3.294}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert ein lineares Gleichungssystem.

$$x^2: \quad 0 = A + C \tag{3.295}$$
$$x: \quad 1 = -A + B + 2C \tag{3.296}$$
$$x^0: \quad 7 = -2A - 2B + C \tag{3.297}$$
$$\Longrightarrow C = -A \tag{3.298}$$
$$\Longrightarrow B = -2 \tag{3.299}$$
$$\Longrightarrow A = -1 \tag{3.300}$$
$$\Longrightarrow C = 1 \tag{3.301}$$

Variante 2: Werte für x einsetzen, vorzugsweise Nullstellen

$$x + 7 = A\,(x+1)\,(x-2) + B\,(x-2) + C(x+1)^2 \tag{3.302}$$
$$x = -1 \quad 6 = B \cdot (-3) \implies B = -2 \tag{3.303}$$
$$x = 2 \quad 9 = C \cdot 9 \implies C = 1 \tag{3.304}$$
$$x = 0 \quad 7 = -2A - 2B + C \tag{3.305}$$
$$= -2A + 4 + 1 \tag{3.306}$$
$$2 = -2A \implies A = -1 \tag{3.307}$$
$$\implies f(x) = \frac{-1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-2} \tag{3.308}$$
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x \tag{3.309}$$
$$= -\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + \ln|x-2| + c \tag{3.310}$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 10}{x^3 - 2x^2 + 5x} \tag{3.311}$$

1. Schritt: Faktorzerlegung des Nenners

$$x^3 - 2x^2 + 5x = x\left(x^2 - 2x + 5\right) \implies x_1 = 0 \tag{3.312}$$
$$x^2 - 2x + 5 = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{-4} \tag{3.313}$$

Komplexe Faktorzerlegung:

$$x^3 - 2x^2 + 5x = x\,(x - 1 - 2\,\mathrm{i})\,(x - 1 + 2\,\mathrm{i}) \tag{3.314}$$

2. Schritt: Komplexer Ansatz:

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1 - 2\,\mathrm{i}} + \frac{C}{x - 1 + 2\,\mathrm{i}} \tag{3.315}$$

Der komplexe Ansatz verläuft analog zu obigem Beispiel, hat jedoch auch komplexe Zahlen als Lösungen.

Reelle Faktorzerlegung:

$$x^2 - 2x^2 + 5x = x\left(x^2 - 2x + 5\right) \tag{3.316}$$

2. Schritt: Reeller Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$f(x) = \frac{4x^3 - 3x + 10}{x\,(x^2 - 2x + 5)} \tag{3.317}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5} \tag{3.318}$$

Diese Faktoren sind andere als die im komplexen Ansatz!

3. Schritt: Faktoren berechnen

$$4x^2 - 3x + 10 = A\left(x^2 - 2x + 5\right) + (Bx + C)\,x \tag{3.319}$$

$$= x^2\,(A + B) + x(-2A + C) + 5A \tag{3.320}$$

Koeffizientenvergleich:

$$x^2: \quad 4 = A + B \tag{3.321}$$

$$x: \quad -3 = -2A + C \tag{3.322}$$

$$x^0: \quad 10 = 5A \tag{3.323}$$

$$\Longrightarrow A = 2 \tag{3.324}$$

$$\Longrightarrow B = 2 \tag{3.325}$$

$$\Longrightarrow C = 1 \tag{3.326}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{2}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 5} \tag{3.327}$$

4. Schritt: Berechnung des Integrals

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x \tag{3.328}$$

$$\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x| + c_1 \tag{3.329}$$

$$\int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x^2 - 2x + 5\right| + c_2 \tag{3.330}$$

$$\int \frac{3}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{(x - 1)^2 + 4}\,\mathrm{d}x \tag{3.331}$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{1}{\frac{(x-1)^2}{4} + 1}\,\mathrm{d}x \tag{3.332}$$

Substitution:

$$= \frac{3}{4} \int \frac{1}{z^2+1} \cdot 2 \, \mathrm{d}z \tag{3.333}$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{1}{1+z^2} \, \mathrm{d}z \tag{3.334}$$

$$= \frac{3}{2} \arctan z + c_3 \tag{3.335}$$

$$= \frac{3}{2} \arctan \frac{x-1}{2} + c_3 \tag{3.336}$$

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = 2 \ln |x| + c_1 + \ln \left(x^2 - 2x + 5\right) + c_2 + \frac{3}{2} \arctan \frac{x-1}{2} + c_3 \tag{3.337}$$

$$= 2 \ln |x| + \ln \left(x^2 - 2x + 5\right) + \frac{3}{2} \arctan \frac{x-1}{2} + c \tag{3.338}$$

Bemerkung: Ist $f(x)$ *keine* echt gebrochenrationale Funktion, d. h. sie ist von der Form $\frac{p(x)}{q(x)}$ mit grad $(p(x)) \geq$ grad $(q(x))$, so führt man zunächst eine Polynomdivision mit Rest aus, d. h.

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \;\text{ mit }\; \operatorname{grad}(r(x)) < \operatorname{grad}(q(x)) \tag{3.339}$$

$$\implies f(x) = \underbrace{g(x)}_{\text{Polynom}} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{\text{echt gebr.rational}} \tag{3.340}$$

3.2.5. Standardsubstitutionen

(1) $I = \int R(e^x) \, \mathrm{d}x$ (R gebrochen rationale Funktion)
Substitution: $z = e^x$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = e^x = z = \mathrm{d}x = \frac{1}{z}\mathrm{d}z$

$$I = \int R(z) \, \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z \tag{3.341}$$

Beispiel:

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{z + \frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z \tag{3.342}$$

$$= \int \frac{1}{z^2+1} \, \mathrm{d}z \tag{3.343}$$

$$= \arctan z + c \tag{3.344}$$

$$= \arctan e^x + c \tag{3.345}$$

(2) $I = \int R(\sin x, \cos x) \, \mathrm{d}x$ (R rationale Funktion)

Substitution:

$$t = \tan\frac{x}{2} \tag{3.346}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} \tag{3.347}$$

$$= \left(1 + t^2\right)\cdot\frac{1}{2} \tag{3.348}$$

$$\Longrightarrow\ \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \tag{3.349}$$

$$\cos x = \frac{2}{1+t^2} - 1 \tag{3.350}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \tag{3.351}$$

Daraus erhält man eine gebrochenrationale Funktion in t, welche über Partialbruchzerlegung und Rücksubstitution integrierbar ist.

3.3. Matrizen

3.3.1. Definitionen und Bezeichnungen

3.4. Es sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper (etwa $K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$). Die Elemente von K heißen *skalare Größen* bzw. *Skalare*.

3.5. Eine *Matrix* vom Typ (m,n) über dem Körper K ist eine Abbildung $A : \{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\} \to K$ und wird als rechteckiges Schema aus m Zeilen und n Spalten dargestellt, welches die Bilder von A enthält.

Statt $A\left((i,j)\right)$ schreibt man auch $A\left(i,j\right)$ oder a_{ij} oder $A\left[i,j\right]$.

a_{ij} ist das *Element* von A in Zeile i und Spalte j.

i ist der *Zeilenindex* und j ist der *Spaltenindex* von a_{ij}.

Die Menge aller Matrizen vom Typ (m,n) über K wird mit $K^{(m,n)}$ bezeichnet.

Beispiel:

$$K = \mathbb{R} \tag{3.352}$$
$$\mathrm{Typ}\,(A) = (2,3) \tag{3.353}$$
$$A\,(1,1) = 1 \tag{3.354}$$
$$A\,(1,2) = 2 \tag{3.355}$$
$$A\,(1,3) = 3 \tag{3.356}$$
$$A\,(2,1) = 4 \tag{3.357}$$
$$A\,(2,2) = 5 \tag{3.358}$$
$$A\,(2,3) = 6 \tag{3.359}$$
$$\implies A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,3)} \tag{3.360}$$
$$A : \{1,2\} \times \{1,2,3\} \to \mathbb{R} \tag{3.361}$$

Spezialfälle

(1) $A \in K^{(1,1)}$, $A = (a) = a \in K$ skalare Größe

(2) $A \in K^{(1,n)}$, $A = \underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ Zeilenvektor

(3) $A \in K^{(m,1)}$, $A = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ Spaltenvektor

Man definiert $K^m := K^{(m,1)}$

(4) $A \in K^{(n,n)}$ quadratische Matrix der Ordnung n

(5) $A \in K^{(m,n)}$ besteht aus m Zeilenvektor mit je n Komponenten oder n Spaltenvektoren mit je m Komponenten

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} c1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in R^{(2,3)} \tag{3.362}$$

$$\implies A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}) \tag{3.363}$$

$$\text{mit } \vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{3.364}$$

$$\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{3.365}$$

$$\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{3.366}$$

$$A = \begin{pmatrix} \underline{b_1} \\ \underline{b_2} \end{pmatrix} \tag{3.367}$$

$$\text{mit } \underline{b_1} = (1, 2, 3) \tag{3.368}$$

$$\underline{b_2} = (4, 5, 6) \tag{3.369}$$

3.3.2. Spezielle Matrizen

Nullmatrix

$$O = K^{(m,n)} \tag{3.370}$$

$$\text{mit } O(i,j) = 0 \quad \forall i, j \tag{3.371}$$

Beispiel:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,3)} \tag{3.372}$$

$$\text{Nullvektor: } \overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{3.373}$$

Einheitsmatrix

$$E = E_n \in K^{(n,n)} \tag{3.374}$$

$$\text{mit } E(i,j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.375}$$

Beispiel:

$$E = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)} \tag{3.376}$$

Für eine Matrix $A \in K^{(m,n)}$ heißen die Elemente $a_{1\,1}, a_{2\,2}, \ldots$ Elemente der *Hauptdiagonalen.*

Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in K^{(n,n)} \tag{3.377}$$

$$= \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \tag{3.378}$$

Beispiel:

$$D = \operatorname{diag}(2, 3, 0, 1) \tag{3.379}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.380}$$

3.3.3. Matrizenoperationen

Gleichheit von Matrizen Zwei Matrizen A, B sind gleich, wenn die Abbildungen A und B gleich sind, d. h.

$$\operatorname{Typ}(A) = \operatorname{Typ}(B) \tag{3.381}$$

$$\text{und } A(i,j) = B(i,j) \quad \forall i, j \tag{3.382}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 2+b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 1 = 1 + a \\ 3 = 2 + b \\ 2 = c \\ 0 = d \end{cases} \tag{3.383}$$

Matrizenaddition

$$A, B \in K^{(m,n)} \mapsto A + B \in K^{(m,n)} \tag{3.384}$$
$$\text{mit } \ (A+B)\,(i,j) = A\,(i,j) + B\,(i,j) \tag{3.385}$$

$A + B$ wird auch als *Summe von A und B* bezeichnet.

Skalare Multiplikation

$$\alpha \in K, A \in K^{(m,n)} \mapsto \alpha \cdot a \in K^{(m,n)} \tag{3.386}$$
$$\text{mit } \ (\alpha \cdot A)\,(i,j) = \alpha \cdot A\,(i,j) \tag{3.387}$$

$\alpha \cdot A$ heißt auch *α-faches* von A oder *skalares Produkt* von α und A (*nicht* Skalarprodukt).

Beispiel:

$$K = \mathbb{R} \tag{3.388}$$
$$(m,n) = (2,3) \tag{3.389}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \tag{3.390}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & 9 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.391}$$

Zudem wird definiert:

$$-A := (-1) \cdot A \qquad \text{negative Matrix von } A \tag{3.392}$$
$$A - B := A + (-B) \qquad \text{Differenz von } A \text{ und } B \tag{3.393}$$

Rechengesetze $\forall A, B, C \in K^{(m,n)} : \forall \alpha, \beta \in K$

(R1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ Assoziativgesetz

(R2) $A + B = B + A$ Kommutativgesetz

(R3) $A + 0 = A$ und $A - A = 0$ sowie $-(-A) = A$

(R4) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$
$\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(R5) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha\,(\beta \cdot A)$

(R6) $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = 0$

Diese Gesetze folgen unmittelbar aus den Rechengesetzen im Körper K.

Bemerkung Aus den Regeln 1–3 folgt, dass $\left(K^{(m,n)}, +\right)$ eine abelsche Gruppe ist. Neutrales Element ist die Nullmatrix. Inverses Element zu A ist $(-1)\,A = -A$.

Matrizenmultiplikation

(a) Zeilenvektor · Spaltenvektor = skalare Größe

$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{3.394}$$

$$a \in K^{(1,n)}, b \in K^{(n,1)} \mapsto \underline{a} \cdot \vec{b} \in K^{(1)} = K \tag{3.395}$$

(b) Allgemeiner Fall

$$A \in K^{(m,n)}, B \in K^{(n,p)} \mapsto A \cdot B \in K^{(m,p)} \tag{3.396}$$

$$\text{mit } (A \cdot B)\,(i,j) := i\text{-te Zeile von } A \cdot j\text{-te Spalte von} B \tag{3.397}$$

$$= (A\,(i,1)\,, A\,(i,2)\,, \ldots, A\,(i,n)) \cdot \begin{pmatrix} B\,(1,j) \\ B\,(2,j) \\ \vdots \\ B\,(n,j) \end{pmatrix} \tag{3.398}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A\,(i,k) \cdot B\,(k,j) \tag{3.399}$$

$A \cdot B$ heißt *Produkt* von A und B.

Diese Multiplikation funktioniert nur, wenn die Spaltenzahl von A gleich der Zeilenzahl von B ist.

Beispiele:

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.400}$$

$$\mathrm{Typ}\,(2,3) \cdot \mathrm{Typ}\,(3,2) = \mathrm{Typ}\,(2,2) \tag{3.401}$$

$$(1,2,3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 12 \tag{3.402}$$

$$(0,-2,1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 2 = -2 \tag{3.403}$$

$$(1,2,3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \tag{3.404}$$

$$(0,-2,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 - 2 + 1 = -1 \tag{3.405}$$

(2) Das Produkt aus Zeilenvektor und Matrix ergibt (sofern es existiert) immer einen Zeilenvektor:

$$(1,2,3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12,6) \tag{3.406}$$

(3) Das Produkt aus Matrix und Spaltenvektor ergibt (sofern es existiert) immer einen Spaltenvektor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{3.407}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (3,4) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \tag{3.408}$$

$$(3,4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 11 \tag{3.409}$$

(5) Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, auch nicht für quadratische

Matrizen. $AB \neq BA$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.410}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.411}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \tag{3.412}$$

(7)

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a_1} \\ \vdots \\ \underline{a_m} \end{pmatrix} \tag{3.413}$$

$$B = \left(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_p} \right) \tag{3.414}$$

$\underline{a_i}, \vec{b_j}$ haben je n Komponenten.

$$(A \cdot B)\,(i,j) = \left(\underline{a_i} \vec{b_j} \right) \in K^{(m,p)} \tag{3.415}$$

$$A \cdot B = A \left(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_p} \right) \tag{3.416}$$

$$= \left(A\vec{b_1}, \ldots, A\vec{b_p} \right) \tag{3.417}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \underline{a_1} \\ \vdots \\ \underline{a_m} \end{pmatrix} \cdot B \tag{3.418}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ \vdots \\ a_m B \end{pmatrix} \tag{3.419}$$

Rechengesetze:

$$\forall A \in K^{(m,n)}, B \in K^{(n,p)}, C \in K^{(p,r)}, \alpha \in K :$$

(R6) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

(R7) $E_m A = A$ und $BE_p = B$

(R8) $A\,(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$
$(A_1 + A_2)\,B = A_1 B + A_2 B$

(R9) $\alpha\,(AB) = (\alpha A)\,B = A\,(\alpha B)$

Bemerkung Aus den Regeln 6–8 folgt: $(K^{m,n}, +, \cdot)$ ist ein nichtkommutativer Ring mit 1-Element E.

Transposition

$$A \in K^{(m,n)} \implies A^T \in K^{(n,m)} \tag{3.420}$$

$$A^T(i,j) = A(j,i) \tag{3.421}$$

A^T heißt A *transponiert* bzw. *transponierte Matrix von* A.

Beispiel:

$$K = \mathbb{R} \tag{3.422}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,3)} \tag{3.423}$$

$$\implies A^T \in \mathbb{R}^{(3,2)} \tag{3.424}$$

$$A^T(1,1) = A(1,1) = 1 \qquad A^T(3,2) = A(2,3) = 6 \tag{3.425}$$

$$A^T(2,1) = A(1,2) = 2 \qquad A^T(1,2) = A(2,1) = 4 \tag{3.426}$$

$$A^T(3,1) = A(1,3) = 3 \qquad A^T(1,2) = A(2,1) = 4 \tag{3.427}$$

$$\implies A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \tag{3.428}$$

$$\vec{a} = (1,2,3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3.429}$$

Rechengesetze

(R10) $\left(A^T\right)^T = A$

(R11) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(R12) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (Beweis folgt)

(R13) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

Beweis.

$$A \in \mathbb{R}^{(m,n)} \quad B \in \mathbb{R}^{(n,p)} \tag{3.430}$$

$$\implies A \cdot B \in R^{(m,p)} \tag{3.431}$$

$$\implies (AB)^T \in \mathbb{R}^{(p,m)} \tag{3.432}$$

$$A^T \in \mathbb{R}^{(n,m)} \quad B^T \in \mathbb{R}^{(p,n)} \tag{3.433}$$

$$\implies B^T A^T \in \mathbb{R}^{(p,m)} \tag{3.434}$$

Seien nun $i = \{1, \ldots, p\}$ und $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$(AB)^T (i, j) \overset{\text{Def.}}{=} (A \cdot B) (j, i) \tag{3.435}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki} \tag{3.436}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} B^T (i, k) \cdot A^T (k, j) \tag{3.437}$$

$$= \left(B^T \cdot A^T\right) (i, j) \tag{3.438}$$

$\square$

Wozu das Ganze?

Beispiel: Gesucht ist die Lösung X der Gleichung $X \cdot A = B$. Bekannt ist das Verfahren zur Lösung von Gleichungen der Form

$$A \cdot X = B \tag{3.439}$$

$$X \cdot A = B \iff (XA)^T = B^T \tag{3.440}$$

$$\iff A^T X^T = B^T \tag{3.441}$$

Daraus kann X^T und damit auch X berechnet werden.

3.4. Gleichungssysteme und lineare Matrizengleichungen

3.4.1. Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Gegeben seien m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n \in K$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \tag{3.442}$$

Die Gleichungen sind in der Form:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \tag{3.443}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{3.444}$$

Matrizenform eines Linearen Gleichungssystems:

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad A \in K^{(m,n)}, \vec{x} \in K^n, \vec{b} \in K^m \tag{3.445}$$

Falls $A = (\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n})$, so ist ein alternative Darstellung:

$$x_1 \cdot \vec{a_1} + x_2 \cdot \vec{a_2} + \cdots + x_n \cdot \vec{a_n} = \vec{b} \tag{3.446}$$

3.4.2. Allgemeine Form einer linearen Matrizengleichung (LMG)

Gegeben:

$$A \in K^{(m,n)} \qquad B \in K^{(m,p)} \qquad K \text{ Körper} \tag{3.447}$$

Gesucht:

$$L = \left\{ X \in K^{(n,p)} \mid AX = B \right\} \tag{3.448}$$

Sprechweisen:

(1) $AX = B$ — lineare Matrizengleichung für X (LMG)

(2) A — Koeffizientenmatrix

(3) B — Störmatrix / rechte Seite
$AX = B$ heißt *homogen*, falls $B = 0$ und *inhomogen*, falls $B \neq 0$.

(4) (A, B) — *erweiterte Koeffizientenmatrix* der LMG (mit $(A, B) \in K^{(m,n+p)}$)

Spezialfall:

$$\begin{aligned} &p = 1 \qquad X = \left(x\right) \in K^n \qquad B = \vec{b} \in K \\ &A\vec{x} = \vec{b} \end{aligned} \tag{3.449}$$

Beispiel:

$$K = \mathbb{R} \qquad m = n = p = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{LMG} \quad AX = B \tag{3.450}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \in R^{(2,2)} \tag{3.451}$$

$$M = (A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,4)} \tag{3.452}$$

Zeilenform der LMG:

$$\iff (1,2)\,X = (0,1) \tag{3.453}$$
$$(3,4)\,X = (0,-2) \tag{3.454}$$

Spaltenform der LMG:

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.455}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{3.456}$$

Skalare Form der LMG:

$$\iff \begin{array}{rcrcr} 1x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & 0 \\ 1y_1 & + & 2y_2 & = & 1 \\ 3y_1 & + & 4y_2 & = & -2 \end{array} \tag{3.457}$$

Beobachtung: Wenn man das lineare Gleichungssystem lösen kann, kann man auch die lineare Matrizengleichung lösen.

3.4.3. Umformungen einer linearen Matrizengleichung $AX = B$

Seien

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a_1} \\ \vdots \\ \underline{a_m} \end{pmatrix} \in K^{(m,n)} \qquad B = \begin{pmatrix} \underline{b_1} \\ \vdots \\ \underline{b_m} \end{pmatrix} \tag{3.458}$$

$$M = (A, B) = \begin{pmatrix} \underline{a_1} & \underline{b_1} \\ \vdots & \vdots \\ \underline{a_m} & \underline{b_m} \end{pmatrix} \tag{3.459}$$

$$AX = B \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a_1 X & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_m X & = & b_m \end{array} \right\} \tag{3.460}$$

Äquivalente Umformungen für die Zeilenform von $AX = B$:

(1) Vetrauschen zweier Gleichungen

(2) Multiplikation der i-ten Gleichung mit $\alpha \neq 0$.

$$\left\{\begin{matrix} \vdots & & \vdots \\ \underline{a_i}X & = & \underline{b_i} \\ \vdots & & \vdots \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} \vdots & & \vdots \\ \alpha\underline{a_i}X & = & \alpha\underline{b_i} \\ \vdots & & \vdots \end{matrix}\right\} \tag{3.461}$$

(3) Addition des α-fachen der i-ten Gleichung zur j-ten Gleichung

$$\left\{\begin{matrix} \vdots & & \vdots \\ \underline{a_i}X & = & \underline{b_i} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{a_j}X & = & \underline{b_j} \\ \vdots & & \vdots \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} \vdots & & \vdots \\ \underline{a_i}X & = & \underline{b_i} \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\alpha\underline{a_i} + \underline{a_j}\right)X & = & \alpha\underline{b_i} + \underline{b_j} \\ \vdots & & \vdots \end{matrix}\right\} \tag{3.462}$$

Gaußoperationen für Matrizen $M \in K^{(m,q)}$

(O1) Vertauschen zweier Zeilen von M

(O2) Multiplikation einer Zeile von M mit $\alpha \neq 0$

(O3) Addition des α-fachen einer Zeile von M zu einer anderen Zeile von M

$M \underset{g}{\mapsto} N$ — M lässt sich durch eine Folge von g Gaußoperationen in N überführen.

Satz 3.3. *Seien $A, A' \in K^{(m,n)}$ und $B, B' \in K^{(m,p)}$. Gilt*

$$(A, B) \underset{g}{\mapsto} \left(A', B'\right) \tag{3.463}$$

so gilt

$$AX = B \iff A'X = B' \tag{3.464}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus obigen Betrachtungen. □

Bemerkung $\underset{g}{\mapsto}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{(m,q)}$ (trivial). Gilt $M \underset{g}{\mapsto} N$, sind M und N Gaußäquivalent.

Beispiel:

$$L = \left\{x \in \mathbb{R}^{(2,2)} \mid AX = B\right\} \tag{3.465}$$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.466}$$

1	2	1	0	
2	5	5	2	−2 Zeile 1 zu Zeile 2
1	3	2	2	
1	2	1	0	
0	1	1	2	−1 Zeile 1 zu Zeile 3
1	3	2	2	
1	2	1	0	
0	1	1	2	−2 Zeile 2 zu Zeile 1
0	1	1	2	−1 Zeile 2 zu Zeile 3
1	0	-1	-4	
0	1	1	2	
0	1	0	0	

$$AX = B \iff A'X = B' \tag{3.467}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.468}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.469}$$

$$(0,0)\, X = (0,0) \tag{3.470}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.471}$$

Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{3.472}$$

3.4.4. Stufenmatrizen

3.6. $S \in K^{(m,n)}$ heißt *normierte Stufenmatrix* mit r Stufen vom Typ $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, falls gilt

(a) Die Spalten $k_1, \ldots, k_r)$ von S bilden die ersten r Spalten der Einheitsmatrix E_m, $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$

(b) $S(i,j) = 0$ für $i \geq r+1$ oder $j < k_i$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.473}$$

$r = 3$ Stufen, Typ $(2,4,5)$

3.4.5. Gauß-Jordan-Verfahren

Gegeben:

$$A \in K^{(m,n)} \qquad\qquad B \in K^{(m,p)} \tag{3.474}$$

Gesucht:

$$L = \left\{ X \in K^{(n,p)} \mid AX = B \right\} \tag{3.475}$$

Lösungsverfahren:

Schritt 1: Überführen von (A, B) durch Gaußoperationen in eine normierte Stufenmatrix (A', B'). Dies ist *immer* möglich.
Dann gilt $AX = B \iff A'X = B'$.

Schritt 2: Auswertung der Gleichung $A'xX = B'$. Da (A', B') Stufenmatrix ist, ist auch A' Stufenmatrix.

Fall 1: Stufenzahl $(A') <$ Stufenzahl (A', B').

$$\text{Zeilengleichung letzte Zeile } \underbrace{(0, 0, \dots, 0) \cdot X}_{=\underline{0}} = \underbrace{(0, 1, \dots, l)}_{\neq \underline{0}} \implies \text{keine Lösung} \tag{3.476}$$

Fall 2: Stufenzahl $A =$ Stufenzahl $(A', B') = r$

Fall 2.1: $r = n$ (Spaltenzahl $A =$ Spaltenzahl X)

Dann ist:

$$A' = \left(\begin{array}{c} E_n \\ \hline 0 \end{array} \right) \qquad \text{und } \left(A', B'\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_n & B_1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \tag{3.477}$$

Somit gilt dann:

$$A'X = B' \tag{3.478}$$

$$\iff EX = B_1 \tag{3.479}$$

$$\wedge 0X = 0 \tag{3.480}$$

$$\iff X = B_1 \qquad \implies \text{Lösung ist eindeutig} \tag{3.481}$$

$$L = \{B_1\} \tag{3.482}$$

Fall 2.2: $r < n$

A' sei Stufenmatrix mit r Stufen vom Typ $(k_1, \dots, k_r)$. Man bestimme die Lösung spaltenweise.

$$X' = (\vec{x_1}, \dots, \vec{x_p}) \qquad B' = \left(\vec{b_1}, \dots, \vec{b_p}\right) \qquad \vec{x_i} = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{nl} \end{pmatrix} \tag{3.483}$$

$$A'X = B' \iff A' \cdot \vec{x_i} = \vec{b_i} \tag{3.484}$$

Die r skalaren Gleichungen von $A'\vec{x_i} = \vec{b_i}$ werden nach der Variablen $x_{k_1 i}, \dots, x_{k_r i}$ aufgelöst.

Hinweis: Stufenvariablen sind gebundene Variablen. Die restlichen $n - r$ Variablen sind freie wählbar (freie Variablen, Parameter).

Daher ergibt sich eine Parameterdarstellung der Lösung $X = (\vec{x_1}, \dots, \vec{x_p})$ mit $d = p \cdot (n - r)$ Parametern (je $n - r$ Parameter pro Spalte von X).

Da $n - r < n$ gilt $d \geq 1$. Daher gibt es mindestens einen freien Parameter, d. h. unendlich viele Lösungen, falls $|K| = \infty$.

Beispiel:

$$(m, n, p) = (3, 4, 1) \qquad X = \vec{x} \qquad B = \vec{b} \tag{3.485}$$

Gesucht:

$$L = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\vec{x} = \vec{b}\right\} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.486}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{3.487}$$

x_1	x_2	x_3	x_4		
1	2	1	6	3	$\cdot(-1) + III$ nach III
0	0	1	4	2	
1	2	0	2	1	
1	2	1	6	3	
0	0	1	4	2	$\cdot(-1) + I$ nach I, $\cdot(-1) + III$ nach III
0	0	-1	-4	-2	
1	2	0	2	1	
0	0	1	4	2	
0	0	0	0	0	

Die Stufenvariablen sind also x_1 und x_3, da dort jeweils eine „Stufe“ ist. Alle anderen Variablen sind freie Variablen.

$$x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1 \tag{3.488}$$
$$x_3 + 4x_4 = 2 \implies x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_4 \tag{3.489}$$
$$\implies x_3 = 2 - 4x_4 \tag{3.490}$$

x_2, x_4 sind beliebig wählbar. Man setze $x_2 = s, x_4 = t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. Daraus ergibt sich die Parameterdarstellung der Lösung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2s - 2t \\ s \\ 2 - 4t \\ t \end{pmatrix} \tag{3.491}$$

$$L = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; s, t \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.492}$$

Geometrisch kann man dies als eine Ebene im $\mathbb{R}^4$ interpretieren.

3.4.6. Die inverse Matrix

Gegeben:

$$A \in K^{(n,n)} \qquad E = E_n \text{ Einheitsmatrix} \tag{3.493}$$

Satz 3.4. *Die lineare Matrizengleichung $AX = E$ besitzt entweder keine oder genau eine Lösung $X \in K^{(n,n)}$.*

Beweis. (Beweisskizze)

- Man zeige $(A, E) \underset{g}{\implies} (A', E')$, daher Stufenzahl$(A', E') = n$.
- 1. Fall: Stufenzahl$(A') < n \implies$ keine Lösung
- 2. Fall: Stufenzahl$(A') = n \implies$ Fall 2.1 tritt ein, daher gibt es genau eine Lösung

□

3.7. Besitzt die Gleichung $AX = E$ eine Lösung X, so heißt X *inverse Matrix* von A, in Zeichen $X = A^{-1}$. Die Matrix A heißt dann *invertierbar*.

Beispiel:

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)} \qquad AX = E \tag{3.494}$$

1	2	1	0	$\cdot(-2) + II$ nach II
2	3	0	1	
1	2	1	0	
0	-1	-2	1	$\cdot(-1)$
1	2	1	0	
0	1	2	-1	$\cdot(-2) + I$ nach I
1	0	-3	2	
0	1	2	-1	

$$AX = E \iff EX = A' \tag{3.495}$$

$$\iff X = A' \tag{3.496}$$

$$X = A' = A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.497}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)} \tag{3.498}$$

1	2	1	0	$\cdot(-2) + II$ nach II
2	1	0	1	
1	2	1	0	
0	0	-2	1	

Dies ist ein Widerspruch $((0,0)\,X = (-2,1))$. ↯
Daher ist A nicht invertierbar.

Wichtige Regeln:

(R1) Ist A invertierbar, so gelten folgende Aussagen:

$$A \cdot A^{-1} = E \tag{3.499}$$

$$A^{-1} \cdot A = E \tag{3.500}$$

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A \tag{3.501}$$

$$\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T} \tag{3.502}$$

(R2) Sind $A, B \in K^{(n,n)}$ invertierbar, so auch $A \cdot B$ und es gilt:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \tag{3.503}$$

Beweis. (R1)

$$A \cdot A^{-1} = E \tag{3.504}$$

folgt aus der Definition von A^{-1}. ✓

A invertierbar $\implies$ A^T invertierber (Beweis evtl. später).

Sei $B = \left(A^T\right)^{-1}$.

$$\stackrel{\text{Def.}}{\Longrightarrow} A^T B = E \tag{3.505}$$

$$\stackrel{()^T}{\Longrightarrow} B^T A = E^T = E \tag{3.506}$$

$$\stackrel{\cdot A^{-1}}{\Longrightarrow} B^T \underbrace{AA^{-1}}= E = EA^{-1} = A^{-1} \tag{3.507}$$

$$\Longrightarrow B^T = A^{-1} \tag{3.508}$$

$$\stackrel{()^T}{\Longrightarrow} B = \left(A^{-1}\right)^T \tag{3.509}$$

$$\Longrightarrow \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T \;\checkmark \tag{3.510}$$

$$\left(A^{-1}A\right)^T = A^T \left(A^{-1}\right)^T \tag{3.511}$$

$$= A^T \cdot \left(A^T\right) \tag{3.512}$$

$$= E \;\checkmark \tag{3.513}$$

$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ folgt unmittelbar aus den vorangegangenen Teilbeweisen. ✓

(R2) Sei $X = B^{-1}A^{-1}$.

$$\Longrightarrow ABX = A \underbrace{BB^{-1}}_{=E} A^{-1} \tag{3.514}$$

$$= AA^{-1} \tag{3.515}$$

$$= E \tag{3.516}$$

$$\Longrightarrow X = (AB)^{-1} \;\checkmark \tag{3.517}$$

Damit ist alles gezeigt. □

Bemerkung: Die Menge $Gl(n, K) = \left\{ A \in K^{(n,n)} \middle| A \text{ invertierbar} \right\}$ ist eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation. Sie wird auch als *lineare Gruppe der Ordnung n über dem Körper K* bezeichnet.

Beweis. (G0) Abgeschlossenheit der Operation.

$$\tilde{z} : A, B \in Gl(n, K) \implies AB \in Gl(n, K) \tag{3.518}$$

Folgt aus Eigenschaft R2. ✓

(G1) Assoziativität

$$\tilde{z} : \forall A, B, C \in Gl(n, K) : (AB)\, C = A\, (BC) \tag{3.519}$$

Gilt allgemein für Matrizenmultiplikation. ✓

(G2) Existenz eines neutralen Elements. Das neutrale Element ist die Einheitsmatrix $E = E_n$, denn

$$\forall A \in Gl(n, K) : AE = A \text{ sowie } EA = A \tag{3.520}$$

Zudem gilt $E \in Gl(n, K)$ und $E^{-1} = E$, da $EE = E$. ✓

(G3)

$$\tilde{z} : \forall A \in Gl(n, K)\ \exists B \in Gl(n, K) : AB = BA = E \tag{3.521}$$

$$\text{gilt für } B = A^{-1} \tag{3.522}$$

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E \text{ gilt nach R1} \tag{3.523}$$

$$A^{-1} \in Gl(n, K), \text{ da } \left(A^{-1}\right)^{-1} = A \in Gl(n, K)\ \checkmark \tag{3.524}$$

□

Anwendung von A^{-1}: Sei $A \in Gl(n, K)$, dann gilt

(1) Die Gleichung $AX = B$ hat genau eine Lösung, nämlich $X = A^{-1}B$.

(2) Die Gleichung $XA = B$ hat genau eine Lösung, nämlich $X = BA^{-1}$.

Beweis. (1)

$$
\begin{aligned}
AX &= B && (3.525)\\
\implies A^{-1}AX &= A^{-1}B && (3.526)\\
\implies EX &= A^{-1}B && (3.527)\\
\implies X &= A^{-1}B && (3.528)\\
X &= A^{-1}B && (3.529)\\
\implies AX &= AA^{-1}B && (3.530)\\
&= EB && (3.531)\\
&= B && (3.532)\\
\implies AX &= B && (3.533)\\
& && (3.534)
\end{aligned}
$$

(2) analog

□

(3) Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ (Spezialfall von (1)).

(4) Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$ hat genau eine Lösung, nämlich $\vec{x} = \vec{0}$ (Spezialfall von (3)), d. h. die einzige Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ ist die triviale Lösung.

3.5. Lineare Räume und Geometrie

3.5.1. Der Lineare Raum / Vektorraum

Gegeben:

- Körper K, Elemente von K heißen skalare Größen
- Menge V von *vektoriellen Größen / Vektoren*
- Operationen:
  - Operationen $+, \cdot$ in K
  - Addition $+$ auf V $\quad u, v \in V \mapsto u + v$ (Summe)
  - skalare Multiplikation $\alpha \in K, u \in V \mapsto \alpha \cdot u$ (α-faches von u)

3.8. V heißt *Vektorraum* über dem Körper K bzw. K-Vektorraum, falls gilt

(V1) $(V, +)$ ist kommutative Gruppe

(V2) $\forall u, v \in V \, \forall \alpha, \beta \in K$:

- $(\alpha + \beta)\, u = \alpha u + \beta u$
- $\alpha\,(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha\,(\beta u)$
- $1_K \cdot u = u$

- Das neutrale Element $0_V \in V$ bezüglich der Vektoraddition heißt *Nullvektor*.
- Das inverse Element $-u$ zu $u \in V$ bezüglich der Vektoraddition heißt *negativer Vektor* zu u.

Es gelten dabei folgende Aussagen:

(1) $0_K \cdot u = 0_V$

(2) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$

(3) $(-1) \cdot u = -u$

Beweis.

(1)

$$\begin{aligned}
0_K \cdot u &= (0_K + 0_K) \cdot u && (3.535)\\
&\overset{\text{V2}}{=} 0_K \cdot u + 0_K \cdot u && (3.536)\\
0_K \cdot u &= 0_K \cdot u + 0_K \cdot u \qquad |-(0_k \cdot u) && (3.537)\\
0_V &= 0_K \cdot u \ \checkmark && (3.538)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot 0_V &= \alpha\,(0_V + 0_V) && (3.539)\\
&= \alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V && (3.540)\\
\alpha \cdot 0_V &= \alpha 0_V + \alpha 0_V \qquad |-(\alpha \cdot 0_V) && (3.541)\\
0_V &= \alpha 0_V \ \checkmark && (3.542)
\end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
v &:= (-1) \cdot u && (3.543)\\
u + v &\overset{\text{V2}}{=} 1_k \cdot u + (-1)_K \cdot u && (3.544)\\
&\overset{\text{V2}}{=} (1_k + (-1)_K) \cdot u && (3.545)\\
&= 0_K \cdot u && (3.546)\\
&= 0_V && (3.547)\\
\implies \quad v &= -u \ \checkmark && (3.548)
\end{aligned}
$$

□

Für die Subtraktion gilt: $u - v = u + (-v)$

3.5.2. Standardvektorräume (Beispiele)

Vektorraum der $K^{(m,n)}$ der Matrizen vom Format (m, n)

- K beliebiger Körper
- $V = K^{(m,n)}$
- Addition: Matrizenaddition
- Multiplikation: skalare Multiplikation für Matrizen

Spezialfälle

- $V = K^m = K^{(m,1)}$ — Vektorraum der Spaltenvektoren
- $V = K^{(1,1)} = K$ — Jeder Körper ist ein Vektorraum in sich selbst

Vektorraum reellwertiger Abbildungen

Vergleiche dazu Abschnitt 1.1.2.

- $K = \mathbb{R}$
- $V = \{f : I \to \mathbb{R}\}$, wobei I ein Intervall ist

Dies ist die Menge der Abbildungen von I in R. $V = \text{Abb}\,(I, \mathbb{R})$

Operationen

$$f, g : I \to \mathbb{R} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{3.549}$$

Summe:

$$f + g : I \to \mathbb{R} \tag{3.550}$$

$$\text{mit } (f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in I \tag{3.551}$$

Skalare Multiplikation:

$$(\alpha \cdot f) : I \to \mathbb{R} \tag{3.552}$$

$$\text{mit } (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) \qquad \forall x \in I \tag{3.553}$$

Damit gelten (V1) und (V2), also ist V ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$.
0_V ist die *Nullabbildung*.

Vektorraum beliebigwertiger Abbildung

- K beliebiger Körper
- $I \neq \varnothing$ beliebige Menge
- W beliebiger K-Vektorraum
- $V : \{f : I \to W\} =: \text{Abb}\,(I, W)$
- Addition und skalare Multiplikation wie im vorangegangenen Abschnitt, d. h. für $f, g : I \to W, \alpha \in K$

Operationen

$$f + g : I \to W \tag{3.554}$$

$$\text{mit } (f+g)(x) = f(x) + g(x) \tag{3.555}$$

$$\alpha \cdot f : I \to W \tag{3.556}$$

$$\text{mit } (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) \tag{3.557}$$

Auch hier gelten sowohl (V1) als auch (V2), also ist V ein K-Vektorraum.

Spezialfälle

- $K = \mathbb{R} \qquad I = [a, b] \in \mathbb{R} \qquad W = \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad V = \{f \mid f : I \to \mathbb{R}^n\} \tag{3.558}$$

  f beschreibt eine Bewegung im $\mathbb{R}^n$. $f(t) \in \mathbb{R}^n$ ist der Ortsvektor zum jeweiligen Zeitpunkt t.

Vektorraum $K[x]$ der Polynome über K

- K beliebiger Körper
- $K[x] = \{p(x) \mid P \text{ Polynom über } K\}$
- Addition ist die Addition von Polynomen.
- Skalare Multiplikation ist die skalare Multiplikation von Polynomen.

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \alpha \in K \tag{3.559}$$

$$\alpha \cdot p = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha \cdot a_k) x^k \tag{3.560}$$

(V1) und (V2) gelten. Genauso ist $K[[x]]$ der Vektorraum der formalen Potenzreihen.

Körperwechsel

- K Körper
- $L \subseteq K$ Unterkörper

Jeder K-Vektorraum ist auch ein L-Vektorraum.

So ist beispielsweise jeder reellwertige Vektorraum auch ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, ist also auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

3.5.3. Grundbegriffe der Vektorraumtheorie

Gegeben:

- K-Vektorraum V

Lineare Unterräume

> **3.9.** $U \subseteq V$ heißt *linearer Unterraum* von V, falls U ein K-Vektorraum ist.

Satz 3.5. *$U \subseteq V$ ist linearer Unterraum von V genau dann, wenn $\forall a, b \in V \, \forall \alpha \in K$ gilt:*

(UR1) $0_V \in U$

(UR2) $a, b \in U \implies a + b \in U$

(UR3) $a \in U, \alpha \in K \implies \alpha a \in U$

Beweis. (i) In GuDS wurde bereits gezeigt, dass $(U, +)$ eine Untergruppe von $(V, +)$ genau dann ist, wenn gilt:

(U1) $0_V \in U$

(U2) $a, b \in U \implies a + b \in U$

(U3) $a \in U \implies -a \in U$

(ii) ($\Rightarrow$) Sei $U \subseteq V$ ein K-Vektorraum, d. h. (V1) und (V2) gelten.

$$\overset{\text{(V1)}}{\implies} U \subseteq V \quad U \text{ Gruppe von } (V, +) \tag{3.561}$$

$$\overset{\text{(i)}}{\implies} \text{(U1), (U2)} \implies \text{(UR1), (UR1)} \tag{3.562}$$

(UR3) folgt aus der Abgeschlossenheit der skalaren Multiplikation in U.

($\Leftarrow$) Aus (UR1), (UR2), (UR3) mit $\alpha = -1$ folgt:

$$\text{(U1), (U2), (U3)} \implies U \text{ ist Untergruppe von } (V, +) \tag{3.563}$$

$$\implies \text{(V1)} \tag{3.564}$$

Die Regeln aus (V2) gelten für V, also auch für jede Teilmenge.

$\square$

Daraus folgt:

(1) $U = \{0_V\}$ ist ein Unterraum von V da (UR1), (UR2), (UR3) offensichtlich gelten.

(2) $U = V$ ist ein Unterraum von V (folgt aus der Definition).

Beispiele

(1) Homogenes lineares Gleichungssystem

Sei $A \in K^{(m,n)}$. Dann ist

$$U = \left\{ \vec{x} \in K^n \;\middle|\; A\vec{x} = \vec{0} \right\} \tag{3.565}$$

ein linearer Unterraum von K^n.

Beweis.

(UR1) $\vec{0} \in U$, da $A\vec{0} = \vec{0}$ ✓

(UR2)

$$\vec{a}, \vec{b} \in U \implies A\vec{a} = \vec{0}, A\vec{b} = \vec{0} \tag{3.566}$$

$$\implies A\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = A\vec{a} + A\vec{b} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \tag{3.567}$$

$$\implies \vec{a} + \vec{b} \in U \checkmark \tag{3.568}$$

(UR3)

$$\vec{a} \in U, \alpha \in K \implies A(\alpha\vec{a}) = \alpha(A\vec{a}) = \alpha\vec{0} = \vec{0} \qquad (3.569)$$
$$\implies \alpha\vec{a} \in U \qquad (3.570)$$

□

(2) stetige Funktionen

Es sei $I = [a, b]$. Dann ist $U = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig }\}$ ein Unterraum von $V = \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$.

Beweis.

(UR1) 0_V ist Nullabbildung $0_V(x) = 0\ \forall x \in I$ ist stetig, auf I, also $0_V \in U$. ✓

(UR2)

$$f, g \in U \implies f, g : I \to \mathbb{R} \text{ stetig} \qquad (3.571)$$
$$\implies f + g : I \to \mathbb{R} \text{ stetig} \qquad (3.572)$$
$$\implies f + g \in U\ \checkmark \qquad (3.573)$$

(UR3)

$$f \in U, \alpha \in \mathbb{R} \implies f : I \to \mathbb{R} \text{ stetig} \qquad (3.574)$$
$$\implies \alpha \cdot f : I \to \mathbb{R} \text{ stetig} \qquad (3.575)$$
$$\implies \alpha f \in U \qquad (3.576)$$

□

Bezeichnung

$$C^0(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig auf } I\} \qquad (3.577)$$

ist ein K-Vektorraum.

Linearkombinationen/Erzeugendensystem

3.10. b heißt *Linearkombination* von $a_1, \ldots, a_n \in V$, falls gilt:

$$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \qquad \text{mit } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \qquad (3.578)$$

3.11. Für $M \subseteq V$ sei

$$[M] = \{x \in V \mid x \text{ ist LK von endlich vielen Vektoren aus } M\} \tag{3.579}$$
$$[\varnothing] = \{0_V\} \ . \tag{3.580}$$

$[M]$ heißt *lineare Hülle* von M.

Beispiele:

$$M = \{a\} \implies [a] = \{x = \alpha \cdot a \mid \alpha \in K\} \tag{3.581}$$
$$M = \{a, b\} \implies [a, b] = [\{a, b\}] = \{x \in V \mid x = \alpha a + \beta b \quad \alpha, \beta \in K\} \tag{3.582}$$

Satz 3.6 (Eigenschaften der linearen Hülle)**.** *Für beliebige Teilmengen $M, N, U \subseteq V$ des K-Vektorraums V gilt*

(H0) *$[M] \subseteq V$ ist linearer Unterraum von V, der von M erzeugte lineare Unterraum von V*

(H1) $M \subseteq [M]$

(H2) $M \subseteq N \implies [M] \subseteq [N]$

(H3) $[[M]] = [M]$

(H4) *$U \subseteq V$ linearer Unterraum* $\iff [U] = U$

(H5) *$U \subseteq V$ linearer Unterraum, $M \subseteq U$* $\implies [M] \subseteq U$

(H6) $[M] \subseteq [N] \iff M \subseteq [N]$

(H7) $[M] = [N] \iff M \subseteq [N] \wedge N \subseteq [M]$

(H8) $\forall a \in M : [M \setminus \{a\}] = [M] \iff a \in [M \setminus \{a\}]$

Beweis.

(H0)

(UR1)

$$\overset{\mathrm{z}}{\mathrm{z}} : 0_V \in M \tag{3.583}$$
$$M = \varnothing \implies [M] = \{0_V\} \tag{3.584}$$
$$\implies 0_V \in [M] \tag{3.585}$$
$$M \neq \varnothing \implies \exists a \in M \tag{3.586}$$
$$\implies 0_K \cdot a = 0_V \in [M] \tag{3.587}$$

(UR2)

$$\text{z̃} : a, b \in [M] \implies a + b \in [M] \tag{3.588}$$
$$a, b \in [M] \implies a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \tag{3.589}$$
$$b = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_m \tag{3.590}$$
$$\text{mit } a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in M \tag{3.591}$$
$$\text{und } \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in K \tag{3.592}$$
$$\implies a + b = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_m b_m \tag{3.593}$$
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in K \tag{3.594}$$
$$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in M \tag{3.595}$$
$$\implies a + b \in [M] \tag{3.596}$$

(UR3)

$$\text{z̃} : a \in [M], \alpha \in K \implies \alpha a \in [M] \tag{3.597}$$
$$a \in [M] \implies a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \tag{3.598}$$
$$\alpha_i \in K, a_i \in M \tag{3.599}$$
$$\implies \alpha a = \underbrace{(\alpha\alpha_1)}_{\in K} a_1 + \cdots + \underbrace{(\alpha\alpha_n)}_{\in K} a_n \tag{3.600}$$
$$\implies \alpha a \in [M] \tag{3.601}$$

(H1)

$$a \in M \implies a = 1 \cdot a \tag{3.602}$$
$$\implies a \in [M] \tag{3.603}$$
$$\implies M \in [M] \tag{3.604}$$

(H2)

Vorraussetzung:

$$M \subseteq N \tag{3.605}$$

Behauptung:

$$[M] \subseteq [N] \tag{3.606}$$

Beweis:

$$\text{Sei } a \in [M] \implies a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \tag{3.607}$$
$$\alpha_i \in K, a_i \in M \tag{3.608}$$

$M \subseteq N$

$$\implies a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \tag{3.609}$$
$$\alpha_i \in K, a_i \in N \tag{3.610}$$
$$\implies a \in [N] \tag{3.611}$$

(H3) $[M] \subseteq [[M]]$ folgt aus (H1).

$$\text{z}: [[M]] \subseteq [M] \tag{3.612}$$
$$\text{Sei } a \in [[M]] \implies a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \tag{3.613}$$
$$\alpha_i \in K, a_i \in [M] \tag{3.614}$$
$$\text{d. h. } a = \beta_{i1} b_{i1} + \cdots + \beta_{im_i} b_{im_i} \tag{3.615}$$
$$\beta_{ij} \in K, b_{ij} \in M \tag{3.616}$$
$$\implies a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} b_{ij} \tag{3.617}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \underbrace{(\alpha_i \cdot \beta_{ij})}_{\in K} \cdot \underbrace{b_{ij}}_{\in M} \tag{3.618}$$
$$\implies a \in [M] \tag{3.619}$$
$$\implies [[M]] \subseteq [M] \tag{3.620}$$

(H4) U linearer Unterraum von $V \iff [U] = U$

$$\implies U \subseteq [U] \text{ folgt aus (H1)} \tag{3.621}$$
$$\text{z}: [U] \subseteq U \tag{3.622}$$
$$\text{Sei } a \in [U] \implies a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \tag{3.623}$$
$$\alpha_i \in K, a_i \in U \tag{3.624}$$
$$\overset{\text{(UR2/3)}}{\implies} a \in U \tag{3.625}$$

Die Rückrichtung folgt aus (H0).

(H5)

$$\text{z}: U \text{ linearer Unterraum }, M \subseteq U \implies [M] \subseteq U \tag{3.626}$$
$$\text{Sei } a \in [M] \implies a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \tag{3.627}$$
$$\alpha_i \in K, a_i \in M \tag{3.628}$$
$$\overset{M \subseteq U}{\implies} a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \tag{3.629}$$
$$\alpha_i \in K, a_i \in U \tag{3.630}$$
$$\overset{\text{(UR2/3)}}{\implies} a \in U \tag{3.631}$$
$$\implies [M] \subseteq U \tag{3.632}$$

(H6)

$$\text{z}: [M] \subseteq [N] \iff M \subseteq [N] \tag{3.633}$$
$$\Rightarrow: M \overset{\text{(H1)}}{\subseteq} [M] \subseteq [N] \tag{3.634}$$
$$\Leftarrow: \text{folgt aus (H5) und (H0) mit } U = [N] \tag{3.635}$$

(H7) $[M] = [N] \iff M \subseteq [N] \wedge N \subseteq [M]$ folgt aus (H6)

(H8)

$$[M \setminus \{a\}] = [M] \overset{(H7)}{\iff} M \setminus \{a\} \subseteq [M] \wedge M \subseteq [M \setminus \{a\}] \tag{3.636}$$
$$\iff M \subseteq [M \setminus \{a\}] \tag{3.637}$$
$$\iff a \in [M \setminus \{a\}] \tag{3.638}$$

$\square$

Bemerkung.

(1) Die Eigenschaften (H1) – (H3) besagen, dass $[\cdot]$ ein sogenannter *Hüllenoperator* ist.

(2) Aus (H5) folgt $[M]$ ist der kleinste (bzgl. $\subseteq$) lineare Unterraum, der M enthält.

Beispiel:

$$K = \mathbb{R} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{3.639}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{3.640}$$

Gilt $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$?
Aus Eigenschaft (H8) folgt:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \iff \vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \tag{3.641}$$

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \qquad \iff \vec{c} = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{3.642}$$

Daraus lässt sich ein inhomogenes lineares Gleichungssystem erstellen:

α	β		
1	2	2	$\cdot(-2)$ nach III
0	1	2	
2	1	-2	
1	2	2	$II \cdot (-2)$ nach I
0	1	2	
0	-3	-6	$II \cdot (3)$ nach III
1	0	-2	
0	1	2	
0	0	0	

Daraus folgt:

$$\alpha = -1 \qquad\qquad \beta = 2 \tag{3.643}$$

Und somit:

$$\implies \vec{c} = -2\vec{a} + 2\vec{b} \tag{3.644}$$

$$\implies \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \tag{3.645}$$

3.12. M heißt *Erzeugendensystem* eines linearen Unterraumes $U \subseteq V$, wenn $[M] = U$.

Lineare (Un-)Abhängigkeit, Basis und Dimension

Sei $M \subseteq V$ eine Vektormenge.

3.13. M heißt *linear abhängig*, falls es ein $a \in M$ gibt, der Linearkombination der anderen Vektoren aus M ist.

$$\exists a \in M : a \in [M \setminus \{a\}] \tag{3.646}$$

Andernfalls heißt M *linear unabhängig*.

3.14. M heißt *Basis* des linearen Unterraumes U, falls M ein lineare unabhängiges Erzeugendensystem von U ist.

Beispiel:

$$K = \mathbb{R} \qquad\qquad V = \mathbb{R}^3 \tag{3.647}$$

(1)

$$U = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (1, 1, 1)\,\vec{x} = 0\right\} \tag{3.648}$$

ist Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, also ist U ein linearer Unterraum.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3.649}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \tag{3.650}$$

$$x_2 = s \tag{3.651}$$

$$x_3 = t \tag{3.652}$$

$$\implies x_1 = -x_2 - x_3 = -s - t \tag{3.653}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s, t \in \mathbb{R} \tag{3.654}$$

$$\implies M = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ Erzeugendensystem von } U \tag{3.655}$$

M ist zudem linear unabhängig, da

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \tag{3.656}$$

$$\text{und} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] . \tag{3.657}$$

Somit ist M Basis von U.[2]

(2)

$$U = \mathbb{R}^3 \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{3.658}$$

$$U = \left[\vec{0} \right] , \tag{3.659}$$

$$\text{da } \forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.660}$$

B ist linear unabhängig, da kein Einheitsvektor Linearkombination der anderen ist. Demnach ist B basis des $\mathbb{R}^3$.

[2] Das Gauß-Jordan-Verfahren liefert immer eine Basis.

Satz 3.7 (Austauschsatz, Steinitz)**.** *Sei V ein K-Vektorraum und A, B linear unabhängige Mengen. Dann gilt:*

$$|B| > |A| \implies \exists b \in B \setminus A : A \cup \{b\} \text{ ist linear unabhängig} \tag{3.661}$$

(ohne Beweis)

Beispiel:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{3.662}$$

$$|A| = 2 \qquad |B| = 3 \tag{3.663}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist linear unabhängig.} \tag{3.664}$$

Offenbar gilt:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \tag{3.665}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \tag{3.666}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \tag{3.667}$$

Satz 3.8 (Hauptsatz der Vektorraumtheorie)**.**

(1) Jeder K-Vektorraum hat eine Basis.

(2) Sind $B_1, B_2 \leq V$ Basen von V, so gilt $|B_1| = |B_2|$ d. h. je zwei Basen sind gleich mächtig.

Beweis. (Skizze)
Fall 1: V besitzt ein endliches Erzeugendensystem E.
Ist E nicht linear unabhängig, $\exists a \in E$ mit $a \in [E \setminus \{a\}]$. $E_{neu} = E \setminus \{a\}$ ist Erzeugendensystem von V (iterieren, bis E_{neu} linear unabhängig).
Fall 2: $\nexists$ endliches Erzeugendensystem. (schwerer) □

Besitzt V eine endliche Basis B, so definiert man

$$\dim V = \dim_K V = |B| \tag{3.668}$$

Dimension von V.
Besitzt V kein endliches Erzeugendensystem, so ist $\dim V = \infty$.

Bemerkung.

$$\dim V = \infty \iff \exists \text{ unendliche lineare unabhängige Menge} \tag{3.669}$$

Beispiele:

- Standardbasis des Vektorraums $V = \mathbb{R}^n$:

$$B = \left\{ \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{3.670}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n \tag{3.671}$$

- $V = \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} = \mathrm{Abb}\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$\dim\,(V) = \infty \tag{3.672}$$

  Beispiel für eine unendliche linear unabhängige Menge:

$$\{f_a \mid a \in \mathbb{R}\} \text{ mit } f_a\,(x) = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ 1 & x = a \end{cases} \tag{3.673}$$

Bemerkung. Jeder lineare Unterraum eines Vektorraums ist ein Vektorraum und besitzt damit eine Basis und eine eindeutig definierte Dimension.

Beobachtung: Sei $U \subseteq V$ linearer Unterraum mit $\dim\,(U) = d$. Dann gilt:

(D1) Jede Menge von d linear unabhängigen Vektoren aus U bilden eine Basis von U.

(D2) Je $d + 1$ Vektoren aus U sind linear abhängig.

(D1) und (D2) folgen aus dem Austauschsatz.

Bemerkung.

$$\dim\,(U) = 0 \iff U \text{ hat Basis } B \text{ mit } |B| = 0 \tag{3.674}$$

$$\iff \varnothing \text{ ist Basis von } U \tag{3.675}$$

$$\iff U = [\varnothing] = \{0_V\} \tag{3.676}$$

Kriterium für lineare Unabhängigkeit:

- $$\{a\} \text{ linear abhängig } \iff a \in [\varnothing] \iff a = 0_V$$

- $$\begin{aligned} \{a, b\} \text{ linear abhängig } : &\iff a \in [b] \lor b \in [a] \\ &\iff \exists \beta : a = \beta b \lor \exists \alpha : b = \alpha a \\ &\iff \exists \beta : a - \beta b = 0_V \lor \exists \alpha : \alpha a - b = 0_V \\ &\iff \text{Die Gleichung } \alpha_1 a + \alpha_2 b = 0_V \text{ hat Lösung mit} \\ &\qquad \alpha_1 \neq 0 \lor \alpha_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Für $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ gilt:

- Besitzt die Gleichung
$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0_V \tag{3.677}$$
eine Lösung $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ deart, dass $\exists i : \alpha_i \neq 0_K$, dann ist M linear abhängig (Umstellen nach $a_i \implies a_i \in [M \setminus \{a_i\}]$).
- Besitzt die Gleichung nur die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, so ist M linear unabhängig.

Folgerung. Ist M linear unabhängig, dann besitzt jeder Vektor $x \in [M]$ eine *eindeutige* Darstellung als Linearkombination von M.

Beweis.

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \qquad I \tag{3.678}$$
$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n \qquad II \tag{3.679}$$
$$0_V = (\alpha_1 - \beta_1)\, a_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\, a_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\, a_n \qquad I - II \tag{3.680}$$

Da M linear unabhängig:
$$\implies \alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0 \tag{3.681}$$
$$\implies \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n \tag{3.682}$$

□

Basisbestimmung und Rang

Gegeben:

- $A = (\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n})$ Matrix mit Spaltenvektoren $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n} \in \mathbb{R}^n$
- $W = [\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}]$ linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ (*Spaltenraum* von A)

Gesucht: Basis B von W und dim W (*Rang* der Matrix A, $\operatorname{rg}(A)$).

$$\operatorname{rg}(A) = \dim(W) = \dim(\mathrm{SR}(A)) \tag{3.683}$$

Bemerkung:

$$A = (\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}) \tag{3.684}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \tag{3.685}$$

$$\implies A\vec{x} = x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + \cdots + x_n\vec{a_n} \tag{3.686}$$

$$\implies A\vec{x} \text{ ist Linearkombination von } \vec{a_1}, \dots, \vec{a_n} \tag{3.687}$$

$$\implies W = [\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}] = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in K^n\} \tag{3.688}$$

$$\text{ist Wertebereich der Abbildung} \tag{3.689}$$

$$\vec{x} \in K^n \mapsto A\vec{x} \in K^m \tag{3.690}$$

Lösung: Ziel ist die Streichung der Spaltenvektoren, die Linearkombinationen der anderen sind.

(1) Überführen von A durch Gaußoperationen in die Stufenmatrix $S = (\vec{s_1}, \dots, \vec{s_n})$. Dann gilt

$$A\vec{x} = \vec{0} \qquad x_1\vec{a_1} + \cdots + x_n\vec{a_n} = \vec{0} \tag{3.691}$$

$$S\vec{x} = \vec{0} \qquad x_1\vec{s_1} + \cdots + x_n\vec{s_n} = \vec{0} \tag{3.692}$$

Dann gibt es in A und S für Spaltenvektoren dieselben linearen Abhängigkeiten.

(2) Ist S Stufenmatrix mit r Stufen vom Typ $(k_1, \dots, k_r)$, so sind die Spaltenvektoren $\vec{s_{k_1}} = \vec{e_1}, \dots, \vec{s_{k_r}} = \vec{e_r}$ linear unabhängig und alle anderen Spalten von S sind Linearkombinationen davon. Dasselbe gilt auch für die Spalten von A.

$$\implies B = \{\vec{a_{k_1}}, \dots, \vec{a_{k_1}}\} \text{ ist Basis von } W \tag{3.693}$$

$$\operatorname{rg}(A) = \dim W = r \tag{3.694}$$

Beispiel:

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3.695}$$

$$\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{a_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{3.696}$$

Gesucht ist die Basis B von $[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}]$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \tag{3.697}$$

Mittels Gauß-Jordan-Verfahren:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.698}$$

$\{\vec{s_1}, \vec{s_2}, \vec{s_4}\}$ sind linear unabhängig, also auch $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_4}\}$. Da $\vec{s_3} = -1\vec{s_2} + 2\vec{s_2}$, ist $\vec{a_3} = -\vec{a_1} + 2\vec{a_2}$.

Die Basis von W ist $B = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_4}\}$.

Eigenschaften des Ranges für $A = K^{(m,n)}$

(R1) $\operatorname{rg}(A) =$ maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A

(R2) $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left(A^T\right) =$ maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von $A =$ Dimension des Zeilenraumes von A. Der Zeilenraum bleibt durch Gaußoperationen unverändert.

(R3) Bei Gaußoperationen bleibt der Rang gleich.

(R4) *Dimensionsformel:* Für den linearen Unterraum

$$U = \left\{\vec{x} \in K^n \;\middle|\; A\vec{x} = \vec{0}\right\} \tag{3.699}$$

gilt

$$\dim(U) - r = n - r \tag{3.700}$$

$$= n - \operatorname{rg}(A) \tag{3.701}$$

(R5) *Rangkriterium für die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen:* $A\vec{x} = \vec{b}$ hat wenigstens eine Lösung $\vec{x} \in K^n$ genau dann, wenn $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left(A, \vec{b}\right)$.

(R6) $A \in K^{(m,n)}$ ist invertierbar, wenn $\operatorname{rg}(A) = n$.

Bemerkung.

(1) $\operatorname{rg}(A) =$ Stufenzahl S

(2) $A\vec{x} = \vec{b}$ hat Lösung $\vec{x}$ genau dann, wenn $\vec{b}$ Linearkombination der Spalten von A ist.

5.4. Affine Unterräume

5.4.1. Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ als Punktraum

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

Interpretationsmöglichkeiten:

- Vektor (*Verbindungs*vektor/*Richtungs*vektor)
- Punkt (*Orts*vektor)

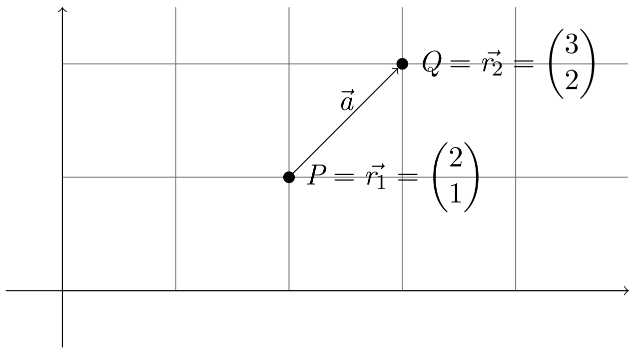

Abbildung 5.8.: Vektoren im $\mathbb{R}^2$

(a) Verbindungsvektoren/Richtungsvektoren zweier Punkte
   - Punkt $P = \vec{r_1}$
   - Punkt $Q = \vec{r_2}$
   - Verbindungsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$

(b) Abtragen eines Vektors zu einem Punkt
   - Vektor $\vec{a}$
   - Punkt $\vec{r_1}$
   - Punkt $\vec{r_2} = \vec{r_1} + \vec{a}$

(c) Koordinaten eines Punktes ($n = 2$, d. h. $\mathbb{R}^2$)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{5.702}$$

$$\Longrightarrow \vec{r} = \vec{0} + x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} \tag{5.703}$$

5.15. (x_1, x_2) heißen die *Koordinaten* des Punktes $P = \vec{r}$ bezüglich des **affinen Koordinatensystems** $\left(\vec{0}, \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}\right)$.

(d) Abtragen einer Vektormenge an einem Punkt

- Vektormenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$
- Punkt $\vec{r_0} \in \mathbb{R}^n$
- Punktmenge $\vec{r_0} + U$

Beispiel:

$$n = 2 \qquad \vec{r_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{5.704}$$

(a)

$$U = \left\{\vec{0}, \vec{a}, 2\vec{a}\right\} \tag{5.705}$$

$$\implies \vec{r_0} + U = \left\{\vec{r_0} + \vec{0}, \vec{r_0} + \vec{a}, \vec{r_0} + \vec{2_a}\right\} \tag{5.706}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \tag{5.707}$$

$$\tag{5.708}$$

(b)

$$U = [\vec{a}] = \{\vec{x} \mid \vec{x} = t\vec{a}, t \in \mathbb{R}\} \tag{5.709}$$

$$\vec{r_0} + U = \{\vec{x} = \vec{r_0} + t\vec{a} \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{5.710}$$

5.4.2. Affine Unterräume von $\mathbb{R}^n$

5.16. Die Vektormente (Punktmenge) $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$\Gamma = \vec{r_0} + U \tag{5.711}$$

heißt **affiner Unterraum** des $\mathbb{R}^n$, falls gilt $\vec{r_0} \in \mathbb{R}^n$ und $U \in \mathbb{R}^n$ ist ein (linearer) Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

U ist durch Γ eindeutig bestimmt ($\vec{r_0}$ hingegen nicht).

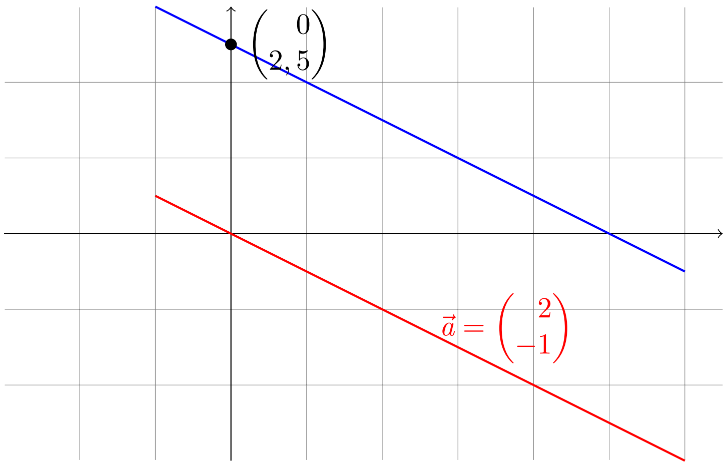

Abbildung 5.9.: Abtragen einer Vektormenge an einem Punkt. Das Ergebnis ist (hier) eine Gerade.

5.17.

$$\dim(\Gamma) = \dim(U) \tag{5.712}$$

heißt **Dimension** von Γ.

Für einen affinen Unterraum $\Gamma = \vec{r_0} + U$ gilt:

(1) $\vec{r} \in \Gamma \iff \vec{r} = \vec{r_0} + \vec{x}$ mit $\vec{x} \in U \implies \vec{r} - \vec{r_0} \in U$

(2) $\vec{0} \in U$, woraus folgt: $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{0} = \vec{r_0} \in \Gamma$

(3) Ist $\vec{r_1} \in \Gamma$, so ist $\Gamma = \vec{r_1} + U$. Jeder Punkt in Γ kann also aus Ausgangspunkt für Γ benutzt werden.

Parameterdarstellung von $\Gamma = \vec{r_0} + U$. Ist $d := \dim \Gamma = \dim U \geq 1$, so wählen wir eine Basis $\{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_d}\}$ von U.

$$U = [\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_d}] = \{\vec{x} = t_1\vec{a_1} + t_2\vec{a_2} + \cdots + t_d\vec{a_d} \mid t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R}\} \tag{5.713}$$

Für $\Gamma = \vec{r_0} + U$ gilt dann:

$$\vec{r} \in \Gamma \iff \underbrace{\vec{r} = \vec{r_0} + t_1\vec{a_1} + t_2\vec{a_2} + \cdots + t_d\vec{a_d}}_{\text{Parameterdarstellung von } \Gamma} \text{ für gewisse } t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R}$$

Spezialfälle:

- $d := \dim \Gamma = 1 \implies \Gamma = \vec{r_0} + [\vec{a_1}]$ – Gerade
- $d = 2 \implies \Gamma = \vec{r_0} + [\vec{a_1}, \vec{a_2}]$ – Ebene
- $d = n \implies U = \mathbb{R}^n \implies \Gamma = \vec{r_0} + \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$

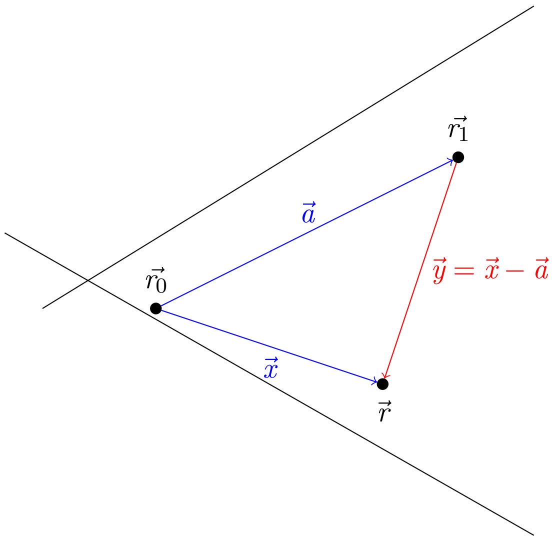

Abbildung 5.10.: $\vec{r}$ kann sowohl über $\vec{r_0}$ als auch über $\vec{r_1}$ erreicht werden.

Bemerkung. Sämtliche obige Definitionen und Aussagen können auf beliebige Vektorräume verallgemeinert werden:

$\mathbb{R}^n$	Vektorraum V über dem Körper K
$\vec{r_0} \in \mathbb{R}^n$	$\vec{r_0} \in V$ (beliebiger Vektor)
$\Gamma = \vec{r_0} + U$	$\vec{r_0} \in U$, U Unterraum von V
affiner Unterraum, falls U linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist	affiner Unterraum von V, falls U linearer Unterraum von V ist.

Parameterfreie Darstellung von $\Gamma = \vec{r_0} + U$. Γ ist Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

Beispiel:

$$\Gamma = \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; A\vec{r} = \vec{b} \right\} \tag{5.714}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \tag{5.715}$$

Mittels Gaußverfahren:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{5.716}$$

$$\Longrightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2+t \\ t \end{pmatrix} \tag{5.717}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \tag{5.718}$$

Somit ergibt sich für die parameterfreie Darstellung:

$$\Longrightarrow \Gamma = \vec{r_0} + [\vec{a}] \text{ mit } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.719}$$

5.4.3. Hauptsatz über lineare Gleichungssysteme

Satz 5.9. *Seien* $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ *und*

$$\Gamma = \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; A\vec{r} = \vec{b}\right\} \tag{5.720}$$

$$U = \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; A\vec{r} = \vec{0}\right\} \tag{5.721}$$

Dann gilt:

(1) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist linearer Unterraum mit* $\dim(U) = n - \operatorname{rg}(A)$

(2) $\Gamma \neq \varnothing \iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left(A, \vec{b}\right)$

(3) Ist $\Gamma \neq \varnothing$ *und* $\vec{r_0} \in \Gamma$*, so ist* Γ *ein offener Unterraum mit* $\Gamma = \vec{r_0} + U$ *und* $\dim(\Gamma) = n - \operatorname{rg}(A)$

Beweis. (1) Siehe (5.3.1) und (5.3.5) (R4)

(2) Siehe (5.3.5) (R5)

(3) $\dim(\Gamma) = n - \operatorname{rg}(A)$ folgt aus (1) und der Definition von Γ.

$$\text{noch } \not{z}\text{:} \quad \text{(a) } \Gamma \subseteq \vec{r_0} + U \text{ und (b) } \vec{r_0} + U \subseteq \Gamma \tag{5.722}$$

(a) Sei $\vec{r} \in \Gamma$.

$$\Longrightarrow \vec{r} = \vec{r_0} + \vec{x} \text{ mit } \vec{x} = \vec{r} - \vec{r_0} \tag{5.723}$$

$$\Longrightarrow A\vec{x} = A(r - \vec{r_0}) \tag{5.724}$$

$$= A\vec{r} - A\vec{r_0} \tag{5.725}$$

$$= \vec{b} - \vec{b} = \vec{0} \tag{5.726}$$

$$\Longrightarrow \vec{x} \in U \tag{5.727}$$

$$\Longrightarrow \vec{r} = \vec{r_0} + \vec{x} \in \vec{r_0} + U \tag{5.728}$$

(b)

$$\vec{r} \in \vec{r_0} + U \tag{5.729}$$
$$\implies \vec{r} = \vec{r_0} + \vec{x} \quad \exists \vec{x} \in U \tag{5.730}$$
$$\implies A\vec{r} = A\left(\vec{r_0} + \vec{x}\right) \tag{5.731}$$
$$= A\vec{r_0} + A\vec{x} \tag{5.732}$$
$$\underset{\substack{\vec{r_0}\in\Gamma \\ \vec{x}\in U}}{=} \vec{b} \tag{5.733}$$
$$\implies \vec{r} \in \Gamma \tag{5.734}$$

□

Bemerkung 1.

$$\Gamma = \vec{r_0} + U \tag{5.735}$$
$$= \underbrace{\left\{\vec{r} \;\middle|\; A\vec{r} = \vec{b}\right\}}_{\text{Lösungsmenge des inhomogenen LGS } A\vec{r}=\vec{b}} \tag{5.736}$$
$$= \underbrace{\vec{r_0}}_{\text{spezielle Lösung des inhomogenen LGS } A\vec{r}=\vec{b}} + U \tag{5.737}$$
$$= \vec{r_0} + \underbrace{\left\{\vec{r} \;\middle|\; A\vec{r} = \vec{0}\right\}}_{\text{Lösungsmenge des homogenen LGS } A\vec{r}=\vec{0}} \tag{5.738}$$

Eine Änderung von $\vec{b}$ ergibt nur eine Änderung von $\vec{r_0}$ (Parallelverschiebung des Lösungsraumes).

Bemerkung 2. Eine Verallgemeinerung auf beliebige Vektorräume kommt später.[3]

Spezialfall: Hyperebene im $\mathbb{R}^n$:

[3]... vielleicht auch nicht...

5.18. $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$; $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

- $m = 1$, *eine* Gleichung, $n \geq 2$ Unbekannte
- $A = \underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b) \in \mathbb{R}^1$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\Gamma = \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \underbrace{\underline{a}\vec{r}}_{=a_1x_1+\cdots+a_nx_n} = b \right\} \tag{5.739}$$

- Ist $\underline{a} \neq 0$, so ist $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left(A, \vec{b}\right) = 1$, somit $\Gamma \neq \varnothing$ sowie $\dim(\Gamma) = n - 1$.

Γ ist dann eine sogenannte **Hyperebene** des $\mathbb{R}^n$.

- Im Fall $n = 2$: Hyperebenen des $\mathbb{R}^2$ sind Geraden.
- Im Fall $n = 3$: Hyperebenen des $\mathbb{R}^3$ sind Ebenen.

5.19. Die Mengen

$$\Gamma^+ = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{a}\vec{r} \geq b\} \tag{5.740}$$
$$\text{und } \Gamma^- = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{a}\vec{r} \leq b\} \tag{5.741}$$

heißen dann **abgeschlossene Halbräume** des $\mathbb{R}^n$.

$$\Gamma^+ \cup \Gamma^- = \mathbb{R}^n \tag{5.742}$$
$$\Gamma^+ \cap \Gamma^- = \Gamma \tag{5.743}$$

5.20. $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Polyeder**, falls P Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen ist.

$$P = \left\{ \vec{r} \;\middle|\; A\vec{x} \leq \vec{b} \right\} \tag{5.744}$$

Bemerkung. Polyeder sind wichtig in der linearen Optimierung.

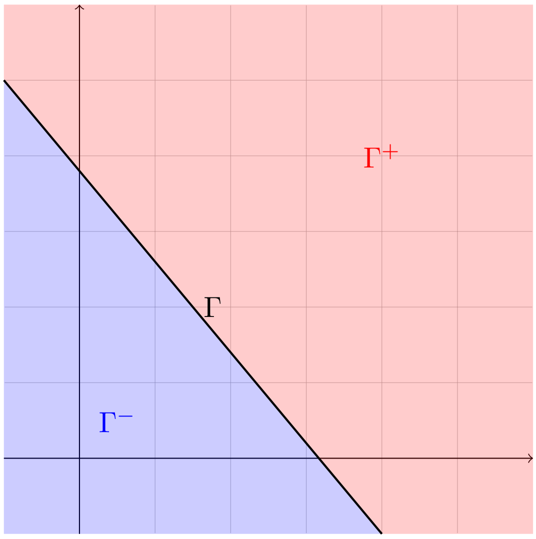

Abbildung 5.11.: Γ, Γ^+ und Γ^- im $\mathbb{R}^2$

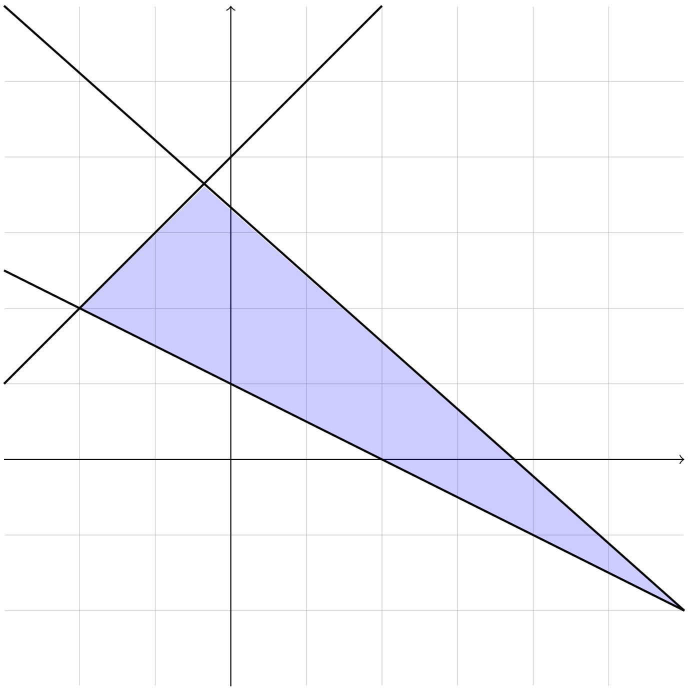

Abbildung 5.12.: Ein Polyeder, welches als Durchschnitt mehrerer abgeschlossener Halbräume entsteht

5.4.4. Affine Unterräume durch vorgegebene Punkte

Gegeben:

- $\vec{r_0}, \vec{r_1}, \ldots, \vec{r_d} \in \mathbb{R}^n$ $(d+1$ Punkte, $d \geq 1)$

Gesucht:

- Der kleinste affine Unterraum $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, welcher die Punkte $\vec{r_0}, \ldots, \vec{r_d}$ enthält.

Bezeichnung:

- $\Gamma = \Gamma(\vec{r_0}, \ldots, \vec{r_d})$ – der von $\vec{r_0}, \ldots, \vec{r_d}$ *erzeugte* AFFINE UNTERRAUM

Lösung

- $$\Gamma = \vec{r_0} \text{ (gewählt) } + \text{ linearer Unterraum } U \tag{5.745}$$
  $$U = [\vec{r_1} - \vec{r_0}, \ldots, \vec{r_d} - \vec{r_0}] \tag{5.746}$$
  $$\Gamma = \vec{r_0} + [\vec{r_1} - \vec{r_0}, \ldots, \vec{r_d} - \vec{r_0}] \tag{5.747}$$

- $\dim(\Gamma) = \dim(U) \leq d$

Beispiel:

$$n = 3 \qquad\qquad 3 \text{ Punkte } (d = 2) \tag{5.748}$$

$$\vec{r_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{r_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{5.749}$$

$$\vec{r_1} - \vec{r_0} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{r_2} - \vec{r_0} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \text{ sind linear abhängig} \tag{5.750}$$

$$U = [\vec{r_1} - \vec{r_0}, \vec{r_2} - \vec{r_0}] \tag{5.751}$$
$$= \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right] \tag{5.752}$$
$$= \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \tag{5.753}$$
$$\dim(U) = 1 \tag{5.754}$$

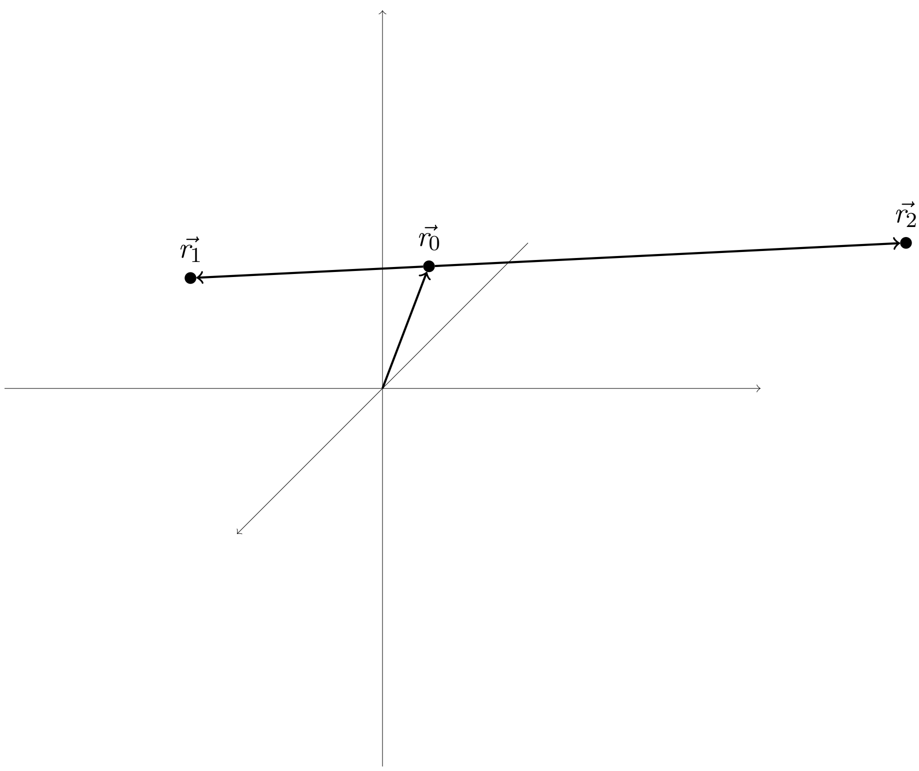

Abbildung 5.13.: Graphische Darstellung zum Beispiel

5.4.5. Lagebeziehungen affiner Unterräume

Beispiel: Geraden in $\mathbb{R}^3$

$$\Gamma_1 = \vec{r_1} + [\vec{a}] \qquad \vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.755}$$

$$\Gamma_2 = \vec{r_2} + \left[\vec{b}\right] \qquad \vec{r_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{5.756}$$

(a) $\vec{r_2} \in \Gamma_1$ (liegt $\vec{r_2}$ auf Γ_1)?

$$\vec{r_2} \in \Gamma_1 \iff \vec{r_2} = \vec{r_1} + t\vec{a} \quad \exists t \in \mathbb{R} \tag{5.757}$$

$$\iff \vec{r_2} - \vec{r_1} = t\vec{a} \quad \exists t \in \mathbb{R} \tag{5.758}$$

$$\vec{r_2} - \vec{r_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{5.759}$$

$$\text{also } \vec{r_2} \notin \Gamma_1 \tag{5.760}$$

(b) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$?

$$\vec{r} \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \iff \vec{r} \in \Gamma_1 \wedge \vec{r} \in \Gamma_2 \tag{5.761}$$

$$\iff r = \vec{r_1} + t\vec{a} \wedge \vec{r} = \vec{r_2} + s\vec{b} \quad \exists t, s \in \mathbb{R} \tag{5.762}$$

$$\iff \vec{r_1} + t\vec{a} = \vec{r_2} + s\vec{b} \tag{5.763}$$

$$\iff \vec{r_1} - \vec{r_2} = s\vec{b} - t\vec{a} \tag{5.764}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.765}$$

$$\iff 2 = s - t \wedge -1 = s - t \tag{5.766}$$

$$\iff 2 = -1 \ \lightning \tag{5.767}$$

Also gibt es kein $\vec{r} \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

(c) Offensichtlich $\Gamma_1 \not\parallel \Gamma_2$, denn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig.

5.21. Geraden, die sich nicht schneiden und nicht parallel sind, heißen **windschief**.

Allgemeine Bedingungen für Parallelität

$$\vec{r_1} + U \parallel \vec{r_2} + W \iff U \subseteq W \vee W \subseteq U \tag{5.768}$$

$$\Gamma_1 = \vec{r_1} + \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \text{ (Ebene im } \mathbb{R}^3\text{)} \tag{5.769}$$

$$\Gamma_2 = \vec{r_2} + [\vec{c}] \text{ (Gerade im } \mathbb{R}^3\text{)} \tag{5.770}$$

$$\text{Folglich } \Gamma_1 \parallel \Gamma_2 \iff \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \subseteq [\vec{c}] \vee [\vec{c}] \subseteq \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \tag{5.771}$$

$$\iff [\vec{c}] \subseteq \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \tag{5.772}$$

$$\iff \vec{}\in \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \tag{5.773}$$

5.5. Euklidische Räume

5.22. Euklidischer Raum. Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt.

5.5.1. Skalarprodukt, Norm, Winkel

Skalarprodukt

5.23. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in V^2 \mapsto \langle a, b \rangle$ heißt **Skalarprodukt**, wenn gilt

(S1) $\forall a, b \in V : \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

(S2) $\forall a, b, c \in V : \langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$[4]

(S3) $\forall a, b \in V : \langle a, t \cdot b \rangle = t\langle a, b \rangle$[4]

(S4) $\forall a \in V : \langle a, a \rangle \geq 0$,
$\forall a \in V \setminus \{0\} : \langle a, a \rangle > 0$

Beispielsweise folgt dann:

$$\langle a, 0 \rangle = \langle a, 0 + 0 \rangle \tag{5.774}$$

$$= \langle a, 0 \rangle + \langle a, 0 \rangle, \tag{5.775}$$

$$\text{also } 0 = \langle a, 0 \rangle \ \forall a \in V \tag{5.776}$$

Alternativ:

$$\langle a, 0 \rangle = \langle a, 0 \cdot 0 \rangle \tag{5.777}$$

$$= 0 \cdot \langle a, 0 \rangle \tag{5.778}$$

$$= 0 \ \forall a \in V \tag{5.779}$$

[4] „Linearität im zweiten Argument“

Beispiel im $\mathbb{R}^n$ („Standardskalarprodukt"):

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{5.780}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \sum_{i=0}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{5.781}$$

$$= \vec{a}^T \cdot \vec{b} \tag{5.782}$$

$$= \underline{a} \cdot \vec{b} \tag{5.783}$$

Beispiel:

$$V = \{f \mid f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, f \text{ stetig}\} \tag{5.784}$$

ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[0,1]}$ (Vektorraum über $\mathbb{R}$).

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x \tag{5.785}$$

Die Eigenschaften sind (jeweils) leicht nachzurechnen.

Norm (Betrag/Länge) von $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

5.24. Im Fall des Standardskalarproduktes:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \qquad = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \tag{5.786}$$

$\|\cdot\|$ heißt **euklidische Norm**.

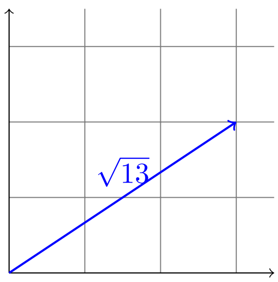

Abbildung 5.14.: Graphische Darstellung der Norm eines Vektors im $\mathbb{R}^2$ als dessen Länge

5.25. Eigenschaften:

(N1) $\|\vec{a}\| \geq 0$

(N2) $\|\vec{a}\| > 0$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\left\|\vec{0}\right\| = 0$

(N3) $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \; \|\vec{a}\|$

Beweis.

$$| \, |\lambda\vec{a}|| = \sqrt{\langle\lambda\vec{a}, \lambda\vec{a}\rangle} \tag{5.787}$$
$$= \sqrt{\lambda\lambda\langle a, a\rangle} \tag{5.788}$$
$$= |\lambda|\sqrt{\langle a, a\rangle} \tag{5.789}$$
$$= |\lambda| \cdot \|\vec{a}\| \tag{5.790}$$

□

(N4) *Dreiecksungleichung*

$$\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| \leq \|\vec{a}\| + \left\|\vec{b}\right\| \tag{5.791}$$

Jede Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit obigen Eigenschaften heißt **Norm** auf V.

Beispiele:

- $\|\vec{a}\|_1 = |a_1| + \cdots + |a_n|$ – *Betragssummennorm, Manhattan-Norm*

- $\|\vec{a}\|_\infty = \max\{\, |a_i| \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$

(N5) Für aus einem Skalarprodukt abgeleitete Normen gilt zusätzlich die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*:

$$-\|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \leq \langle a, b\rangle \leq +\|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \tag{5.792}$$

Der Betrag des Skalarproduktes zweier Vektoren ist also beschränkt durch $\|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\|$.

Gleichheit gilt für $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis. Ist $\vec{b} = \vec{0}$, so gilt die Behauptung offenbar. Sei also $\vec{b} \neq \vec{0}$.

$$\forall t \in \mathbb{R} : 0 \leq \langle \vec{a} - t\vec{b}, \vec{a} - t\vec{b} \rangle \tag{5.793}$$

$$\overset{(S2)}{=} \langle \vec{a}, \vec{a} - t\vec{b} \rangle + \langle -t\vec{b}, \vec{a} - t\vec{b} \rangle \tag{5.794}$$

$$\overset{(S2)}{=} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \underbrace{\langle \vec{a}, -t\vec{b} \rangle + \langle -t\vec{b}, \vec{a} \rangle}_{=\text{ nach (S1)}} + \langle -t\vec{b}, -t\vec{b} \rangle \tag{5.795}$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, -t\vec{b} \rangle + \left\| -t\vec{b} \right\|^2 \tag{5.796}$$

$$\underset{(N2)}{\overset{(S2)}{=}} \|\vec{a}\|^2 - 2t\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + t^2 \left\| \vec{b} \right\|^2 \tag{5.797}$$

$$\text{Setzt man nun } t = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\left\| \vec{b} \right\|^2}, \tag{5.798}$$

$$\text{dann folgt } 0 \leq \|\vec{a}\|^2 - 2\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\left\| \vec{b} \right\|^2} + \frac{\left(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \right)^2}{\left(\left\| \vec{b} \right\|^2 \right)^2} \cdot \left\| \vec{b} \right\|^2 \tag{5.799}$$

$$= \|\vec{a}\|^2 - \frac{\left(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \right)^2}{\left\| \vec{b} \right\|^2} \tag{5.800}$$

$$\implies \|\vec{a}\|^2 \geq \frac{\left(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \right)^2}{\left\| \vec{b} \right\|^2} \tag{5.801}$$

$$\implies \|\vec{a}\|^2 \left\| \vec{b} \right\|^2 \geq (\langle a, b \rangle)^2 \tag{5.802}$$

$$\implies \left| \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \right| \leq \|\vec{a}\| \left\| \vec{b} \right\| \tag{5.803}$$

□

Einheitsvektoren

Gegeben: $\vec{a} \in \mathbb{R}^n, \vec{a} \neq \vec{0}$

Gesucht: Ein *Einheitsvektor*, d. h. Vektor $\vec{b}$ mit $\left\| \vec{b} \right\| = 1$, und zwar in Richtung von $\vec{a}$.

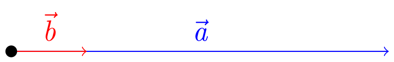

Abbildung 5.15.: Vektor $\vec{a}$ und der dazugehörige Einheitsvektor $\vec{b}$

Es gilt dann $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ für ein $\lambda > 0$.

$$\Longrightarrow 1 = \left\|\vec{b}\right\| \tag{5.804}$$
$$= \|\lambda \vec{a}\| \tag{5.805}$$
$$= |\lambda| \, \|\vec{a}\| \tag{5.806}$$
$$\overset{\lambda \geq 0}{=} \lambda \, \|\vec{a}\| \tag{5.807}$$
$$\Longrightarrow \lambda = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \tag{5.808}$$

Folglich leistet $\vec{b} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}$ das Gewünschte.

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{5.809}$$
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} \tag{5.810}$$
$$\Longrightarrow \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{5.811}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{5.812}$$

Winkel zwischen $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$

$$\alpha = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \text{ mit } 0 \leq \alpha \leq \pi \tag{5.813}$$
$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\|}, \tag{5.814}$$

d. h. der Winkel α zwischen $\vec{a}$, $\vec{b}$ ist dasjenige $\alpha \in [0, \pi]$ mit $\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \cos\alpha$.

Eigenschaften

(W1) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right)$

(W2) $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\pi}{2} \iff \cos\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0 \iff \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

Orthogonalität

5.26.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ („}\vec{a}\textbf{ orthogonal } \vec{b}\text{“)} \iff \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \tag{5.815}$$

$$\tag{5.816}$$

(a) $\forall \vec{x} \in V : \vec{0} \perp \vec{x}$ (aber $\sphericalangle\left(\vec{0}, \vec{x}\right)$ nicht definiert)

(b) $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{2} \implies \vec{a} \perp \vec{b}$

(c) $\vec{a} \perp \vec{a} \iff \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$

Beispiel:

$$\vec{e_1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.817}$$

$$\tag{5.818}$$

$$\langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \tag{5.819}$$

$$\implies \vec{e_1} \perp \vec{e_2} \tag{5.820}$$

Satz des Pythagoras / Kosinussatz

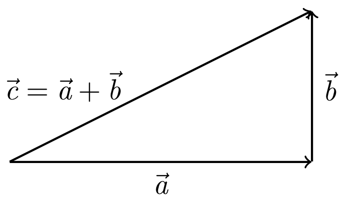

Abbildung 5.16.: Ein rechtwinkliges Dreieck, durch drei Vektoren aufgespannt

$$\|\vec{c}\|^2 = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle \tag{5.821}$$

$$= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \tag{5.822}$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \tag{5.823}$$

$$\tag{5.824}$$

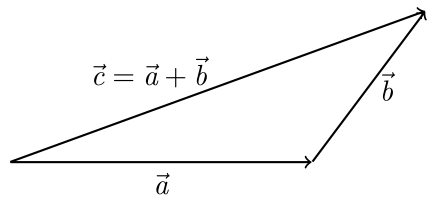

Abbildung 5.17.: Ein beliebiges Dreieck, durch drei Vektoren aufgespannt

Satz 5.10 (Pythagoras)**.** *Für $\vec{a} \perp \vec{b}$:*

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 \tag{5.825}$$

Satz 5.11 (Kosinussatz)**.** *Allgemein:*

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 + 2\,\|\vec{a}\|\,\left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\gamma \tag{5.826}$$

5.5.2. Abstände

Abstand Punkt – Punkt $\vec{r_1}, \vec{r_2} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{d}\left(\vec{r_1}, \vec{r_2}\right) = \|\vec{r_1} - \vec{r_2}\| \text{ Abstand von } \vec{r_1} \text{ und } \vec{r_2} \tag{5.827}$$

$$\mathrm{d}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \cdots + \left(x_n - y_n\right)^2} \tag{5.828}$$

Eigenschaften

(D1) $\mathrm{d}\left(\vec{r_1}, \vec{r_2}\right) \geq 0, \mathrm{d}\left(\vec{r_1}, \vec{r_2}\right) = 0 \iff \vec{r_1} = \vec{r_2}$ (positiv definiert)

(D2) $\mathrm{d}\left(\vec{r_1}, \vec{r_2}\right) = \mathrm{d}\left(\vec{r_2}, \vec{r_1}\right)$

(D3) $\mathrm{d}\left(\vec{r_1}, \vec{r_2}\right) \leq \mathrm{d}\left(\vec{r_1}, \vec{r_3}\right) + \mathrm{d}\left(\vec{r_3}, \vec{r_2}\right)$ (D$\vec{\text{r}}$eiecksungleichung)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\vec{r_1}, \vec{r_2}\right) &= \|\vec{r_1} - \vec{r_2}\| && (5.829) \\ &= \|(\vec{r_1} - \vec{r_3}) + (\vec{r_3} - \vec{r_2})\| && (5.830) \\ &\leq \|\vec{r_1} - \vec{r_2}\| + \|\vec{r_3} - \vec{r_2}\| && (5.831) \\ &= \mathrm{d}\left(\vec{r_1}, \vec{r_3}\right) + \mathrm{d}\left(\vec{r_3}, \vec{r_2}\right) && (5.832) \end{aligned}$$

Bemerkung.

(1) Jede Funktion $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$, welche symmetrisch, positiv definiert ist und die Dreiecksungleichung erfüllt, heißt **Metrik** auf M

(2) Ist V ein Vektorraum mit $\|\cdot\|$, so ist $\mathrm{d} : V \times V \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$ eine Metrik.

(3) Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle \implies$ abgeleitete Norm $\|\cdot\| \implies$ abgeleitete Metrik.

Abstand Punkt – affiner Unterraum

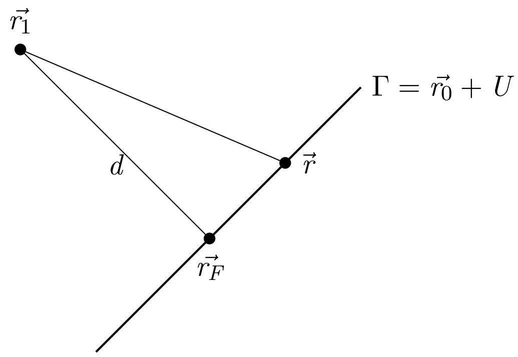

Abbildung 5.18.: Affiner Unterraum, Punkt und dazugehöriger Lotfußpunkt

Gegeben:

- affiner Unterrum $\Gamma = \vec{r_0} + U, \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$
- Punkt $\vec{r_1} \in \mathbb{R}^n$

Gesucht:

- $\mathrm{d}(\vec{r_1}, \Gamma) := \min\{\mathrm{d}(\vec{r_1}, \vec{r}) \mid \vec{r} \in \Gamma\}$ – *Abstand* von $\vec{r_1}$ zu Γ

Lösung: Wir bestimmen $\vec{r_F} \in \Gamma$ mit $\vec{d} = \vec{r_1} - \vec{r_F} \perp U$.[5] Dann ist $\mathrm{d}(\vec{r_1}, \Gamma) = \mathrm{d}(\vec{r_1}, \vec{r_F}) = \left\|\vec{d}\right\|$. (Für $\vec{r} \in \Gamma$ gilt $\mathrm{d}^2(\vec{r_1}, \vec{r}) = \mathrm{d}^2(\vec{r_1}, \vec{r_F}) + \mathrm{d}^2(\vec{r_F}, \vec{r})$)

Bezeichnung

- $\vec{r_F}$ heißt **Fußpunkt des Lotes** von $\vec{r_1}$ auf Γ.
- $\vec{d} = \vec{r_1} - \vec{r_F}$ heißt **Lotvektor** von $\vec{r_1}$ auf Γ.

[5] d. h. $\forall \vec{x} \in U : \vec{d} \perp \vec{x}$

Bestimmung von $\vec{r_F}$

(1) Parameterdarstellung von $\Gamma = \vec{r_0} + U$ bestimmen

- Basis von $\{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_d}\}$ von U

$$\begin{aligned}\vec{r} \in \Gamma &\iff \vec{r} = \vec{r_0} + \vec{x} \text{ für ein } \vec{x} \in U \\ &\iff \vec{r} = \vec{r_0} + t_1\vec{a_1} + t_2\vec{a_2} + \dots + t_d\vec{a_d} \text{ für gewisse } t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

- $A := (\vec{a_1}, \dots, \vec{a_d}), \vec{x} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{pmatrix} \implies A\vec{x} = t_1\vec{a_1} + \dots + t_d\vec{a_d}$

hier wird ein anderes $\vec{r}$ als oben bezeichnet

- $$\vec{r} \in U \iff \vec{r} = A\vec{x} \text{ für ein } \vec{x} \in \mathbb{R} \tag{5.833}$$

(2) Orthogonales Komplement $U^{\perp}$ von U bestimmen

5.27.
- $\vec{x} \perp U \iff \vec{x} \perp \vec{a}\ \forall \vec{a} \in U$
- $U^{\perp} = \{\vec{x} \mid \vec{x} \perp U\}$ ist das **orthogonale Komplement** von U

Kriterium: $\vec{x} \perp \vec{a_1}, \dots, \vec{x} \perp \vec{a_d} \implies \vec{x} \perp (t\vec{a_1} + \dots + t_d\vec{a_d})\ \forall t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$

Beweis.

$$\begin{aligned}\langle t_1\vec{a_1} + \dots + t_d\vec{a_d}\rangle &= \langle \vec{x}, t_1\vec{a_1}\rangle + \dots + \langle \vec{x}, t_d\vec{a_d}\rangle && (5.834)\\ &= t_1 \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{a_1}\rangle}_{=0} + \dots + t_d \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{a_d}\rangle}_{=0} && (5.835)\\ &= 0 && (5.836)\end{aligned}$$

□

Also gilt für $U = [\vec{a_1}, \dots, \vec{a_d}]$:

$$\begin{aligned}\vec{x} \in U^{\perp} &\iff \vec{x} \perp \vec{a_1}, \dots, \vec{x} \perp \vec{a_d} && (5.837)\\ &\iff \langle \vec{a_1}, \vec{x}\rangle = \dots = \langle \vec{a_d}, \vec{x}\rangle = 0 && (5.838)\\ &\iff \begin{pmatrix} \vec{a_1}^T \\ \vdots \\ \vec{a_d}^T \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} && (5.839)\\ &\iff A^T\vec{x} = \vec{0} \text{ (wobei } A = (\vec{a_1}, \dots, \vec{a_d})) && (5.840)\end{aligned}$$

(3) Parameterfreie Darstellung von $\Gamma' = \vec{r_1} + U^{\perp}$

- $\Gamma' = \vec{r_1} + U^{\perp}$ – affiner Unterraum durch $\vec{r_1}$, der $\Gamma = \vec{r_0} + U$ *orthogonal schneidet*
- $\Gamma' = \vec{r_1} + U^{\perp} = \vec{r_1} + \left\{ \vec{x} \,\middle|\, A^T\vec{x} = \vec{0} \right\} = \left\{ \vec{r} \,\middle|\, A^T\vec{x} = \vec{b} \right\}, \vec{b} = A^T\vec{r_1}$
- $\Gamma' = \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, A^T\vec{r} = \vec{b} \right\}, \vec{b} = A^T\vec{r_1}$

(4) Dann ist $\vec{r_F}$ Schnittpunkt von $\Gamma = \vec{r_0} + U$ und $\Gamma' = \vec{r_1} + U^{\perp}$

- $\vec{r_F} \in \Gamma \implies \vec{r_F} = \vec{r_0} + A\vec{x}$ für ein « $\in \mathbb{R}^d$
- $\vec{r_F} \in \Gamma' \implies A^T\vec{r_F} = \vec{b} = A^T\vec{r_1}$
- Ergibt:

$$A^T(\vec{r_0} + A\vec{x}) = A^T\vec{r_1} \tag{5.841}$$

$$A^T\vec{r_0} + A^TA\vec{x} = A^T\vec{r_1} \tag{5.842}$$

$$A^TA\vec{x} = A^T(\vec{r_1} - \vec{r_0}) \tag{5.843}$$

- A^TA ist quadratisch und invertierbar *(ohne Beweis)*

$$\vec{x} = \left(A^TA\right)^{-1} A^T(\vec{r_1} - \vec{r_0}) \tag{5.844}$$

$$\vec{r_F} = \vec{r_0} + A\vec{x} \tag{5.845}$$

$$\mathrm{d}(\vec{r_1}, \Gamma) = \mathrm{d}(\vec{r_1}, \vec{r_F}) \tag{5.846}$$

Beispiel:

Gegeben:

- Punkt $\vec{r_1} = (0, 1, 2, 5)^T \in \mathbb{R}^4$
- affiner Unterraum $\Gamma = \vec{r_0} + U$, $U = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$
- $\vec{r_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gesucht:

- $\mathrm{d}(\vec{r_1}, \Gamma)$ – Abstand von $\vec{r_1}$ und Γ
- $\vec{r_F}$ – Fußpunkt des Lotes von $\vec{r_1}$ auf Γ

(1) Parameterdarstellung von Γ

$$\vec{r} \in \Gamma \iff \vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a} + s\vec{b} = \vec{r_0} + \left(\vec{a}, \vec{b}\right)\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \vec{r_0} + A\vec{x} \tag{5.847}$$

$$A = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{5.848}$$

(2) Orthogonales Komplement $U^\perp = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \vec{x} \perp U\right\}$

$$U = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \tag{5.849}$$

$$= \left\{A\vec{x} \;\middle|\; \vec{x} \in \mathbb{R}^2\right\} \tag{5.850}$$

$$\vec{x} \perp U \iff \vec{x} \perp \vec{a} \wedge \vec{x} \perp \vec{b} \tag{5.851}$$

$$\iff \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0 \wedge \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle = 0 \tag{5.852}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \vec{a}^T \\ \vec{b}^T \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.853}$$

$$\iff A^T\vec{x} = \vec{0} \tag{5.854}$$

$$U^\perp = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; A^T\vec{x} = \vec{0}\right\} \tag{5.855}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{5.856}$$

(3) Parameterfreie Darstellung von $\Gamma' = \vec{r_1} + U^\perp$

$$\Gamma' = \vec{r_1} + U^\perp \tag{5.857}$$

$$= \vec{r_1} + \left\{\vec{x} \;\middle|\; A^T\vec{x} = \vec{0}\right\} \tag{5.858}$$

$$= \left\{\vec{r} \;\middle|\; A^T\vec{r} = \vec{b_1}\right\} \tag{5.859}$$

$$\vec{b_1} = A^T\vec{r_1} \tag{5.860}$$

(4) $\vec{r_F}$ ist der Schnittpunkt von Γ und Γ'

$$\vec{r_F} \in \Gamma \implies \vec{r_F} = \vec{r_0} + A\vec{x} \tag{5.861}$$

$$\vec{r_F} \in \Gamma' \implies A^T\vec{r_F} = \vec{b_1} \tag{5.862}$$

$$\text{Daraus erhalten wir: } A^T(\vec{r_0} + A\vec{x}) = \vec{b_1} = A^T\vec{r_1} \tag{5.863}$$

$$A^T\vec{r_0} + A^TA\vec{x} = A^T\vec{r_1} \tag{5.864}$$

$$A^TA\vec{x} = A^T(\vec{r_1} - \vec{r_0}) \tag{5.865}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{pmatrix} \tag{5.866}$$

$$\left(A^TA\right)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.867}$$

$$A^T(\vec{r_1} - \vec{r_0}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{5.868}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \end{pmatrix} \tag{5.869}$$

$$\implies \vec{x} = \left(A^TA\right)^{-1}\left(A^T(\vec{r_1} - \vec{r_0})\right) \tag{5.870}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.871}$$

$$\implies \vec{r_F} = \vec{r_0} + A\vec{x} \tag{5.872}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 31 \\ 42 \end{pmatrix} \tag{5.873}$$

$$\implies \mathrm{d}(\vec{r_1}, \Gamma) = \mathrm{d}(\vec{r_1}, \vec{r_F}) \tag{5.874}$$

$$= \|\vec{r_F} - \vec{r_1}\| \tag{5.875}$$

$$= \frac{1}{10}\sqrt{190} \tag{5.876}$$

Bemerkung. Ist $U = [\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_k}]$ ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und $A = (\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_k})$, dann gilt:

(1) $\dim(U) = \operatorname{rg}(A)$

(2) $U^\perp = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, A^T\vec{x} = \vec{0}\right\}$

(3) $\dim\left(U^\perp\right) = n - \operatorname{rg}\left(A^T\right) = n - \operatorname{rg}(A) = n - \dim(U)$

5.5.3. Hessesche Form einer Hyperebene

Gegeben:

- $\Gamma = \vec{r_0} + U$ Hyperebene im $\mathbb{R}^n$, d. h. $\dim(U) = n - 1$

Dann gilt:

- $\dim\left(U^\perp\right) = n - \dim(U) = 1$, also $\exists \vec{n} \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\vec{0}\right\} : U^\perp = [\vec{n}]$
-

$$\begin{aligned} r \in \Gamma = \vec{r_0} + U &\implies \vec{r} = \vec{r_0} + \vec{x}\, \exists \vec{x} \in U,\, U^\perp = [\vec{n}] && (5.877)\\ &\implies \vec{x} \perp \vec{n} && (5.878)\\ &\implies \langle \vec{r}, \vec{n}\rangle = \langle \vec{r_0} + \vec{x}, \vec{n}\rangle = \langle \vec{r_0}, \vec{n}\rangle + \langle \vec{x}, \vec{n}\rangle = \langle \vec{r_0}, \vec{n}\rangle && (5.879) \end{aligned}$$

Abbildung 5.19.: Darstellung einer Hyperebene mit $\vec{n}$ im $\mathbb{R}^3$

Wir erhalten eine äquivalente Darstellung von Γ:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{x} \mid \vec{x} \in U\},\, U^\perp = [\vec{n}],\, U = [\vec{n}]^\perp && (5.880)\\ \Gamma &= \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{r}, \vec{n}\rangle = p\},\, p = \langle \vec{r_0}, \vec{n}\rangle && (5.881) \end{aligned}$$

5.28. Darstellung von Γ durch die Gleichung:

$$\langle \vec{r}, \vec{n}\rangle = p \qquad (5.882)$$

Diese Gleichung heißt **Hessesche Form** von Γ, $\vec{n}$ heißt **Normalenvektor** von Γ.

Bemerkung. $t\vec{n}, t \neq 0$ ist dann ebenfalls ein Normalenvektor von Γ; es gilt

$$\langle \vec{r}, \vec{n}\rangle = p \iff \langle \vec{r}, t\vec{n}\rangle = tp \qquad (5.883)$$

.

Beispiel: Hyperebene im $\mathbb{R}^3$.

Gegeben:

$$\Gamma = \vec{r_0} + \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \qquad \vec{r_0} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} \qquad (5.884)$$

$$\vec{r_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad (5.885)$$

Gesucht:

- Hessesche Form von Γ
- $d(\vec{r_1}, \Gamma)$ sowie Lotfußpunkt $\vec{r_F}$ von $\vec{r_1}$ auf Γ

Lösung:

(1)

$$U = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left\{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^2\right\} \tag{5.886}$$

$$A = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) \tag{5.887}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.888}$$

(2)

$$U^{\perp} = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A^T\vec{x} = \vec{0}\right\} \tag{5.889}$$

$$= \left\{\vec{x} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \tag{5.890}$$

$$\Longrightarrow \quad U^{\perp} = \left\{\vec{x} = t\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\} \tag{5.891}$$

$$= [\vec{n}] \tag{5.892}$$

$$\text{mit } \vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Normalenvektor von } U \tag{5.893}$$

$$\tag{5.894}$$

(3) Hessesche Form von Γ:

$$p = \langle \vec{r_0}, \vec{n} \rangle \tag{5.895}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \tag{5.896}$$

$$= 5 \tag{5.897}$$

$$\Gamma = \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = 5\right\} \tag{5.898}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 7x - 3y + z = 5\right\} \tag{5.899}$$

(4)

$$\Gamma' = \vec{r_1} + U^{\perp} \tag{5.900}$$
$$= \vec{r_1}\,[\vec{n}] \tag{5.901}$$
$$= \{\vec{r} = \vec{r_1} + t\vec{n} \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{5.902}$$

Gerade durch $\vec{r_1}$, die senkrecht auf Γ steht.

(5) $\vec{r_F}$ ist der Schnittpunkt von Γ und Γ'

$$\vec{r_F} \in \Gamma \implies \langle \vec{r_F}, \vec{n} \rangle = p \tag{5.903}$$
$$\vec{r_F} \in \Gamma' \implies \vec{r_F} = \vec{r_1} + t\vec{n} \tag{5.904}$$
$$\text{Einsetzen: } \langle \vec{r_1} + t\vec{n}, \vec{n} \rangle = p \tag{5.905}$$
$$\langle \vec{r_1}, \vec{n} \rangle + t\,\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = p \tag{5.906}$$
$$\implies t = \frac{p - \langle \vec{r_1}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle} \tag{5.907}$$
$$= \frac{\langle \vec{r_0}, \vec{n} \rangle - \langle \vec{r_1}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle} \tag{5.908}$$
$$= \frac{\langle \vec{r_0} - \vec{r_1}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle} \tag{5.909}$$
$$= \frac{1}{59} \tag{5.910}$$
$$\implies \vec{r_F} = \vec{r_1} + t\vec{n} \tag{5.911}$$
$$= \vec{r_1} + \frac{1}{59}\vec{n} \tag{5.912}$$
$$= \frac{1}{59}\begin{pmatrix} 66 \\ 115 \\ 178 \end{pmatrix} \tag{5.913}$$
$$\implies d\,(\vec{r_1}, \Gamma) = d\,(\vec{r_1}, \vec{r_F}) \tag{5.914}$$
$$= \|\vec{r_1} - \vec{r_F}\| \tag{5.915}$$
$$= \|t\vec{n}\| \tag{5.916}$$
$$= |t|\ \|\vec{n}\| \tag{5.917}$$
$$= \frac{1}{59}\sqrt{59} \tag{5.918}$$

5.5.4. Orthogonale Projektion und Orthonormalbasis

Abstand $d\left(\vec{r_1}, \Gamma\right)$ mit $\Gamma = \vec{r_0} + U$, $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$.

Orthogonale Projektion

Gegeben:

- $U \subseteq \mathbb{R}^n$ linearer Unterraum
- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ Vektor

Gesucht:

- Zerlegung von $\vec{x}$ in eine Summe der Form

$$\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2} \tag{5.919}$$

mit $\vec{x_1} \in U$, $\vec{x_2} \in U^\perp$

5.29.

$$\vec{x_1} = \operatorname{proj}(\vec{x} : U) \tag{5.920}$$

heißt **orthogonale Projektion** von $\vec{x}$ auf U. $\vec{x_2}$ heißt **orthogonale Komponente** von $\vec{x}$ bezüglich U.

Orthonormalsystem und Orthonormalbasis

5.30. Sei $M = \left\{\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_m}\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$. M heißt dann **Orthonormalsystem** (kurz *ONS*), falls $\vec{b_i} \perp \vec{b_j}$ für $i \neq j$ aus $\{1, \ldots, m\}$ und $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$: $\left\|\vec{b_i}\right\| = 1$.

5.31. Sei M wie oben. M heißt dann **Orthonormalbasis**, falls M ein Orthonormalsystem und Basis von $\mathbb{R}^n$ ist.

Kriterium

$$M = \left\{\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_m}\right\} \text{ ONS } \iff \langle \vec{b_i}, \vec{b_j} \rangle = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases} \tag{5.921}$$

Eigenschaften von Orthonormalsystemen

Satz 5.12. *Sei $M = \left\{\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_m}\right\}$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt:*

(a) Ist $\vec{x} = \alpha_1 \vec{b_1} + \cdots + \alpha_m \vec{b_m}$ Linearkombination von $\vec{x}$ aus M, so ist $\alpha_i = \langle \vec{x}, \vec{b_i} \rangle$

(b) M ist linear unabhängig.

Beweis.

(a)

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x}, \vec{b_i} \rangle &= \langle \alpha_1 \vec{b_1} + \cdots + \alpha_m \vec{b_m}, \vec{b_i} \rangle && (5.922)\\
&= \alpha_1 \underbrace{\langle \vec{b_1}, \vec{b_i} \rangle}_{\substack{=0 \text{ für } i \neq 1 \\ =1 \text{ sonst}}} + \cdots + \underbrace{\alpha_m \langle \vec{b_m}, \vec{b_i} \rangle}_{\substack{=0 \text{ für } i \neq m \\ =1 \text{ sonst}}} && (5.923)\\
&= \alpha_i \underbrace{\langle \vec{b_i}, \vec{b_i} \rangle}_{=1} && (5.924)\\
&= \alpha_i \checkmark && (5.925)
\end{aligned}$$

(b) Die Gleichung $\vec{0} = \alpha_1 \vec{b_1} + \cdots + \alpha_m \vec{b_m}$ hat wegen (a) nur die Lösung $\alpha_i = \langle \vec{0}, \vec{b_i} \rangle = 0$. Somit folgt: M ist linear unabhängig.

$\square$

Folgerung. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum mit $\dim(U) = m$ und ist $M = \left\{ \vec{b_1}, \ldots, \vec{b_m} \right\}$ ein Orthonormalsystem mit $M \subseteq U$, so ist M bereits eine Orthonormalbasis von U.

Beispiel: $U = \mathbb{R}^2$

(a) $M = \left\{ \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Orthonormalsystem und somit Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$.

(b) $M = \left\{ \vec{b_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Orthonormalsystem.

$$\left\| \vec{b_1} \right\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \tag{5.926}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \tag{5.927}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \tag{5.928}$$

$$= 1 \tag{5.929}$$

$$\left\| \vec{b_2} \right\| = \dots \tag{5.930}$$

$$= 1 \tag{5.931}$$

$$\langle \vec{b_1}, \vec{b_2} \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \tag{5.932}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}_{=0} \tag{5.933}$$

$$= 0 \tag{5.934}$$

$$\Longrightarrow \vec{b_1} \perp \vec{b_2} \tag{5.935}$$

Also ist M Orthonormalbasis.

Bemerkung. Sämtliche eingangs genannte Fakten gelten analog für beliebige euklidische Vektorräume.

Klassisches Beispiel:

- V ist Vektorraum der 2π-periodischen Funktionen
- $\langle f, g \rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$
- Orthonormalsystem:
  $M = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \;\middle|\; n \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}$

Berechnung der orthogonalen Projektion

Satz 5.13. *Ist $M = \left\{ \vec{b_1}, \dots, \vec{b_m} \right\}$ eine Orthonormalbasis des linearen Unterraumes $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, so gilt:*

$$\vec{x_1} = \operatorname{proj}(\vec{x} : U) \tag{5.936}$$

$$= \langle \vec{x}, \vec{b_1} \rangle \vec{b_1} + \langle \vec{x}, \vec{b_2} \rangle \vec{b_2} + \dots + \langle \vec{x}, \vec{b_m} \rangle \vec{b_m} \tag{5.937}$$

Beweis. Schrottbeweis. TODO ♡ □

Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Eingabe:

- Basis $\{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_m}\}$ des linearen Unterraums, $U \subseteq \mathbb{R}^n$

Ausgabe:

- Orthonormalbasis $\left\{\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_m}\right\}$

Berechnung:

$$\vec{b_1} = \frac{1}{\|\vec{a_1}\|}\vec{a_1} \tag{5.938}$$

$$\vec{b_2} = \frac{\vec{a_2} - \langle a_2, \vec{b_1}\rangle \vec{b_1}}{\left\|\vec{a_2} - \langle \vec{a_2}, \vec{b_1}\rangle \vec{b_1}\right\|} \tag{5.939}$$

$$\vec{b_3} = \frac{\vec{a_3} - \left(\langle \vec{a_3}, \vec{b_1}\rangle \vec{b_1} + \langle \vec{a_3}, \vec{b_2}\rangle \vec{b_2}\right)}{\left\|\vec{a_3} - \left(\langle \vec{a_3}, \vec{b_1}\rangle \vec{b_1} + \langle \vec{a_3}, \vec{b_2}\rangle \vec{b_2}\right)\right\|} \tag{5.940}$$

$$\vdots$$

$$\vec{b_r} = \frac{\vec{a_r} - \left(\langle \vec{a_r}, \vec{b_1}\rangle \vec{b_1} + \cdots + \langle \vec{a_r}, \vec{b_{r-1}}\rangle \vec{b_{r-1}}\right)}{\left\|\vec{a_r} - \left(\langle \vec{a_r}, \vec{b_1}\rangle \vec{b_1} + \cdots + \langle \vec{a_r}, \vec{b_{r-1}}\rangle \vec{b_{r-1}}\right)\right\|} \tag{5.941}$$

Beispiel: $U = [\vec{a}]$

$$\text{ONB: } \vec{b} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \tag{5.942}$$

$$\vec{x_1} = \operatorname{proj}(\vec{x} : U) \tag{5.943}$$

$$= \langle \vec{x}, \vec{b}\rangle \vec{b} \tag{5.944}$$

$$= \frac{\langle \vec{x}, \vec{a}\rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle}\vec{a} \tag{5.945}$$

Beispiel:

(a)

- $U = \left[\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ zweidimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$

$$\|\vec{a_1}\| = \sqrt{4} = 2 \tag{5.946}$$

$$\vec{b_1} = \frac{1}{2}\vec{a_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{5.947}$$

$$\vec{c} = \vec{a_2} - \langle\vec{a_2}, \vec{b_1}\rangle\vec{b_1} \tag{5.948}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{5.949}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \tag{5.950}$$

$$\vec{b_2} = \frac{1}{\|\vec{c}\|}\vec{c} \tag{5.951}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \tag{5.952}$$

$$\text{ONB:}\ \left\{ \vec{b_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{b_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \tag{5.953}$$

(b) $\Gamma = \vec{r_0} + U$ mit $\vec{r_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $d(\vec{r_1}, \Gamma) = ?$

$$\vec{x} = \vec{r_1} - \vec{r_0} \tag{5.954}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{5.955}$$

$$\vec{x_1} = \operatorname{proj}(\vec{x} : U) \tag{5.956}$$

$$= \langle \vec{x}, \vec{b_1} \rangle \vec{b_1} + \langle \vec{x}, \vec{b_2} \rangle \vec{b_2} \tag{5.957}$$

$$= 3\vec{b_1} + 5\sqrt{2}\vec{b_2} \tag{5.958}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{5.959}$$

$$\vec{x_2} = \vec{x} - \vec{x_1} \tag{5.960}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.961}$$

$$\vec{r_F} = \vec{r_0} + \vec{x_1} \tag{5.962}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{5.963}$$

$$d(\vec{r_1}, \Gamma) = d(\vec{r_1}, \vec{r_F}) \tag{5.964}$$

$$= \|\vec{r_1} - \vec{r_F}\| \tag{5.965}$$

$$= \|\vec{x_2}\| \tag{5.966}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right) \tag{5.967}$$

5.5.5. Methode der kleinsten Quadrate

Problemstellung: Der Bremsweg y eines Autos hängt quadratisch von der Geschwindigkeit x ab.

$$y = ax^2 + bx + c \tag{5.968}$$

Messungen ergeben ein i. d. R. überbestimmtes lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten a, b, c. Beispielsweise ergibt $(x, y) = (100, 50)$ die Gleichung

$$10\,000a + 100b + c = 50. \tag{5.969}$$

Aufgrund von Messfehlern besitzt das lineare Gleichungssystem (aus vielen Messungen) *keine Lösung*. Wir suchen eine „beste Näherungslösung“.

Näherungslösung eines linearen Gleichungssystems

Gegeben:

- Lineares Gleichungssystem der Form
$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{5.970}$$
mit $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

Gesucht:

- Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, für welchen $\left\|A\vec{x} - \vec{b}\right\|$ den kleinsten Wert hat. Man nennt dann $\vec{x}$ eine im quadratischen Mittel beste **Näherungslösung** von Gleichung 5.970.

Bemerkung.

$$\left\|A\vec{x} - \vec{b}\right\| = 0 \iff A\vec{x} - \vec{b} = \vec{0} \tag{5.971}$$
$$\iff A\vec{x} = \vec{b} \tag{5.972}$$

Ist das lineare Gleichungssystem 5.970 lösbar, dann sind die besten Näherungslösungen von 5.970 genau die Lösungen von 5.970.

Lösung:

$$U = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} \text{ ist linearer Unterraum von } \mathbb{R}^n. \tag{5.973}$$
$$\Gamma = \vec{r_0} + U \text{ ist affiner Unterraum, } \vec{r_0} = \vec{0} \tag{5.974}$$
$$= \{\vec{r} \mid \vec{r} = A\vec{x} \text{ für ein } \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} \tag{5.975}$$

Für $\vec{r} = A\vec{x}$ und $\vec{b}$ ist

$$\left\|A\vec{x} - \vec{b}\right\| = \left\|\vec{r} - \vec{b}\right\| \tag{5.976}$$
$$= \mathrm{d}\left(\vec{r}, \vec{b}\right). \tag{5.977}$$

Wir suchen also den Punkt $\vec{r}$ aus Γ mit $\mathrm{d}\left(\vec{r}, \vec{b}\right) = \mathrm{d}\left(\Gamma, \vec{b}\right)$, also $\vec{r_F}$, den Fußpunkt des Lotes von $\vec{b}$ auf Γ.

$$U^\perp = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; A^T\vec{x} = \vec{0}\right\} \text{ (siehe Abschnitt 5.5.2)} \tag{5.978}$$
$$\Gamma' = \vec{b} + U^\perp \tag{5.979}$$
$$= \left\{\vec{r} \;\middle|\; A^T\vec{r} = A^T\vec{b}\right\} \tag{5.980}$$
$$\vec{r_F} \in \Gamma \cap \Gamma' \tag{5.981}$$
$$\vec{r_F} \in \Gamma \implies \vec{r_F} = A\vec{x} \tag{5.982}$$
$$\vec{r_F} \in \Gamma' \implies \vec{r_F} = A^T\vec{r_F} = A^T\vec{b} \tag{5.983}$$
$$\implies A^TA\vec{x} = A^T\vec{b} \tag{5.984}$$

Somit gilt: $\left\|A\vec{x}-\vec{b}\right\|$ ist genau dann minimal, wenn $A^TA\vec{x}=A^T\vec{b}$ für $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

Bemerkung.

- Die besten Näherungslösungen von 5.970 sind also die Lösungen des linearen Gleichungssystems $A^TA\vec{x}=A^T\vec{b}$.
- Das lineare Gleichungssystem $A^TA\vec{x}=A^T\vec{b}$ ist stets lösbar.

Beispiel:

- lineares Gleichungssystem $A\vec{x}=\vec{b}$ mit

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&3\\1&4\end{pmatrix}\qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\5\end{pmatrix}\tag{5.985}$$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&3\\1&4\end{pmatrix}\tag{5.986}$$

$$=\begin{pmatrix}4&8\\8&26\end{pmatrix}\tag{5.987}$$

$$A^T\vec{b}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\5\end{pmatrix}\tag{5.988}$$

$$=\begin{pmatrix}8\\27\end{pmatrix}\tag{5.989}$$

$$\begin{pmatrix}4&8\\8&26\end{pmatrix}\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\27\end{pmatrix}\tag{5.990}$$

$$\Longrightarrow\quad \vec{x}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-2\\11\end{pmatrix}\tag{5.991}$$

$$A\vec{x}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1\\9\\31\\42\end{pmatrix}\tag{5.992}$$

$$=\begin{pmatrix}-0.2\\0.9\\3.1\\4.2\end{pmatrix}\tag{5.993}$$

Ausgleichspolynome

Gegeben:

- Messpunkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$
- Natürliche Zahl $k \geq 1$

Gesucht: Ein Polynom[6]

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 \tag{5.994}$$

vom Grad $\leq k$, für welches die quadratische Abweichung

$$D = (p(x_1) - y_1)^2 + \dots + (p(x_n) - y_n)^2 \tag{5.995}$$

den kleinsten Wert hat. Man nennt dann $p(x)$ ein **Ausgleichspolynom** vom Grad $\leq k$ für die n Messpunkte[7].

Lösung:

- Wir suchen den Vektor $\vec{x} = (a_0, \dots, a_k)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$ der Koeffizienten von p.
- Es gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &:= \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix} && (5.996)\\
&= \begin{pmatrix} a_0 & + & a_1 x_1 & + & \dots & + & a_k x_1^k \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_0 & + & a_1 x_n & + & \dots & + & a_k x_n^k \end{pmatrix} && (5.997)\\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^k \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} && (5.998)\\
\implies \vec{r} &= A\vec{x} && (5.999)\\
& && (5.1000)
\end{aligned}$$

-

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{5.1001}$$

[6] genau genommen eine Polynomfunktion

[7] Meistens ist n in der Praxis deutlich größer als k.

Dann gilt:

$$D = (p(x_1) - y_1)^2 + \cdots + (p(x_n) - y_n)^2 \tag{5.1002}$$
$$= \left\| \vec{r} - \vec{b} \right\|^2 \tag{5.1003}$$
$$= \left\| A\vec{x} - \vec{b} \right\|^2 \tag{5.1004}$$

- Wir suchen $\vec{x}$, für welches $D = \left\| A\vec{x} - \vec{b} \right\|^2$ den kleinsten Wert annimmt, also die *beste Näherungslösung von* $A\vec{x} = \vec{b}$. Dann gilt:

$$A^T A\vec{x} = A^T\vec{b} \tag{5.1005}$$

Beispiel:

$$(x_i, y_i)_{i\in\{1,\ldots,4\}} = \Big((0,0), (1,1), (3,2), (4,5)\Big) \tag{5.1006}$$
$$k = 1 \tag{5.1007}$$
$$\implies \quad \text{Ausgleichspolynom } p(x) = a_0 + a_1 x \tag{5.1008}$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} \tag{5.1009}$$

Wie im vorigen Abschnitt ergibt sich für die beste Näherungslösung:

$$\vec{x} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} \tag{5.1010}$$
$$p(x) = -0.2 + 1.1x \tag{5.1011}$$

5.6. Determinanten

Man betrachte zunächst das Parallelogramm in Abschnitt 5.6. Für die Fläche ergibt sich:

$$F = (a+c)(b+d) - 2bc - 2\cdot\frac{1}{2}cd - 2\cdot\frac{1}{2}ab \tag{5.1012}$$
$$= ab + ad + bc + cd - 2bc - cd - ab \tag{5.1013}$$
$$= ad - bc \tag{5.1014}$$

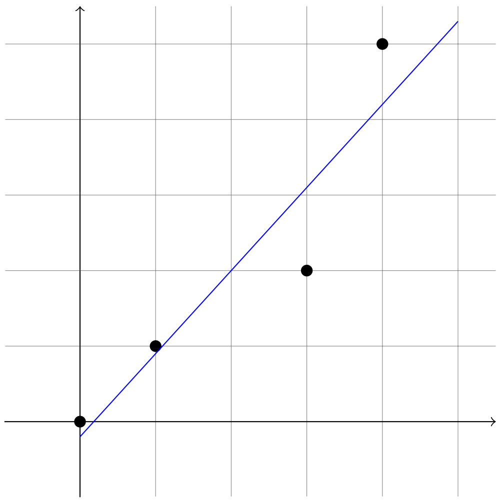

Abbildung 5.20.: Darstellung des Beispiels

Abbildung 5.21.: Fläche in einem Parallelogramm

Abbildung 5.22.: Parallelotop im Raum

5.6.1. Definition der Determinanten

Motivation:

Gegeben:

- n Vektoren $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$ des Spaltenvektorraums K^n

$$A = (\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}) \in K^{(n,n)} \tag{5.1015}$$

Gesucht: Eine Funktion $\det : K^{(n,n)} \to K$, die der Vektormenge $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$ bzw. der Matrix das verallgemeinerte Volumen des aufgespannten Objektes.

Gewünschte Eigenschaften:

(D1) *Linearität* in jeder Spalte:

$$\begin{aligned}\det\left(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_{i-1}}, \vec{a_i} + \vec{a_i}', \vec{a_{i+1}}, \ldots, \vec{a_n}\right) &= \det\left(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_{i-1}}, \vec{a_i}, \vec{a_{i+1}}, \ldots, \vec{a_n}\right)\\ &\quad + \det\left(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_{i-1}}, \vec{a_i}', \vec{a_{i+1}}, \ldots, \vec{a_n}\right)\end{aligned} \tag{5.1016}$$

$$\det\left(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_{i-1}}, \lambda\vec{a_i}, \ldots, \vec{a_n}\right) = \lambda \det\left(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_i}, \ldots, \vec{a_n}\right) \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\} \tag{5.1017}$$

(D2) Enthält A zwei gleiche Spalten, so ist

$$\det(A) = 0 \tag{5.1018}$$

(D3) Normierung $\det(E) = 1$, wobei E die Einheitsmatrix ist.

Satz 5.14.

(a) Es sei K ein beliebiger Körper. Dann gibt es genau eine Funktion $\det : K^{(n,n)} \to K$*, welche (D1), (D2), (D3) erfüllt. Diese Funktion wird* ***Determinante*** *genannt.*

(b) Leibnizformel:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \tag{5.1019}$$

Dabei ist S_n die Menge der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$.

Jede Permutation lässt sich als Verkopplun von Transpositionen darstellen; unabhängig von der benutzten Darstellung als Verkopplung ist die Anzahl der beteiligten Transpositionen immer gerade oder immer ungerade. Ist sie (für ein $\sigma \in S_n$) gerade, so sei $\operatorname{sign}\sigma = +1$*, sonst sei* $\operatorname{sign}\sigma = -1$*.*

(ohne Beweis)

Bemerkungen.

- S_n ist die Menge der Bijektionen $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ (*Permutationen*).
- $\operatorname{sign} \sigma$ ist (-1) hoch die Zahl der „Kreuzungen“. Hier ist beispielsweise $\operatorname{sign} \sigma = (-1)^6 = +1$.
- Formeln für $n = 2$ und $n = 3$:

$$n = 2 \qquad\qquad S_2 = \left\{ id_2, \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{5.1020}$$

$$\sigma(i) = \begin{cases} a_{j+1} & , i = a_j \\ a_1 & , i = a_m \\ i & , \text{sonst} \end{cases} \tag{5.1021}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sign} \sigma \prod_{i=1}^{2} \left(a_{1,\sigma(i)} \right) \tag{5.1022}$$

$$= (+1)\, ad + (-1)\, bc \tag{5.1023}$$

$$= ad - bc \tag{5.1024}$$

$$n = 3 \qquad s_3 = \{ id_3, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 3) \} \tag{5.1025}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \tag{5.1026}$$

Dies ist die sogenannte *Regel von* Sarrus.

Für $n = 4$ ist $|s_4| = 4! = 24$.

Zusammengefasst: Für größere n ist die Leibnizformel in der Praxis Mist.

Folgerung aus der Leibnizformel:

(D4) $\det A = \det A^T$. Die Regeln (D1), (D2) gelten somit in analoger Form auch für *Zeilen* statt Spalten.

Beispiel:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot 1 - 2\cdot 3 \tag{5.1027}$$

$$= -5 \tag{5.1028}$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 4 + 0\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot 1$$

$$- 1\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot(-1)\cdot 0 \tag{5.1029}$$

$$= 4 - 2 - 2 - 3 \tag{5.1030}$$

$$= -3 \tag{5.1031}$$

5.6.2. Eigenschaften der Determinante

(D5) Hat A eine Nullzeie oder Nullspalte, so ist $\det A = 0$

(D6) Gauß-Operationen und $\det A$

(i) Zeile mit Konstante multiplizieren:

$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \alpha\underline{a}\\ \vdots\end{pmatrix} = \alpha\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \underline{a}\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{5.1032}$$

(ii) Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren

$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \underline{a}\\ \vdots\\ \underline{b}\\ \vdots\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ \underline{a}\\ \vdots\\ \underline{b}\\ \vdots\end{pmatrix} + \alpha\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \underline{a}\\ \vdots\\ \underline{a}\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{5.1033}$$

$$= \det\begin{pmatrix}\vdots\\ \underline{a}\\ \vdots\\ \underline{b}+\alpha\underline{a}\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{5.1034}$$

Die Determinante ändert sich also nicht.

(iii) Zeilentausch:

$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \underline{a}\\ \vdots\\ \underline{b}\\ \vdots\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ \underline{a}\\ \vdots\\ \underline{b}+\underline{a}\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{5.1035}$$

$$= \det\begin{pmatrix}\vdots\\ \underline{a}-(\underline{b}+\underline{a})\\ \vdots\\ \underline{b}+\underline{a}\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{5.1036}$$

$$= \det\begin{pmatrix}\vdots\\ -\underline{b}\\ \vdots\\ \underline{b}+\underline{a}\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{5.1037}$$

$$= \det\begin{pmatrix}\vdots\\ -\underline{b}\\ \vdots\\ \underline{a}\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{5.1038}$$

$$= -\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \underline{b}\\ \vdots\\ \underline{a}\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{5.1039}$$

(D7) Dreiecksmatrizen.

5.32. Sei D eine Matrix. Falls gilt:

- $d_{ij} = 0$ für $j < i$, so heißt D **obere Dreiecksmatrix** (alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen sind 0)

- $d_{ij} = 0$ für $j > i$, so heißt D **untere Dreiecksmatrix** (alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen sind 0)

In jedem Fall ist $\det D = d_{11} \cdot d_{22} \cdot \dots \cdot d_{nn}$.

$$\det D = \det \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.1040}$$

$$= d_{11} d_{22} \dots d_{nn} \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{=1} \tag{5.1041}$$

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1042}$$

$$= -3 \tag{5.1043}$$

Gauß-Jordan zu Bestimmung von $\det A$**:** Wir überführen A durch Gauß-Operationen vom Typ (ii) oder (iii) (s. o.) in eine Diagonalmatrix $D = (d_{ij})$ (obere/untere Dreiecksmatrix genügt). Dann ist $\det(A) = (-1)^m \det(D) = (-1)^m d_{11} \cdot \dots \cdot d_{nn}$, wobei m die Anzahl der Typ-(iii)-Operationen ist.

(D8) Invertierbarkeit.

Folgende Aussagen sind äquivalent für $A \in K^{(n,n)}$.

(i) A ist invertierbar.

(ii) Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.

(iii) Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.

(iv) $\mathrm{rg}(A) = n$

(v) $\det(A) \neq 0$

(Folgt aus (D7) und Aussagen zum Gaußschen Verfahren)

(D9) Produktregeln.

Seien $A, B \in K^{(n,n)}$, $\alpha \in K$. Dann gilt:

(a) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ (gilt auch, falls K ein kommutativer Ring ist, mit Leibnizdefinition)

(b) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

(c) $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$, sofern A invertierbar ist

Beweis.

$$1 = \det(E_n) \tag{5.1044}$$
$$= \det\left(AA^{-1}\right) \tag{5.1045}$$
$$= \det(A) \cdot \det\left(A^{-1}\right) \tag{5.1046}$$
$$\iff \frac{1}{\det(A^{-1})} = \det(A) \tag{5.1047}$$

$\square$

5.6.3. Adjunkten und Laplacesche Entwicklungssätze

5.33. Sei $A \in K^{(n,n)}$. Dann bezeichnet $A_{ij} \in K^{(n-1,n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der Zeile i und der Spalte j entsteht.

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} \tag{5.1048}$$

heißt dann **Adjunkte** oder **Cofaktor** zum Element a_{ij}. A_{ij} heißt **Minor**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \tag{5.1049}$$

Entwicklungssätze

(1) Entwickeln nach der i-ten Zeile:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij} \tag{5.1050}$$

Beispiel: Entwickeln nach der zweiten Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot (+1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.1051}$$

$$= 0 - 12 + 14 \tag{5.1052}$$

$$= 2 \tag{5.1053}$$

(2) Entwickeln nach der j-ten Spalte

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij} \tag{5.1054}$$

Das Verfahren funktioniert analog zum Entwickeln nach der i-ten Zeile.

Inversenformel Ist $\det(A) \neq 0$, so gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{adj}^{T}, \tag{5.1055}$$

wobei

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.1056}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{Vorzeichen: } \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \tag{5.1057}$$

$$\alpha_{11} = (+1) \det(d) = d \qquad \alpha_{12} = (-1) \det(c) = -c \tag{5.1058}$$

$$\alpha_{21} = (-1) \det(b) = -b \qquad \alpha_{22} = (+1) \det(a) = a \tag{5.1059}$$

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{5.1060}$$

$$A_{adj}^{T} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{5.1061}$$

$$\det(A) = ad - bc \tag{5.1062}$$

Inverse von A, falls $ad - bc \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{5.1063}$$

Bemerkung. Entwicklungssätze sind dann „gut“, wenn in einer Zeile oder Spalte viele Nullen vorkommen. Im Allgemeinen ist jedoch das Gauß-Verfahren besser.

5.6.4. Anwendungen der Determinante

Volumen im $\mathbb{R}^3$

Für das Volumen V den Parallelepipeds mit den Seitenvektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$V = |\det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})| \tag{5.1064}$$

Analog für $n > 3$.

Untersuchung von linearen Gleichungssystemen

(1) Inhomogenes lineares Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad A \in K^{(n,n)} \qquad \vec{b} \in K^n \tag{5.1065}$$

1. Fall: $\det A \neq 0$. Dann ist $\mathrm{rg}(A) = n$ und die Inverse A^{-1} existiert.

$$\Longrightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \tag{5.1066}$$

$$\Longrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b} \tag{5.1067}$$

Damit gibt es genau eine Lösung des LGS, nämlich $A^{-1}\vec{b}$.

2. Fall: $\det A = 0$. Dann ist $\mathrm{rg}(A) < n$ und die Inverse von A existiert nicht.

(a) $\mathrm{rg}\left(A, \vec{b}\right) \neq \mathrm{rg}(A) \Longrightarrow$ keine Lösung

(b) $\mathrm{rg}\left(A, \vec{b}\right) = \mathrm{rg}(A) \Longrightarrow$ Lösungsmenge ist affiner Unterraum Γ der Dimension $d = n - \mathrm{rg}(A) \geq 1$, also $|K|^d$ viele Lösungen.

Cramersche Regel. Sei $A \in K^{(n,n)}$ und $\det(A) \neq 0$. Dann gilt für die eindeutige Lösung $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$:

$$x_i = \frac{\det\left(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_{i-1}}, \vec{b}, \vec{a_{i+1}}, \ldots, \vec{a_n}\right)}{\det(A)} \tag{5.1068}$$

(wobei $A = (\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n})$).

Beweis. (für $n = 2$)

$$(\vec{a_1}, \vec{a_2}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{b} \iff x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} = \vec{b} \tag{5.1069}$$

(1)

$$\det\left(\vec{b}, \vec{a_2}\right) = \det\left(\underbrace{x_1 \vec{a_1} + x_2 \vec{a_2}}_{\text{1. Spalte}}, \vec{a_2}\right) \tag{5.1070}$$

$$\overset{\text{D1}}{=} x_1 \det\left(\vec{a_1}, \vec{a_2}\right) + x_2 \det\left(\vec{a_2}, \vec{a_2}\right) \tag{5.1071}$$

$$= x_1 \det A \tag{5.1072}$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = \frac{\det\left(\vec{b}, \vec{a_2}\right)}{\det(A)} \tag{5.1073}$$

(2) Analog

$$x_2 = \frac{\det\left(\vec{a_1}, \vec{b}\right)}{\det(A)} \tag{5.1074}$$

Der Beweis erfolgt analog für den allgemeinen Fall. □

Beispiel: $K = \mathbb{C}, n = 2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{i}+4 & 5 \\ 4 & \mathrm{i}-1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{5.1075}$$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} \mathrm{i}+1 & 5 \\ 4 & \mathrm{i}-1 \end{pmatrix} \tag{5.1076}$$

$$= (\mathrm{i}+1)(\mathrm{i}-1) - 4 \cdot 5 \tag{5.1077}$$

$$= -2 - 20 \tag{5.1078}$$

$$= -22 \tag{5.1079}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & \mathrm{i}-1 \end{pmatrix} = 2(\mathrm{i}-1) - 10 \tag{5.1080}$$

$$= 2\mathrm{i}-12 \tag{5.1081}$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = \frac{2\mathrm{i}-12}{-22} \tag{5.1082}$$

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{i}+1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2(\mathrm{i}+1) - 8 \tag{5.1083}$$

$$= 2\mathrm{i}-6 \tag{5.1084}$$

$$\Longrightarrow \quad x_2 = \frac{2\mathrm{i}-6}{-22} \tag{5.1085}$$

Lösung:

$$\vec{x} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-\mathrm{i} \\ 3-\mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{5.1086}$$

(2) Homogenes lineares Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{0}, \qquad \text{mit } A \in K^{(n,n)}, \vec{0} \in K^n, \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \tag{5.1087}$$

hat stets die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

1. Fall $\det A \neq 0 \implies$ es gibt *nur* die triviale Lösung.
2. Fall $\det A = 0 \implies$ es gibt auch nicht-triviale Lösungen ($\vec{x} \neq 0$ mit $A\vec{x} = \vec{0}$).

Vektorprodukt im $\mathbb{R}^n$

5.34. Seien $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$. Der Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e_1} & a_1 & b_1 \\ \vec{e_2} & a_2 & b_2 \\ \vec{e_3} & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \tag{5.1088}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \tag{5.1089}$$

ist das **Vektorprodukt** aus den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} \tag{5.1090}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{5.1091}$$

Rechenregeln

(V1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$

(V2) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$\vec{a} \times \left(t\vec{b}\right) = t\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \forall t \in K$

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

$(t\vec{a}) \times \vec{b} = t\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$

(V3) $\left\langle \left(\vec{a}, \vec{b}\right), \vec{c} \right\rangle = \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$

(V4) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0$, also $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$
$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$, also $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

(V5) $\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| = \|\vec{a}\| \left\| \vec{b} \right\| \cdot \sin\left(\sphericalangle \vec{a}, \vec{b}\right)$
$\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|^2 = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\right)$

(V6) $\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \left\| \vec{b} \right\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$

Beweis.

$$\cos^2 \sphericalangle\alpha + \sin^2 \sphericalangle\alpha = 1 \tag{5.1092}$$

$$\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}{\|\vec{a}\|^2 \left\| \vec{b} \right\|^2} + \frac{\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|}{\|\vec{a}\|^2 \left\| \vec{b} \right\|^2} = 1 \tag{5.1093}$$

$$\Longrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 + \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \left\| \vec{b} \right\|^2 \tag{5.1094}$$

□

5.7. Lineare Abbildungen und Eigenwerte

5.7.1. Lineare Abbildungen und Gleichungen

Seien V, W Vektorräume über demselben Körper K, $L : V \to W$ Abbildung.

5.35. L heißt **lineare Abbildung**, falls gilt:

$$\forall \alpha, \beta \in K; \forall x, y \in V : L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \tag{5.1095}$$

5.36. Die Gleichung $L(x) = b$ heißt **lineare Gleichung** in der Unbekannten x, falls L eine lineare Abbildung ist. Sie heißt **homogen**, falls $b = 0_W$.

Beispiele:

(a) $V = K^n$, $W = K^m$, $A \in K^{(m,n)}$
$f\colon V \to W$, $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ ist eine lineare Abbildung, denn

$$f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \tag{5.1096}$$
$$= \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y} \tag{5.1097}$$
$$= \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}) \tag{5.1098}$$

Insbesondere ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ eine lineare Gleichung.

(b) $V = C^1[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ [8], $W = C^0[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ [9]. Die Abbildung $D: V \to W, D(f) := f'$ ist linear, denn

$$\begin{aligned} D(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g)' && (5.1099)\\ &= (\alpha f)' + (\beta g)' && (5.1100)\\ &= \alpha f' + \beta g' && (5.1101)\\ &= \alpha D(f) + \beta D(g) && (5.1102) \end{aligned}$$

(c) Die identische Abbildung $id_V: V \to V$, $id_V(x) := x$ ist linear, denn

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in V: id_V(\alpha x + \beta y) &= \alpha x + \beta y && (5.1103)\\ &= \alpha id_V(x) + \beta id_V(y) && (5.1104) \end{aligned}$$

Bemerkungen.

- Die Menge $L(V, W) := \{f: V \to W \mid f \text{ ist linear}\}$ der linearen Abbildungen von V nach W ist ein linearer Unterraum von $\text{Abb}(V, W)$, also dem Vektorraum aller Abbildungen von V nach W, d. h. die Summe zweier linearer Abbildungen von V nach W und Vielfache solcher Abbildungen sind ebenfalls lineare Abbildungen von V nach W.

Beispiel: $L: C^1[\mathbb{R}, \mathbb{R}] \to C^0[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$, $L(f) = f - f'$ ist lineare Abbildung, denn $L = D + (-1)id_V$.

Satz 5.15 (Hauptsatz über lineare Gleichungen)**.** *Seien V, W Vektorräume über dem Körper K und $L \in L(V, W)$ lineare Abbildung. Sei $U = \{x \in V \mid L(x) = 0_W\}$ (=* Kern*L), $\Gamma = \{x \in V \mid L(x) = b\}$.*

Dann gilt:

(1) U ist ein linearer Unterraum von V.

(2) Γ ist leer oder, falls $x_s \in \Gamma$, dann ist Γ ein affiner Unterraum von V und $\Gamma = x_s + U$.

Beweis. Analog zum Beweis des Hauptsatzes über lineare Gleichungssysteme (Satz 5.9). Der Hauptsatz über lineare Gleichungssysteme ist ein Spezialfall von Satz 5.15. □

Beispiel: Gesucht ist eine Funktion $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Gleichung $y'(x) - y(x) = 3x^2 - x^3$ erfüllt. Ist eine lineare Gleichung $L(y) = y' - y$, $b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b(x) = 3x^2 - x^3$.

- homogene lineare Gleichung: $y' - y = 0$, d. h. $L(y) = 0$ bzw. $y' = y$.

$$\begin{aligned} M &= \{y \mid y' = y\} && (5.1105)\\ &= \{c\mathrm{e}^x \mid c \in \mathbb{R}\} && (5.1106) \end{aligned}$$

[8] Dies ist der Vektorraum aller stetig differenzierbaren Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

[9] Dies ist der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- eine spezielle Lösung: $y_s(x) = x^3$
- allgemeine Lösung:

$$y_s + U = \left\{ x^3 + c\,\mathrm{e}^x \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\} \tag{5.1107}$$

5.7.2. Lineare Abbildungen $L : K^n \to K^m$, Matrizendarstellung

Gegeben:

- $V := K^n,\ W := K^m$
- $L : V \to W$

Dann gilt:

(i) Ist $L(\vec{x}) = M\vec{x}$, wobei $M \in K^{(m,n)}$, so ist L linear (siehe Abschnitt 5.7.1).

(ii) Ist L eine lineare Abbildung, dann gibt es eine Matrix $M \in K^{(m,n)}$, sodass gilt $L(\vec{x}) = M\vec{x}$.

Beweis.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{5.1108}$$

$$= x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \cdots + x_n\vec{e_n} \tag{5.1109}$$

$$L(\vec{x}) = L(x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n}) \tag{5.1110}$$

$$= L(x_1\vec{e_1}) + \cdots + L(x_n\vec{e_n}) \tag{5.1111}$$

$$= x_1 L(\vec{e_1}) + \cdots + x_n L(\vec{e_n}) \tag{5.1112}$$

$$= \underbrace{(L(\vec{e_1}), \ldots, L(\vec{e_n}))}_{=M \in K^{(m,n)}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{5.1113}$$

$$= M\vec{x} \tag{5.1114}$$

□

Beispiel:

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{Drehung um 0 mit Winkel } \varphi \text{ (fest)} \tag{5.1115}$$

Linearität:

$$L(\alpha\vec{x}) = \alpha L(\vec{x}) \quad \checkmark \tag{5.1116}$$

$$L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y}) \quad \checkmark \tag{5.1117}$$

Bestimmung von M wie oben:

$$L(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \tag{5.1118}$$

$$L(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{5.1119}$$

$$\Longrightarrow M = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\text{sog. }\textbf{Drehmatrix}} \tag{5.1120}$$

$$= M_\varphi \tag{5.1121}$$

Also gilt:

$$L(\vec{x}) = M\vec{x} \tag{5.1122}$$

M_φ ist invertierbar (denn: $\det(M_\varphi) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$).

$$\forall \vec{x} : M_{-\varphi}(M_\varphi \vec{x}) = \vec{x} \tag{5.1123}$$

$$= E\vec{x} \tag{5.1124}$$

$$\Longrightarrow M_{-\varphi} M_\varphi = E \tag{5.1125}$$

$$\Longrightarrow M_\varphi^{-1} = M_{-\varphi} \tag{5.1126}$$

Beispiel:

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ Spiegelung an einer Geraden durch } \vec{0} \tag{5.1127}$$

$$\Gamma = [\vec{a}] \text{ mit } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.1128}$$

$$\Gamma' = \left[\vec{b}\right], \text{ hier konkret } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{5.1129}$$

$$\vec{x} \in \Gamma \Longrightarrow L(\vec{x}) = \vec{x} \tag{5.1130}$$

$$\Longrightarrow L(\vec{a}) = \vec{a} \tag{5.1131}$$

$$\vec{x} \in \Gamma' \Longrightarrow L(\vec{x}) = -\vec{x} \tag{5.1132}$$

$$\Longrightarrow L\left(\vec{b}\right) = -\vec{b} \tag{5.1133}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

$$\Longrightarrow M = \left(L(\vec{a}), L\left(\vec{b}\right)\right) \cdot \left(\vec{a}, \vec{b}\right)^{-1} \tag{5.1134}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \tag{5.1135}$$

$$= \dots \tag{5.1136}$$

Komposition linearer Abbildungen / Matrizenmultiplikation

$$L_1 : K^n \to K^m \qquad \text{linear mit } L_1(\vec{x}) = M\vec{x} \tag{5.1137}$$

$$L_2 : K^m \to K^p \qquad \text{linear mit } L_2(\vec{x}) = N\vec{x} \tag{5.1138}$$

$$L_2 \circ L_1 : K^n \to K^p, \qquad (L_2 \circ L_1)(x) = L_2(L_1(\vec{x})) \tag{5.1139}$$

$$= L_2(M\vec{x}) \tag{5.1140}$$

$$= N(M\vec{x}) \tag{5.1141}$$

$$= (NM)\vec{x} \tag{5.1142}$$

$$\tag{5.1143}$$

Also ist $L_2 \circ L_1$ linear und wird durch die Matrix NM beschrieben.

Ist $L : K^n \to K^n$ dargestellt durch M (d. h. $L(\vec{x}) = M\vec{x}$) und M invertierbar, so ist L bijektiv und $L^{-1} : K^n \to K^n$ ist linear und wird dargestellt durch M^{-1}.

Beweis. Sei $R : K^n \to K^n$ die lineare Abbildung $R(\vec{x}) = M^{-1}\vec{x}$ definiert.

$$\Longrightarrow \quad (L \circ R)(\vec{x}) = L(R(\vec{x})) \tag{5.1144}$$

$$= L\left(M^{-1}\vec{x}\right) \tag{5.1145}$$

$$= MM^{-1}\vec{x} \tag{5.1146}$$

$$= \vec{x} \tag{5.1147}$$

$$\text{und} \quad (R \circ L)(\vec{x}) = R(L(\vec{x})) \tag{5.1148}$$

$$= R(M\vec{x}) \tag{5.1149}$$

$$= M^{-1}M\vec{x} \tag{5.1150}$$

$$= \vec{x}, \tag{5.1151}$$

$$\text{d. h. } L \circ R = R \circ L \tag{5.1152}$$

$$= id_{K^n}, \tag{5.1153}$$

d. h. beide Abbildungen sind bijektiv und invers zueinander.

$$\Longrightarrow \quad L^{-1} = R \tag{5.1154}$$

□

5.7.3. Orthogonale Matrizen

Wir betrachten $A = (\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$.

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \vec{y} = A\vec{x} \in \mathbb{R}^n \tag{5.1155}$$

Ist A eine Drehmatrix des $\mathbb{R}^n \implies \vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$ ist Orthonormalsystem des $\mathbb{R}^n$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} \vec{a_1}^T \\ \vdots \\ \vec{a_n}^T \end{pmatrix} (\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}) \tag{5.1156}$$

$$= \left(a_i^T, a_j\right)_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \tag{5.1157}$$

$$= \langle a_i, a_j \rangle \tag{5.1158}$$

Ist A Drehmatrix, so erhält man $A^T A = E$.

5.37. $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt **orthogonale Matrix**, falls $A^T A = E$ ist.

Folgerung:

- $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist orthogonal $\iff$ die Spalten von A bilden ein Orthonormalsystem und damit eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.

Eigenschaften orthogonaler Matrizen

(O1) $A^{-1} = A^T$

(O2) A^T und A^{-1} sind ebenfalls orthogonal

(O3) $\langle A\vec{x}, A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

(O4) $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$

(O5) $\sphericalangle (A\vec{x}, A\vec{y}) = \sphericalangle (\vec{x}, \vec{y})$

(O6) $\det(A) = \pm 1$

(O7) $AB = \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist orthogonal

Beweis.

(O1), (O2)

$$A \text{ orthogonal} \implies A^T A = e \tag{5.1159}$$

$$\implies A A^T = E \tag{5.1160}$$

$$\implies A^T = A^{-1} \tag{5.1161}$$

(O3)

$$\langle A\vec{x}, A\vec{y}\rangle = (A\vec{x})^T (A\vec{y}) \tag{5.1162}$$
$$= \vec{x}^T A^T A\vec{y} \tag{5.1163}$$
$$= \vec{x}^T E\vec{y} \tag{5.1164}$$
$$= \vec{x}^T\vec{y} \tag{5.1165}$$
$$= \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \tag{5.1166}$$

(O4)

$$\|A\vec{x}\| = \sqrt{\langle A\vec{x}, A\vec{x}\rangle} \tag{5.1167}$$
$$= \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle} \tag{5.1168}$$
$$= \|\vec{x}\| \tag{5.1169}$$

(O5) folgt aus (O3), (O4), da $\cos\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}$.

(O6)

$$A \text{ orth.} \implies A^T A = E \tag{5.1170}$$
$$\implies 1 = \det E = \det A^T A \tag{5.1171}$$
$$= \det\left(A^T\right) \det(A) \tag{5.1172}$$
$$= (\det(A))^2 \tag{5.1173}$$
$$\implies \det A = \pm 1 \tag{5.1174}$$

(O7)

$$(AB)^T (AB) = B^T A^T AB \tag{5.1175}$$
$$= B^T EB \tag{5.1176}$$
$$= B^T B \tag{5.1177}$$
$$= E \tag{5.1178}$$

□

Satz 5.16. *Die Menge* $O(n) = \left\{A \in \mathbb{R}^{(n,n)} \,\middle|\, A^T A = E\right\}$ *der orthogonalen* $n \times n$*-Matrizen bildet eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation.*

Beweis. z.z.: $O(n)$ ist Untergruppe der Gruppe

$$GL(n, \mathbb{R}) = \left\{A \in \mathbb{R}^{(n,n)} \,\middle|\, A \text{ ist invertierbar}\right\} \tag{5.1179}$$

mit dem neutralen Element E.

(U1) $E \in O(n)$, da $E^T E = E$

(U2) $A, B \in O(n) \overset{(O7)}{\Longrightarrow} A \cdot B \in O(n)$

(U3) $A \in O(n) \overset{(O2)}{\Longrightarrow} A^{-1} \in O(n)$

□

Satz 5.17 (Klassifikationssatz)**.** *$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$; $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \vec{y} := A\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist...*

(a) Drehung $\iff$ A orthogonal und $\det A = +1$,

(b) Spiegelung $\iff$ A orthogonal und $A^T = A$ und $A^T A = AA = E$.

*(c) Ist A orthogonal und obige Abbildung weder Drehung noch eine Spiegelung, so ist sie eine **Drehspiegelung** („Drehung ∘ Spiegelung“).*

Beispiel 1:

$$Y = A\vec{x} \text{ Spiegelung im } \mathbb{R}^3 an \tag{5.1180}$$
$$\Gamma = [\vec{e_1}] \tag{5.1181}$$

$$A\vec{e_1} = \vec{e_1} \tag{5.1182}$$
$$A\vec{e_2} = -\vec{e_2} \tag{5.1183}$$
$$A\vec{e_3} = -\vec{e_3} \tag{5.1184}$$
$$A = (\vec{e_1}, -\vec{e_2}, -\vec{e_3}) \tag{5.1185}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} A^T \qquad = A \tag{5.1186}$$
$$\Longrightarrow A^T A = E \tag{5.1187}$$
$$\Longrightarrow A \text{ orthogonal} \tag{5.1188}$$
$$\det A = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \tag{5.1189}$$
$$= 1 \tag{5.1190}$$
$$\Longrightarrow \vec{y} = A\vec{x} \text{ beschreibt eine Drehung.} \tag{5.1191}$$
$$\Longrightarrow \text{Drehachse } \Gamma \tag{5.1192}$$
$$\text{Drehebene } \Gamma' = [\vec{e_2}, \vec{e_3}] \tag{5.1193}$$
$$\text{Drehwinkel } 180° \tag{5.1194}$$

Beispiel 2: $\vec{y} = A\vec{x}$ beschreibe die Drehung um $\Gamma = [\vec{e_1}]$ im $\mathbb{R}^3$ mit dem Drehwinkel φ.

$$A\vec{e_1} = \vec{e_1} \tag{5.1195}$$
$$A\vec{e_2} = \cos\varphi\vec{e_2} + \sin\varphi\vec{e_3} \tag{5.1196}$$
$$A\vec{e_3} = -\sin\varphi\vec{e_2} + \cos\varphi\vec{e_3} \tag{5.1197}$$
$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{5.1198}$$

Beispiel 3: $\vec{y} = A\vec{x}$ beschreibe die Drehung im $\mathbb{R}^3$ um eine Ursprungsgerade Γ mit dem Drehwinkel φ.

- Wir bestimmen den Richtungsvektor $\vec{b_1}$ von Γ mit $\left\|\vec{b_1}\right\| = 1$, $\Gamma = \left[\vec{b_1}\right]$.
- Wir bestimmen eine Orthonormalbasis $\left\{\vec{b_2}, \vec{b_3}\right\}$ der Drehebene $\Gamma' = \Gamma^\perp = \left[\vec{b_2}, \vec{b_3}\right]$. Dann ist $\left\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\right\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ und es gilt:

$$A\vec{b_1} = \vec{b_1} \tag{5.1199}$$
$$A\vec{b_2} = \cos\varphi\vec{b_2} + \sin\varphi\vec{b_3} \tag{5.1200}$$
$$A\vec{b_3} = -\sin\varphi\vec{b_2} + \cos\varphi\vec{b_3} \tag{5.1201}$$
$$\text{Matrix } B = \left(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\right). \tag{5.1202}$$

Dabei ist B orthogonal, da $\left\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\right\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

$$\Longrightarrow B^T B = E \tag{5.1203}$$
$$B^{-1} = B^T \tag{5.1204}$$
$$\tag{5.1205}$$

Wir wählen nun $\vec{b_2}$ (und $\vec{b_3}$) so, dass $\det B = 1$.

$$AB = A\left(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\right) \tag{5.1206}$$
$$= \left(A\vec{b_1}, A\vec{b_2}, A\vec{b_3}\right) \tag{5.1207}$$
$$= \left(\vec{b_1}, \cos\varphi\vec{b_2} + \sin\varphi\vec{b_3}, -\sin\varphi\vec{b_2} + \cos\varphi\vec{b_3}\right) \tag{5.1208}$$
$$= \left(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{=D} \tag{5.1209}$$
$$\Longrightarrow A = BD\underbrace{B^{-1}}_{=B^T} \tag{5.1210}$$

Beispiel 4:

$$A = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} \tag{5.1211}$$

$$A^T = A \tag{5.1212}$$

$$A^T A = E \tag{5.1213}$$

$$\Longrightarrow A \text{ orthogonal} \tag{5.1214}$$

$$\tag{5.1215}$$

$$\overset{\text{Klassifikation}}{\Longrightarrow} \vec{y} = A\vec{x} \text{ ist Spiegelung an Ursprungsgerade im } \mathbb{R}^2 \tag{5.1216}$$

$$\tag{5.1217}$$

$$x \in \Gamma \iff A\vec{x} = \vec{x} \tag{5.1218}$$

$$\iff A\vec{x} = E\vec{x} \tag{5.1219}$$

$$\iff A\vec{x} - E\vec{x} = \vec{0} \tag{5.1220}$$

$$\iff (A - E)\,\vec{x} = \vec{0} \tag{5.1221}$$

$$\iff \vec{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{5.1222}$$

$$\Longrightarrow \Gamma = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \tag{5.1223}$$

5.7.4. Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer Matrizen

Eigenwertgleichung

Gegeben:

- $A \in K^{(n,n)}$

Gesucht:

- Lösungen $(\lambda, \vec{x})$ mit $\lambda \in K, \vec{x} \in K^n$ der Eigenwertgleichung $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ von A. Für alle $\lambda \in K$ ist $\vec{x} = \vec{0}$ eine (triviale) Lösung der Eigenwertgleichung.

5.38.

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{5.1224}$$

heißt **Eigenwertgleichung**.

5.39. Ist $(\lambda, \vec{x})$ eine Lösung der Eigenwertgleichung mit $\vec{x} \neq \vec{0}$, so heißt λ **Eigenwert** von A und $\vec{x}$ **Eigenvektor** von A zum Eigenvektor λ.

Beispiel:

$$\text{Spiegelmatrix } A = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & \\ 15 & \end{pmatrix} \tag{5.1225}$$

hat den Eigenwert 1, denn es gibt Vektoren $\neq \vec{0}$ mit der Eigenschaft $A\vec{x} = 1\vec{x}$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $\vec{x} \in \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$.

Allgemein gilt: Die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind die Fixpunkte von $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$; die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 sind die Lösungen von $A\vec{x} = \vec{0}$, vorausgesetzt, dass 1 bzw. 0 tatsächlich Eigenwerte von A sind.

Bemerkung. Ist $L : V \to W$ eine lineare Abbildung und gilt für ein $\vec{x} \in V \setminus \{0_V\}$ und $\lambda \in K$.

$$L(x) = \lambda x, \tag{5.1226}$$

so heißt x Eigenvektor von L zum Eigenwert λ.

Bestimmung der Eigenwerte von $A \in K^{(n,n)}$

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff (A - \lambda E)\,\vec{x} = \vec{0} \tag{5.1227}$$

ist ein homogenes lineares Gleichungssystem „mit Parameter λ“.

1. Fall: $\det(A - \lambda E) \neq 0$. Das LGS hat nur die triviale Lösung, also ist λ kein Eigenwert

2. Fall: $\det(A - \lambda E) = 0$. Das LGS hat nichttriviale Lösungen, also ist λ ein Eigenwert.

Beispiel 1:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)} \tag{5.1228}$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \tag{5.1229}$$

$$\det(A - \lambda E) = (5-\lambda)(1-\lambda) + 4 \tag{5.1230}$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 9 \stackrel{!}{=} 0 \tag{5.1231}$$

$$= (\lambda - 3)^2 \tag{5.1232}$$

$\lambda = 3$ ist zweifache Nullstelle von $\det(A - \lambda E)$. $\lambda_{1,2}$ ist zweifacher Eigenwert von A.

Beispiel 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.1233}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \tag{5.1234}$$

$$= \lambda^2 + 1 \tag{5.1235}$$

$$= (\lambda + \mathrm{i})(\lambda - \mathrm{i}) \tag{5.1236}$$

$$\lambda_1 = \mathrm{i} \tag{5.1237}$$

$$\lambda_2 = -\mathrm{i} \tag{5.1238}$$

A hat also keine reellen Eigenwerte, jedoch die komplexen Eigenwerte $\pm\mathrm{i}$. λ_1, λ_2 sind (einfache) komplexe Eigenwerte von A.

5.40.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) \tag{5.1239}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \tag{5.1240}$$

Dieses Polynom lässt sich weiter vereinfachen:

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_1\lambda^1 + b_0\lambda^0 \tag{5.1241}$$

ist ein Polynom vom Grad n und heißt **charakteristisches Polynom** von $A \in K^{(n,n)}$, $b_{n-1}, \ldots, b_0 \in K$.

Weiterhin gilt:

- $\lambda \in K$ ist Eigenwert von $A \iff p(\lambda) = 0$
- Ist $K = \mathbb{C}$, dann hat A genau n Eigenwerte (gezählt mit ihren Vielfachheiten als Nullstelle von $p(\lambda)$).
- Ist $K = \mathbb{R}$, dann hat A *höchstens* n (reelle) Eigenwerte.

Eigenvektoren von $A \in K^{(n,n)}$

Wir betrachten einen Eigenwert $\lambda = \tilde{\lambda} \in K$ von A und die Lösungsmenge der Eigenwertgleichung für $\lambda = \tilde{\lambda}$.

$$E\left(A, \tilde{\lambda}\right) = \left\{\vec{x} \in K^n \,\middle|\, \left(A - \tilde{\lambda}E\right)\vec{x} = \vec{0}\right\} \tag{5.1242}$$

Dann gilt:

(a) $\vec{x}$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $\tilde{\lambda} \iff \vec{x} \in E\left(A, \tilde{\lambda}\right) \setminus \left\{\vec{0}\right\}$

(b) $E\left(A, \tilde{\lambda}\right)$ ist linearer Unterraum von K^n (wird auch **Eigenraum** von A zum Eigenwert $\tilde{\lambda}$ genannt).[10]

(c) Ist $\lambda = \tilde{\lambda}$ ein k-facher Eigenwert (k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$), so gilt: $\dim E\left(A, \tilde{\lambda}\right) \in \{1, \ldots, k\}$. Man nennt k die **algebraische Vielfachheit** und $\dim E\left(A, \tilde{\lambda}\right)$ die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwerts $\tilde{\lambda}$ von A.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad K = \mathbb{R} \tag{5.1243}$$

(a) charakteristische Matrix

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \tag{5.1244}$$

(b) charakteristisches Polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) \tag{5.1245}$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 3) \tag{5.1246}$$

(c) Eigenwert ist $\lambda = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 2

(d) $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$ für $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.1247}$$

$$\Longrightarrow \vec{x} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \tag{5.1248}$$

$$\Longrightarrow E(A, 3) = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \tag{5.1249}$$

$$= \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \tag{5.1250}$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 3 sind:

$$\vec{x} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{5.1251}$$

[10]denn: $\vec{0} \in E\left(A, \tilde{\lambda}\right)$, denn $\left(A - \tilde{\lambda}E\right)\vec{0} = \vec{0}$, für $\vec{x} \in E\left(A, \tilde{\lambda}\right)$ und $\alpha \in K$ ist $\left(A - \tilde{\lambda}E\right)(\alpha\vec{x}) = \alpha\left(A - \tilde{\lambda}E\right)\vec{x} = \alpha\vec{0} = \vec{0}$, d. h. $\alpha\vec{x} \in E\left(A, \tilde{\lambda}\right)$; $\vec{x}, \vec{y} \in E\left(A, \tilde{\lambda}\right) \implies \left(A - \tilde{\lambda}E\right)(\vec{x} + \vec{y}) = \left(A - \tilde{\lambda}E\right)\vec{x} + \left(A - \tilde{\lambda}E\right)\vec{y} = \vec{0}$, folglich $\vec{x} + \vec{y} \in E\left(A, \tilde{\lambda}\right)$

Die geometrische Vielfachheit von 3 ist:

$$\dim E(A,3) = 1. \tag{5.1252}$$

5.7.5. Quadratische Formen und Hauptachsentransformation

Ellipsen- und Hyperbelgleichungen

Wie sieht die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$6x^2 + 8xy + 6y^2 = 20 \tag{5.1253}$$

in der xy-Ebene des $\mathbb{R}^2$ aus?

Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.1254}$$

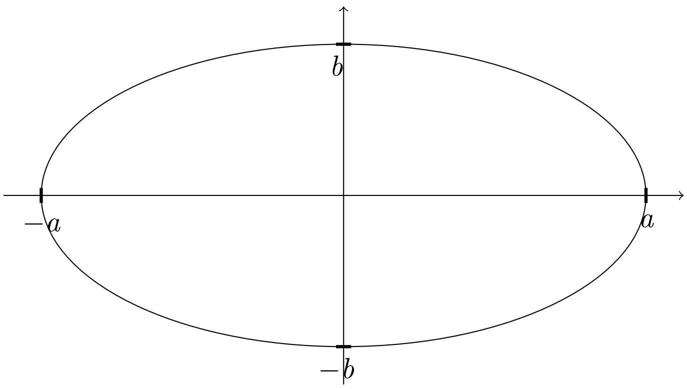

Abbildung 5.23.: Ellipse

Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.1255}$$

Abbildung 5.24.: Hyperbel

Quadratische Formen

5.41. Ein Ausdruck der Form

$$q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{5.1256}$$

$$= x^T A \vec{x} \tag{5.1257}$$

heißt **quadratische Form** in $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, wobei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine *symmetrische* Matrix ist (d. h. $A^T = A$).

(a) Fall $n = 2$:

$$\vec{x} = (x, y)^T \tag{5.1258}$$

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} \tag{5.1259}$$

$$= (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5.1260}$$

$$= (x, y) \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} \tag{5.1261}$$

$$= ax^2 + bxy + bxy + cy^2 \tag{5.1262}$$

$$= ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{5.1263}$$

$$q(\vec{x}) = 6x^2 + 8xy + 6y^2 \tag{5.1264}$$

$$= (x, y) \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5.1265}$$

(b) Spezialfall:

Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine Diagonalmatrix, etwa

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{5.1266}$$

so gilt

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} \tag{5.1267}$$

$$= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 \tag{5.1268}$$

Lineare Koordinatentransformation

Darstellung des Vektors (Punktes) $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ bezüglich verschiedener Basen des $\mathbb{R}^n$.

(a) Standardbasis $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$

Dann gilt

$$\vec{x} = x_1 \vec{e_1} + \cdots + x_n \vec{e_n}. \tag{5.1269}$$

$x_1, \ldots, x_n$ sind dann die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich der Standardbasis.

(b) Neue Basis $\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}$

Der Vektor $\vec{x}$ hat dann genau eine Darstellung der Form

$$\vec{x} = u_1 \vec{b_1} + \cdots + u_n \vec{b_n}. \tag{5.1270}$$

$u_1, \ldots, u_n$ sind dann die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich der Basis $\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}$.

$\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T$ heißt **Koordinatenvektor** von $\vec{x}$ beezüglich $\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}$.

(c) Transformationsgleichung (Umrechnung zwischen $\vec{x}$ und $\vec{u}$)

$$T = \left(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}\right) \tag{5.1271}$$

Die Matrix T ist invertierbar und es gilt

$$\vec{x} = T\vec{u} \iff T^{-1}\vec{x} = \vec{u} \tag{5.1272}$$

Die Abbildung $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \mapsto \vec{x} = T\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ ist linear und bijektiv. Die Abbildung $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \vec{u} = T^{-1} \in \mathbb{R}^n$ ist ebenfalls linear und bijektiv. Man nennt Gleichung 5.1272 eine **lineare Koordinatentransformation**.

Beispiel:

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.1273}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=T} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{5.1274}$$

Einige Beispiele für diese Koordinatentransformation finden sich in Tabelle 5.1.

Tabelle 5.1.: Einige beispielhafte Koordinatentransformationen

Koordinatenvektor $\vec{u}$	Vektor (Punkt) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\vec{u}$
$\vec{u} = \vec{0}$	$\vec{x} = \vec{0}$
$\vec{u} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \vec{b_1}$
$\vec{u} = \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \vec{b_2}$
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \vec{b_1} + \vec{b_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Hauptachsentransformation

(a) Transformationsformel für quadratische Gleichungen

$$\vec{x}^T A \vec{x} = d \tag{5.1275}$$

ist eine quadratische Gleichung in $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$. $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist eine symmetrische Matrix, $d \in \mathbb{R}$.

Transformation:

$$\vec{x} = T\vec{u} \qquad T \in \mathbb{R}^{(n,n)} \text{ invertierbar} \tag{5.1276}$$

Gleichung 5.1275 ist dann äquivalent zu:

$$\vec{u}^T \underbrace{\left(T^T A T\right)}_{=:D \text{ symmetrisch}} \vec{u} = d. \tag{5.1277}$$

Diese ist eine quadratische Gleichung in $\vec{u}$.

Beweis.

$$\vec{x}^T A \vec{x} = (T\vec{u})^T A (T\vec{u}) \tag{5.1278}$$
$$= \vec{u}^T T^T A T \vec{u} \ \checkmark \tag{5.1279}$$
$$D^T = \left(T^T A T\right)^T \tag{5.1280}$$
$$= T^T \underbrace{A^T}_{=A} \underbrace{T^{TT}}_{=T} \tag{5.1281}$$
$$= T^T A T \ \checkmark \tag{5.1282}$$
$$= D \tag{5.1283}$$

□

(b) Zielstellung

Gegeben:

- $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrische Matrix

Gesucht:

- $T \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ deart, dass gilt

  (b1) T orthogonal ($T^T = T^{-1}$)

  (b2) $D = T^T A T$ ist Diagonalmatrix

Lösung:

- Wir bestimmten (falls möglich) eine Orthonormalbasis $\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}$ des $\mathbb{R}^n$ aus lauter Eigenvektoren von A.

  Ist $\vec{b_i}$ ein Eigenvektor von A zu Eigenwert λ_i, dann gilt:

$$A\vec{b_i} = \lambda\vec{b_i} \tag{5.1284}$$

und die Matrix $T = \left(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}\right)$ erfüllt (b1) und (b2).

$$D = T^T A T \tag{5.1285}$$
$$= T^{-1} A T \tag{5.1286}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{5.1287}$$

Beweis. T ist orthogonal, da die Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis bilden und es gilt $T^{-1} = T^T$. ✓

$$T^{-1} A T = D \iff A T = TD \tag{5.1288}$$
$$\iff A\left(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}\right) = \left(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}\right)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{5.1289}$$
$$\iff \left(A\vec{b_1}, \ldots, A\vec{b_n}\right) = \left(\lambda_1\vec{b_1}, \ldots, \lambda_n\vec{b_n}\right) \tag{5.1290}$$
$$\iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} : A\vec{b_i} = \lambda_i\vec{b_i},$$
$$\text{d. h. } \vec{b_i} \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_i \tag{5.1291}$$

□

(c) Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gilt:

(c1) Alle Eigenwerte von A sind reell und A hat n reelle Eigenwerte (gezählt mit algebraischen Vielfachheiten).

(c2) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind stehs orthogonal.

(c3) Für jeden Eigenwert von A sind algebraische und geometrische Vielfachheiten gleich.

(c4) Es gibt eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ aus lauter Eigenvektoren von A.

Beispiele

$$6x^2 + 8xy + 6y^2 = 20 \tag{5.1292}$$

$$(x, y) \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = 20 \tag{5.1293}$$

$$\tag{5.1294}$$

(a) Eigenwerte und Eigenvektoren von A bestimmen

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff (A - \lambda E)\,\vec{x} = \vec{0} \tag{5.1295}$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 6 - \lambda & 4 \end{pmatrix} \tag{5.1296}$$

$$p\,(\lambda) = \det\,(A - \lambda E) \tag{5.1297}$$

$$= (6 - \lambda)^2 - 16 \tag{5.1298}$$

$$= \lambda^2 - 12\lambda - 20 \tag{5.1299}$$

$$\stackrel{!}{=} 0 \tag{5.1300}$$

Eigenwerte von A :

$$\lambda_{1,2} = 6 \pm \sqrt{16} \tag{5.1301}$$

$$\lambda_1 = 10 \tag{5.1302}$$

$$\lambda_2 = 2 \tag{5.1303}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 10$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \tag{5.1304}$$

$$\implies \vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.1305}$$

$$E\,(A, \lambda_1) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \tag{5.1306}$$

$$\vec{b_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ONB von } E\,(A, \lambda_1) \tag{5.1307}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \tag{5.1308}$$

$$\Longrightarrow \vec{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.1309}$$

$$E(A, \lambda_2) = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \tag{5.1310}$$

$$\vec{b_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ONB von } E(A, \lambda_2) \tag{5.1311}$$

(b) Transformationsmatrix

$$T = \left(\vec{b_1}, \vec{b_2} \right) \tag{5.1312}$$

$$= \sqrt{1}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1313}$$

(c) Koordinatentransformation

$$\vec{x} = T\vec{u} \tag{5.1314}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{5.1315}$$

(d) transformierte Gleichung

$$\vec{u}^T D = 20 \tag{5.1316}$$

$$\text{mit } D = T^T A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{5.1317}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.1318}$$

$$10u^2 + 2v^2 = 20 \tag{5.1319}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{u^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{v^2}{\sqrt{10}^2} = 1 \tag{5.1320}$$

$$2x^2 + 12xy - 7y^2 = d \tag{5.1321}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 6 & -7-\lambda \end{pmatrix} \tag{5.1322}$$

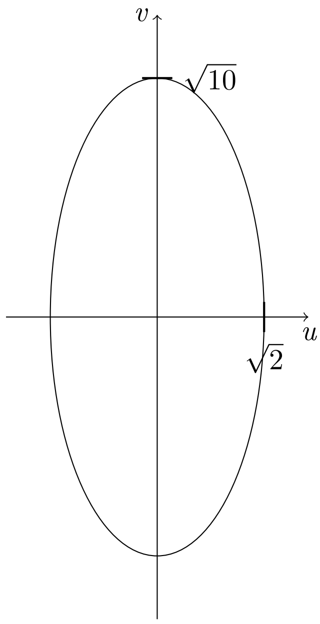

Abbildung 5.25.: Darstellung der Punktmenge im Koordinatensystem

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda E) && (5.1323)\\
&= \lambda^2 + 5\lambda - 50 && (5.1324)\\
&\overset{!}{=} 0 && (5.1325)\\
\Longrightarrow \quad \lambda_1 &= 5, && (5.1326)\\
\lambda_2 &= -10 && (5.1327)
\end{aligned}
$$

Eigenvektoren zu λ_1:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} \vec{x} &= \vec{0} && (5.1328)\\
\Longrightarrow \quad E(A, \lambda_1) &= \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] && (5.1329)\\
\vec{b_1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} && (5.1330)
\end{aligned}
$$

Eigenvektoren zu λ_2:

$$
\begin{aligned}
E(A, \lambda_2) &= \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] && (5.1331)\\
\vec{b_2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} && (5.1332)
\end{aligned}
$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.1333}$$

$$\implies 5u^2 - 10v^2 = 20 \tag{5.1334}$$

$$\implies \frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{2} = 1 \tag{5.1335}$$

$$= \frac{u^2}{2^2} - \frac{v^2}{\sqrt{2}^2} \tag{5.1336}$$

Furchbares Beispiel™:

$$7x^2 + 13y^2 + 6\sqrt{3}xy - 12\left(\sqrt{3}+4\right)x - 12\left(4\sqrt{3}-1\right)y = -164 \tag{5.1337}$$

$$(x, y)\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\left(-12\left(\sqrt{3}+4\right), -12\left(4\sqrt{3}-1\right)\right)}_{=\vec{b}^T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -164 \tag{5.1338}$$

$$\implies \vec{x}^T A\vec{x} + \vec{b}^T\vec{x} = -164 \tag{5.1339}$$

Die Eigenwerte von A seien $\lambda_1 = 16, \lambda_2 = 4$ (Rechnung). Die Basisvektoren sind:

$$\vec{b_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \vec{b_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.1340}$$

$\vec{x} = T\vec{u}$ liefert:

$$(u, v)\; T^T A\, T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \vec{b}^T T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -164 \tag{5.1341}$$

$$\implies 16u^2 + 4v^2 - 96u + 24v = 164 \qquad (?) \tag{5.1342}$$

Und auf wundersame Weise verlor die 164 ihr „–“. Fakt oder Fiktion? Ein Fall für Galileo Mystery.

$$16\left(u^2 - 6u\right) + 4\left(v^2 + 6v\right) = -164 \tag{5.1343}$$

$$16\,(u-3)^2 + 4\,(v+3)^2 = -164 + 16 \cdot 9 + 4 \cdot 9 \tag{5.1344}$$

$$= c \tag{5.1345}$$

$$= 16 \tag{5.1346}$$

Er ist Mathematiker, er muss so etwas eigentlich™ gar nicht ausrechnen...

Und plötzlich fiel ihm auf, dass die 164 mit einem „–“ vielleicht doch besser aussieht.

$$\frac{(u-3)^2}{1^2} + \frac{(v+3)^2}{2^2} = 1 \tag{5.1347}$$

In Standardkoordinaten liefert dies eine verschobene, drehgespiegelte Ellipse.

5.7.6. Affine Abbildungen

Definition

5.42. $F : K^n \to K^m$ wird **affine Abbildung** genannt, falls es $M \in K^{(m,n)}$ und $\vec{b} \in K^m$ gibt mit

$$F(\vec{x}) = M\vec{x} + \vec{b}. \tag{5.1348}$$

Spezialfälle

- $M = E$ $(m = n)$: $F(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{b}$ (**Verschiebung/Translation**)
- $\vec{b} = 0$: $F(\vec{x}) = M\vec{x}$ (lineare Abbildung)

$$\vec{x} \in K^n \quad \overset{\text{lin. Abb.}}{\Longrightarrow} \quad M\vec{x} \in K^m \quad \overset{\text{Translation}}{\Longrightarrow} \quad M\vec{x} + \vec{b} \in K^m \tag{5.1349}$$

Affine Koordinatentransformation

- affines Koordinatensystem (Punkt; Basis des $\mathbb{R}^n$)
- Punkt (Vektor) $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$

(a) Standardsystem $\left(\vec{0}; \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\right)$

$$\vec{x} = \vec{0} + x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n} \tag{5.1350}$$

(b) Neues Koordinatensystem $\left(\vec{r_0}; \vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}\right)$

$$\vec{x} = \vec{r_0} + u_1\vec{b_1} + \cdots + u_n\vec{b_n} \tag{5.1351}$$

$\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T$ heißt dann **affiner Koordinatenvektor** von $\vec{x}$ bezüglich des affinen Koordinatensystems $\left(\vec{r_0}; \vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}\right)$.

(c) Transformation

$$T = \left(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}\right) \text{ invertierbar} \tag{5.1352}$$

$$\Longrightarrow \vec{x} = \vec{r_0} + T\vec{u} \tag{5.1353}$$

$$\Longrightarrow \vec{x} - \vec{r_0} = T\vec{u} \tag{5.1354}$$

$$\Longrightarrow T^{-1}(\vec{x} - \vec{r_0}) = \vec{u} \tag{5.1355}$$

Hieraus folgt beispielweise:

$$\vec{u} = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{r_0} \tag{5.1356}$$

Spiegelung an einer Geraden

Gegeben:

- $\Gamma = \vec{r_0} + [\vec{a}]$
- $\vec{r_0} = (1, 2)^T$
- $\vec{a} = (2, 1)^T$

Gesucht:

- Spiegelung $\vec{y} = F(\vec{x})$
- $\vec{x}, \vec{y}$ im Standardsystem $\left(\vec{0}; \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

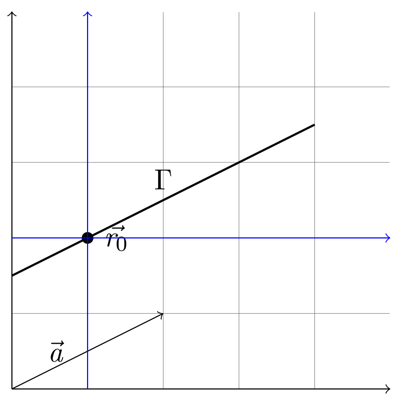

Abbildung 5.26.: Γ und $\vec{a}$ im Koordinatensystem

$$\vec{x} = \vec{r_0} + \vec{u} \qquad \vec{y} = \vec{r_0} + \vec{v} \tag{5.1357}$$

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{r_0} \qquad \vec{v} = \vec{y} - \vec{r_0} \tag{5.1358}$$

$$T = (\vec{e_1}, \vec{e_2}) \tag{5.1359}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1360}$$

$$= E \tag{5.1361}$$

Die Abbildung $\vec{u} \to \vec{v}$ ist eine Spiegelung an der Geraden $[\vec{a}]$ durch $\vec{0}$.

$$\vec{v} = M\vec{u} \tag{5.1362}$$
$$\text{mit } M\vec{a} = \vec{a} \tag{5.1363}$$
$$M\vec{b} = -\vec{b} \tag{5.1364}$$
$$\implies M\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{a}, -\vec{b}\right) \tag{5.1365}$$
$$\implies M = \left(\vec{a}, -\vec{b}\right)\left(\vec{a}, \vec{b}\right)^{-1} \tag{5.1366}$$
$$= \dots \tag{5.1367}$$
$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \tag{5.1368}$$

Damit gilt

$$\vec{v} = M\vec{u} \tag{5.1369}$$
$$\vec{v} = \vec{y} - \vec{r_0} \tag{5.1370}$$
$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{r_0} \tag{5.1371}$$
$$\implies (\vec{y} - \vec{r_0}) = M(\vec{x} - \vec{r_0}) \tag{5.1372}$$
$$\vec{y} = M(\vec{x} - \vec{r_0}) + \vec{r_0} \tag{5.1373}$$
$$= M\vec{x} \underbrace{- M\vec{r_0} + \vec{r_0}}_{=\vec{b} \in \mathbb{R}^2} \tag{5.1374}$$
$$= M\vec{x} + \vec{b} \tag{5.1375}$$
$$= M\vec{x} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{5.1376}$$

Kapitel 6.

Funktionen in mehreren Variablen

6.1. Grundbegriffe

Funktionen aus $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$

(1) Eine Funktion f aus $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt durch

(a) $D_f :=$ *Definitionsbereich* mit $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n$ und

(b) eine eindeutige Zuordnungsvorschrift

$$\underbrace{\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)}_{\textbf{Argument} \text{ von } f} \in D_f \mapsto \underbrace{f(\underline{x})}_{\substack{\textbf{Funktionswert} \text{ von } f \\ \text{an der Stelle } \underline{x}}} \tag{6.1}$$

(2) Darstellung von f

(a) Graph von f

$$\operatorname{graph}(f) := \left\{ (\underline{x}, f(\underline{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \underline{x} \in D_f \right\} \tag{6.2}$$

$$\tag{6.3}$$

($n = 1$) $\operatorname{graph}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$, „Spur der Kurve $y = f(x)$“

($n = 2$) $\operatorname{graph}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$, „Fläche im $\mathbb{R}^3$, z $= f(x, y)$“[1]

(b) Niveaumengen von f

- $c \in \mathbb{R}$ („Höhe“)
- $N_c(f) := \left\{ \underline{x} \in D_f \;\middle|\; f(\underline{x}) = c \right\}$

Beispiel:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \tag{6.4}$$

$$f(x, y) = c \iff x^2 - y^2 = c \tag{6.5}$$

$$\iff y = \pm\sqrt{x^2 - c} \tag{6.6}$$

$$N_0(f) = \{(x, y) \mid y = \pm x\} \tag{6.7}$$

$$N_1(f) = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2 - y^2 = 1 \right\} \text{ (Hyperbel)} \tag{6.8}$$

$$N_{-1}(f) = \left\{ (x, y) \;\middle|\; y^2 - x^2 = 1 \right\} \text{ (Hyperbel)} \tag{6.9}$$

[1] Die hier benutzten Begriffe sind zum rein intuitiven Verständnis verwendet worden.

Abbildung 6.1.: Darstellung von $N_0\,(f)\,, N_1\,(f)\,, N_{-1}\,(f)$

(c) Schnittkurven

Sei $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

6.1.

$$x_i \in D' \subseteq \mathbb{R} \to f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}, \tag{6.10}$$

$$\text{wobei } D' = \left\{x_i \in \mathbb{R} \;\middle|\; (a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in D_f\right\} \tag{6.11}$$

heißt **Schnittkurve** von f im Punkt $\underline{a}$ in x_i-Richtung.

Beispiel: $(n = 2)$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, $D_f = \mathbb{R}^2$, $\underline{a} = (a, b)$

Schnittkurve in x-Richtung:

$$x \in \mathbb{R} \mapsto z = f(x, b) = x^2 - b^2 \tag{6.12}$$

Schnittkurve in y-Richtung:

$$y \in \mathbb{R} \mapsto z = f(a, y) = a^2 - y^2 \tag{6.13}$$

6.1.1. Punktmengen des $\mathbb{R}^n$

(1)

Beispiel: $(n = 2)$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{x} \qquad D_f \subseteq \mathbb{R} \tag{6.14}$$

$$D_f = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1, x \neq 0\right\} \tag{6.15}$$

Abbildung 6.2.: Darstellung von f

(2) Abstand, ε-Umgebung

- $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

- $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$
- $\|\underline{a} - \underline{b}\| := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$ (euklidischer Abstand)

6.2.

$$U_\varepsilon(\underline{a}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x} - \underline{a}\| < \varepsilon\} \tag{6.16}$$

heißt die **ε-Umgebung** von $\underline{a}$

(3) Definitionen

6.3. $\underline{a}$ heißt **innerer Punkt** von $D \subseteq \mathbb{R}^n$, falls es eine ε-Umgebung um $\underline{a}$ gibt, die nur Punkte aus D enthält (d. h. $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\underline{a}) \subseteq D$).

6.4. $\underline{a}$ heißt **Randpunkt** von $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $U_\varepsilon(\underline{a}) \cap D \neq \varnothing$ und $U_\varepsilon(\underline{a}) \setminus D \neq \varnothing$.

6.5. ∂D heißt **Rand** von D (Menge aller Randpunkte von D).

6.6. D heißt **offen**, falls D keine Randpunkte von D enthält ($\iff$ alle Punkte von D sind innere Punkte von D)

6.7. D heißt **abgeschlossen**, falls D alle seine Randpunkte enthält (d. h. $\partial D \subseteq D$).

Beispiele

(a) $D = (1,3) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\partial D = \{1,3\}$, $D \cap \partial D = \varnothing \implies D$ offen

(b) $D = \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, $\partial D = \varnothing \implies D \cap \partial D = \varnothing$, d. h. D ist offen und $\partial D \subseteq D$, d. h. D ist abgeschlossen

(c) $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(x,y) \mid x = 0\}$
$\partial D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1 \vee (x = 0 \wedge |y| \leq 1)\}$
$D \cap \partial D \neq \varnothing \implies D$ nicht offen, $\partial D \nsubseteq D \implies D$ nicht abgeschlossen (ebenso ist $[1,3)$ weder offen noch abgeschlossen)

6.2. Grenzwerte und Stetigkeit

6.2.1. Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$

$$\underline{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N} \tag{6.17}$$

ist Punktfolge $k \in N \mapsto \underline{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$.

$$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \tag{6.18}$$

Grenzwert von $\underline{x}^{(k)}$

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)} = a \iff \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i \text{ für } i \in \{1, \dots, n\} \tag{6.19}$$

$$\iff \lim_{k\to\infty} \left\| \underline{x}^{(k)} - \underline{a} \right\| = 0 \tag{6.20}$$

Beispiele

- $\underline{x}^{(k)} := \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \frac{1}{k}\right)$
  $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \to \mathrm{e}$
  $\frac{1}{k} \to 0$
  $\implies \underline{x}^{(k)} \to (\mathrm{e}, 0)$
- $\underline{x}^{(k)} := \left(1 + \frac{1}{k}, k\right)$
  $1 + \frac{1}{k} \to 1$
  $k \to +\infty$
  $\implies \lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)}$ existiert nicht

6.2.2. Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Gegeben

- Funktion f aus $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, $D = D_f \subseteq \mathbb{R}^n$
- Punkt $\underline{a} \in D \cup \partial D$

6.8. $g \in \mathbb{R}$ oder $+\infty$ oder $-\infty$ $\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = g$, falls für alle Punktfolgen $\underline{x}^{(k)}$ mit $\underline{x}^{(k)} \neq \underline{a}$ aus D und $\lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{a}$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\underline{x}^{(k)}\right) = g \tag{6.21}$$

6.9. f heißt **stetig** in $\underline{a}$, falls $\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$ ist, d. h. für alle Punktfolgen $\underline{x}^{(k)}$ mit $\underline{x}^{(k)} \neq \underline{a}$ aus D und $\lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{a}$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\underline{x}^{(k)}\right) = f(\underline{a}) \tag{6.22}$$

6.10. f heißt **stetig auf** D, falls f stetig in jedem Punkt $\underline{a} \in D$ ist.

Bemerkung. Stetigkeit kann wie im eindimensionalen Fall über ε-δ definiert werden.[2]

Satz 6.1. *Für Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen aus $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ gelten die analogen Regeln wie für Funktionen aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. ($\Longrightarrow$ Summe, Differenz, Quotient, Produkt, Verkettung stetiger Funktionen sind stetig.)*

Beispiele $(n = 2)$

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $D = D_f = \mathbb{R}^2$
- $g(t) = t^2$ stetig
- $h(x, y) = x^2 + y^2$ stetig
- $q(z) = \sqrt{z}$ stetig
- $f = q \circ h$ stetig

Somit ist f stetig auf D.

(b) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\partial D_f = \{(0, 0)\}$
- f stetig auf D_f
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = ?$ (Typ $\frac{0}{0}$)

$$\underline{x}^{(k)} = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \to (0, 0) \qquad f\left(\underline{x}^{(k)}\right) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}, \tag{6.23}$$

$$\text{d. h. } \lim_{k\to\infty} f\left(\underline{x}^{(k)}\right) = \frac{1}{2} \tag{6.24}$$

$$\underline{x}^{(k)} = \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \to (0, 0) \qquad f\left(\underline{x}^{(k)}\right) = \frac{-\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = -\frac{1}{2}, \tag{6.25}$$

$$\text{d. h. } \lim_{k\to\infty} f\left(\underline{x}^{(k)}\right) = -\frac{1}{2} \tag{6.26}$$

Also existiert $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} f(\underline{x})$ nicht.

[2] siehe TODO

6.3. Ableitung, Gradient, Differential

6.3.1. Partielle Ableitungen

Gegeben:

- Funktion $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$
- Punkt $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

6.11.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) \tag{6.27}$$

heißt **partielle Ableitung** von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$ nach x_i / der i-ten Richtung und ist die *Ableitung* von $x_i \in D' \subseteq \mathbb{R} \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}$ nach der (einzigen) Variablen x_i, d. h.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{a} + h\underline{e}_i) - f(\underline{a})}{h}, \tag{6.28}$$

sofern dieser Grenzwert existiert und endlich ist.

Geometrische Interpretation

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$ ist die Steigung der Tangente im Punkt $\underline{a}$ in der x_i-ten Schnittkurve.
- Linearer Zuwachs von f im Punkt $\underline{x} = \underline{a}$ in x_i-Richtung.

  Für „sehr kleine" Werte von h gilt „näherungsweise"

  $$f(\underline{a} + h\underline{e}_i) \approx f(\underline{a}) + h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) \tag{6.29}$$

  Somit beschreibt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$ den linearen Zuwachs von f im Punkt $\underline{x} = \underline{a}$ in x_i-Richtung.

6.12. Man nennt

$$\operatorname{grad} f(\underline{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a}) \right) \tag{6.30}$$

den **Gradienten** von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$.

6.13. Die Funktion f heißt **stetig differenzierbar** auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$, falls für alle Punkte $\underline{x} \in D$ die partiellen Ableitungen nach sämtlichen Variablen x_i an der Stelle $\underline{x}$ existieren und stetig sind.

Bemerkung.

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$ wird wie eine „normale“ (1-D) Abbildung von f nach x_i gebildet, wobei alle x_j, $j \neq i$ wie Konstanten behandelt werden.
- Für partielle Ableitungen von f nach x_i gelten die „üblichen Regeln“.

$$\frac{\partial (f \pm g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \pm \frac{\partial g}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial (c \cdot f)}{\partial x_i} = c \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial (fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + \frac{\partial g}{\partial x_i} f$$

- Statt $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ schreibt man auch f_{x_i}.

$$\begin{aligned}(f_x)_y &= (f_y)_x \\ &= f_{xy}\end{aligned}$$

Beispiel 1: $(n = 2)$

- $f(x, y) = x^2\sqrt{y}$, $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$
- $\underline{a} = (2, 4)$
- $f(x, 4) = 2x^2$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2, 4) = \left.\frac{\mathrm{d}\left(2x^2\right)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2} \tag{6.31}$$

$$= 4x|_{x=2} \tag{6.32}$$

$$= 8 \tag{6.33}$$

- $f(2, y) = 4\sqrt{y}$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2, 4) = \left.\frac{\mathrm{d}\left(4\sqrt{y}\right)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=4} \tag{6.34}$$

$$= \left.\frac{2}{\sqrt{y}}\right|_{y=4} \tag{6.35}$$

$$= 1 \tag{6.36}$$

- Also: $\operatorname{grad} f(2, 4) = (8, 1)$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\sqrt{y}$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2}{2\sqrt{y}}$

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(2x\sqrt{y}, \frac{x^2}{2\sqrt{y}}\right) \tag{6.37}$$

- Folglich ist f stetig differenzierbar auf D.

Beispiel 2: $(n \geq 1)$

- $h(x_1, \ldots, x_n) = m_1(x_1 - a_1) + m_2(x_2 - a_2) + \ldots + m_n(x_n - a_n) + b$, wobei $(a_1, \ldots, a_n)^T$, $\underbrace{(m_1, \ldots, m_n)^T}_{\neq \vec{0}} \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$.

- $x_{n+1} = h(x_1, \ldots, x_n)$ beschreibt eine Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit dem Normalenvektor $(m_1, \ldots, m_n, -1)^T$; $(a_1, \ldots, a_n, b)^T$ ist in der Hyperebene.

- $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = m_i$

6.3.2. Tangentialraum einer Funktion

> **6.14.** Der **Tangentialraum** von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$ ist die Hyperebene mit $h(\underline{a}) = f(\underline{a})$ und Anstieg m_i in x_i-Richtung wie bei f im Punkt $\underline{x} = \underline{a}$, also $m_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$.

Gleichung des Tangentialraums im $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$x_{n+1} = f(\underline{a}) + \underbrace{f_{x_1}(\underline{a})}_{=m_1}(x_1 - a_1) + \underbrace{f_{x_2}(\underline{a})}_{=m_2}(x_2 - a_2) + \cdots + \underbrace{f_{x_n}(\underline{a})}_{=m_n}(x_n - a_n) \tag{6.38}$$

Spezialfälle:

- $n = 1$ – Tangente von f an der Stelle a_1 bzw. im Punkt $(a_1, f(a_1))$
- $n = 2$ – Tangentialebene von f an der Stelle (a_1, a_2)

Beispiel: $(n = 2)$

- $f(x, y) = x^2\sqrt{y}$
- $\underline{a} = (2, 4)$
- $f(2, 4) = 8$
  $f_x(2, 4) = 8$
  $f_y(2, 4) = 1$ (s. o.)

- Tangentialebene von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$:

$$z = f(\underline{a}) + f_x(\underline{a})(x - a_1) + f_y(\underline{a})(y - a_2) \tag{6.39}$$
$$= 8 + 8(x - 2) + 1(y - 4) \tag{6.40}$$
$$= 8x + y - 12 \tag{6.41}$$

Vergleiche:

$$n = 1 \qquad\qquad n = 2 \tag{6.42}$$
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad z = f(x_0, y_0) + \operatorname{grad} f(x_0, y_0)\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \tag{6.43}$$

6.3.3. Richtungsableitung von f

6.15.

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f\big(\underline{a} + h\underline{v}^0\big) - f(\underline{a})}{h} \tag{6.44}$$

heißt (sofern der Grenzwert existiert und endlich ist) die **Richtungsableitung** von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$ in Richtung $\underline{v}$, wobei $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ und $\underline{v}^0 = \frac{1}{\|\underline{v}\|}\underline{v}$.

Bemerkung.

- $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a})$ ist der Anstieg von f im Punkt $\underline{a}$ in $\underline{v}$-Richtung
- $\underline{v} = \underline{e}_i \implies \underline{v}^0 = \underline{e}_i \implies \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$

Satz 6.2. *Ist die Funktion f stetig differenzierbar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$, so gilt für alle $\underline{a} \in D$ und alle Richtungen $\underline{v} \neq \underline{0} \in \mathbb{R}^n$*

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \frac{1}{\|\underline{v}\|}\langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v}\rangle \tag{6.45}$$

(ohne Beweis)

Beispiel:

- $f(x, y) = x^2\sqrt{y}$
- $\underline{a} = (2, 4)$
- $\underline{v} = (1, 1)$
- $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$

- $f_x(x, y) = 2x\sqrt{y}$
- $f_y(x, y) = \frac{x^2}{2\sqrt{y}}$
- $\operatorname{grad} f(x, y) = \left(2x\sqrt{y}, \frac{x^2}{2\sqrt{y}}\right)$
- $\operatorname{grad} f(2, 4) = (8, 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \langle \operatorname{grad} f(2,4), \underline{v}\rangle \tag{6.46}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (8,1), (1,1)\rangle \tag{6.47}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{2}} \tag{6.48}$$

Folgerung 1.

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v}\rangle \tag{6.49}$$

$$= \frac{1}{\|\underline{v}\|} \|\operatorname{grad} f(\underline{a})\| \cdot \|\underline{v}\| \cdot \cos\left(\sphericalangle\left(\operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v}\right)\right) \tag{6.50}$$

$$= \|\operatorname{grad} f(\underline{a})\| \cdot \cos\left(\sphericalangle\left(\operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v}\right)\right) \tag{6.51}$$

Für festes $\underline{a}$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) \text{ maximal} \iff \cos \sphericalangle \left(\operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v}\right) = 1 \tag{6.52}$$

$$\iff \underline{v} \text{ gleichgerichtet zu } \operatorname{grad} f(\underline{a}) \tag{6.53}$$

Somit gilt:

(a) $\operatorname{grad} f(\underline{a})$ zeigt in Richtung des größten Anstiegs von f im Punkt $\underline{x} = \underline{a}$.

(b) Für $\underline{v} = \operatorname{grad} f(\underline{a})$ ist also $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a})$ am größten, wobei gilt: $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = \|\operatorname{grad} f(\underline{a})\|$, falls $\underline{v} = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \neq \underline{0}$.

(c) Ist $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$, so gilt für *alle* Richtungen $\underline{v} \neq \underline{0}$ aus $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \underbrace{\langle \underbrace{\operatorname{grad} f(\underline{a})}_{=\underline{0}}, \underline{v}\rangle}_{=0} = 0 \tag{6.54}$$

Folgerung 2.

$$f(\underline{a} + \underline{v}) - f(\underline{a}) \approx \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) \cdot \|\underline{v}\|, \tag{6.55}$$

falls $\underline{v}$ „klein genug“.

Bemerkung. Die Folgerungen 1 und 2 gelten nur für stetig differenzierbare Funktionen f.

6.3.4. Differential einer Funktion

Gegeben:

- Funktion $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$, wobei D eine offene Menge ist.

Differential von f

6.16.

$$\mathrm{d}f(\underline{x}, \mathrm{d}\underline{x}) = \langle \operatorname{grad} f(\underline{x}), \mathrm{d}\underline{x} \rangle \tag{6.56}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\underline{x}) \cdot \mathrm{d}x_i \tag{6.57}$$

wird **totales Differential** von f genannt.

Das Differential $\mathrm{d}f$ ist abhängig von

$$\underline{x} = \underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{\substack{\text{Argument von } f,\\ \text{d. h. } x_i \text{ sind}\\ \text{reelle Zahlen}}} \qquad \mathrm{d}\underline{x} = \underbrace{(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n)}_{\substack{\text{Argumentendifferentiale}\\ \mathrm{d}x_i \text{ („kleine“) reelle Zahlen}}} \tag{6.58}$$

Kurzschreibweise

$$\mathrm{d}f = f_{x_1} \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_{x_n} \mathrm{d}x_n \tag{6.59}$$

Bemerkung. $\mathrm{d}f$ ist linear in $\mathrm{d}\underline{x}$, d. h.

$$\mathrm{d}f(\underline{x}, \mathrm{d}\underline{\tilde{x}} + \mathrm{d}\underline{\tilde{\tilde{x}}}) = \mathrm{d}f(\underline{x}, \mathrm{d}\underline{\tilde{x}}) + \mathrm{d}f(\underline{x}, \mathrm{d}\underline{\tilde{\tilde{x}}}) \tag{6.60}$$

$$\mathrm{d}f(\underline{x}, \alpha \cdot \mathrm{d}\underline{x}) = \alpha \cdot \mathrm{d}f(\underline{x}, \mathrm{d}\underline{x}) \tag{6.61}$$

Funktionsdifferenz

$$\Delta f(\underline{x}, \mathrm{d}\underline{x}) := f(\underline{x} + \mathrm{d}\underline{x}) - f(\underline{x}) \tag{6.62}$$

6.17. Die Funktion f heißt an der Stelle $\underline{x} = \underline{a} \in D$ **vollständig** bzw. **total differenzierbar**, falls gilt:

$$\lim_{\|\mathrm{d}\underline{x}\| \to 0} \frac{\Delta f(\underline{a}, \mathrm{d}\underline{x}) - \mathrm{d}f(\underline{a}, \mathrm{d}\underline{x})}{\|\mathrm{d}\underline{x}\|} = 0 \tag{6.63}$$

Bemerkung.

- $\|\mathrm{d}\underline{x}\| = \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \cdots + \mathrm{d}x_n^2} \to 0 \iff \mathrm{d}\underline{x} = (\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n) \to \underline{0}$
- Für $\|\mathrm{d}\underline{x}\|$ nach 0 gilt dann $\Delta f(\underline{x}, \mathrm{d}\underline{x}) \approx \mathrm{d}f(\underline{x}, \mathrm{d}\underline{x})$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= xy \qquad , D = \mathbb{R}^2 && (6.64)\\
\mathrm{d}f((x,y),(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)) &= f_x(x,y)\,\mathrm{d}x + f_y(x,y)\,\mathrm{d}y && (6.65)\\
&= y \cdot \mathrm{d}x + x \cdot \mathrm{d}y && (6.66)\\
\Delta f((x,y),(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)) &= f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y) && (6.67)\\
&= (x+\mathrm{d}x)(y+\mathrm{d}y) - xy && (6.68)\\
&= x \cdot \mathrm{d}y + y \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y && (6.69)\\
\frac{\Delta f(\ldots) - \mathrm{d}f(\ldots)}{\|(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\|} &= \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}} && (6.70)\\
&\to 0 \text{ für } (\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) \to (0,0) && (6.71)
\end{aligned}$$

Satz 6.3. *Ist f stetig differenzierbar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen), so ist für alle $\underline{x} \in D$ f auch vollständig differenzierbar.*

Anwendungen

(a) Fehlerrechnung / Fehlerfortpflanzung
- exakte Werte $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $z = f(\underline{x})$
- Näherungswerte $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\hat{z} = f(\underline{a})$
- Abweichungen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\underline{x} &= \Delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{a} & \Delta z &= z - \hat{z} && (6.72)\\
\underline{x} &= \underline{a} + \mathrm{d}\underline{x} & \Delta z &= f(\underline{x}) - f(\underline{a}) && (6.73)\\
& & \Delta z &= \Delta f(\underline{a}, \mathrm{d}\underline{x}) && (6.74)
\end{aligned}$$

- absolute Fehler

$$\begin{aligned}
|\mathrm{d}x_i| &= |x_i - a_i| && (6.75)\\
|\Delta z| &= |\Delta f(\underline{a}, \mathrm{d}\underline{x})| && (6.76)
\end{aligned}$$

- näherungsweise gilt:

$$\begin{aligned}\Delta z &= \Delta f(\underline{a}, \mathrm{d}\underline{x}) && (6.77)\\ &\approx \mathrm{d}f(\underline{a}, \mathrm{d}\underline{x}) && (6.78)\\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\underline{a})\,\mathrm{d}x_i && (6.79)\\ \Longrightarrow \quad |\Delta z| &\leq S && (6.80)\\ \text{mit } S &\approx \sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}(\underline{a})|\,|\mathrm{d}x_i| && (6.81)\end{aligned}$$

- Beispiel: Fehler bei Multiplikation

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) = xy && (6.82)\\ \mathrm{d}z &= \mathrm{d}f && (6.83)\\ &= f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y && (6.84)\\ &= y \cdot \mathrm{d}x + x \cdot \mathrm{d}y && (6.85)\\ \frac{\mathrm{d}z}{z} &= \frac{\mathrm{d}f}{xy} && (6.86)\\ &= \frac{y \cdot \mathrm{d}x}{xy} + \frac{x \cdot \mathrm{d}y}{xy} && (6.87)\\ &= \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}y}{y} && (6.88)\\ \left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right| &\leq \left|\frac{\mathrm{d}x}{x}\right| + \left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right| && (6.89)\end{aligned}$$

Also: relative Fehler addieren sich (höchstens).

(b) Lineare Approximation von $f(\underline{x})$ für $\underline{x}$ nahe bei $\underline{a}$.

- bekannt: $f(\underline{a})$, $f_{x_i}(\underline{a})$
- gesucht: $f(\underline{x}) = f(\underline{a} + \mathrm{d}\underline{x})$
- Dann gilt:

$$\begin{aligned}\Delta f(a, \mathrm{d}\underline{x}) &= f(\underline{a} + \mathrm{d}\underline{x}) - f(\underline{a}) && (6.90)\\ f(\underline{x}) &= f(\underline{a}) + \Delta f(\underline{a} + \mathrm{d}\underline{x}) && (6.91)\end{aligned}$$

Näherungsweise gilt dann:

$$f(\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + \mathrm{d}f(\underline{a}, \mathrm{d}\underline{x}) \;\text{ mit } \mathrm{d}\underline{x} = \underline{x} - \underline{a} \quad (6.92)$$

$$f(\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\underline{a})\,(x_i - a_i) \quad (6.93)$$

Bemerkung.

- $T(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \mathrm{d}f(\underline{a}, \mathrm{d}\underline{x})$ mit $\mathrm{d}\underline{x} = \underline{x} - \underline{a}$ heißt **erstes Taylorpolynom** von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$
- $x_{n+1} = T(\underline{x}) = T(x_1, \ldots, x_n)$ ist die Gleichung des Tangentialraums von f an der Stelle $\underline{a}$.

Regeln für das Differential

(a) $\mathrm{d}\,(\alpha f) = \alpha \cdot \mathrm{d}f\ (\alpha \in \mathbb{R})$

(b) $\mathrm{d}\,(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$

(c) $\mathrm{d}\,(fg) = g \cdot \mathrm{d}f + f \cdot \mathrm{d}g$

Beweis. (a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,(\alpha f) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\,(\alpha f)}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i && (6.94)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i && (6.95)\\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i && (6.96)\\
&= \alpha \mathrm{d}f && (6.97)
\end{aligned}$$

□

Die anderen Regeln lassen sich analog beweisen.

6.3.5. Kettenregel

Gegeben:

- $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$
- $x_1 = g_1\,(u_1, \ldots, u_m)$
- $x_2 = g_2\,(u_1, \ldots, u_m)$

  $\vdots$
- $x_N = g_n\,(u_1, \ldots u_m)$, $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$

6.18. verkettete Funktion.

$$H(u_1,\ldots,u_m) := f(g_1(u_1,\ldots,u_m),\ldots,g_n(u_1,\ldots,u_m)) \tag{6.98}$$
$$H(\underline{u}) = f(g_1(\underline{u}),\ldots,g_n(\underline{u})) \tag{6.99}$$
$$= f\left(\underline{g}(\underline{u})\right) \tag{6.100}$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial u_k} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial u_k} \tag{6.101}$$
$$= \operatorname{grad} f\cdot\begin{pmatrix}(x_1)_{u_k}\\ \vdots\\ (x_n)_{u_k}\end{pmatrix} \tag{6.102}$$

Beispiel: $(n=2, m=2)$

$$f(x,y) := xy \qquad x = u+v \qquad y = u-v \tag{6.103}$$

$$H(u,v) = f(u+v,u-v) \tag{6.104}$$
$$= u^2 - v^2 \tag{6.105}$$
$$\Longrightarrow\ H_u = 2u \tag{6.106}$$
$$H_v = -2v \tag{6.107}$$

Die Kettenregel liefert:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = y\cdot 1 + x\cdot 1\Big|_{\substack{x=u+v\\ y=u-v}} \tag{6.108}$$
$$= (u-v)+(u+v) \tag{6.109}$$
$$= 2u \tag{6.110}$$
$$= H_u\ \checkmark \tag{6.111}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = y\cdot 1 + x\cdot(-1)\Big|_{\substack{x=u+v\\ y=u-v}} \tag{6.112}$$
$$= (u-v)-(u-v) \tag{6.113}$$
$$= -2v \tag{6.114}$$
$$= H_v\ \checkmark \tag{6.115}$$

Zu beachten ist an dieser Stelle, dass in Gleichung 6.108 auf der linken Seite nicht gekürzt werden darf.

Beispiel: $(n=2, m=1)$

$$f(x,y) \qquad x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad H(t) = f(x(t),y(t)) \tag{6.116}$$

$$H'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\bigg|_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)}} \tag{6.117}$$

$$= f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \tag{6.118}$$

$$= \operatorname{grad} f(x(t), y(t)) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \tag{6.119}$$

Geometrische Interpretation Sind die Funktionen $x = x(t), y = y(t)$ für alle $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ stetig, so beschreibt die Abbildung

$$\underline{r} : t \in I \mapsto \underline{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^3 \tag{6.120}$$

eine **Kurve** in Parameterform bzw. eine **Bewegung** eines Punktes in der Ebene. Man nennt $K = \{\underline{r}(t) \mid t \in I\}$ die **Spur** der Kurve. Weiterhin ist $\dot{\underline{r}}(t) = \left(\dot{x}(t)\right)$ der **Tangentialvektor** im Punkt $r(t)$ bzw. der **Geschwindigkeitsvektor**.

Folgerung. Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $\underline{r}(t)$ beschreibe eine Kurve, die Spur sei K. Für die Funktion $H(t) := f(x(t), y(t))$ gilt dann:

$$H'(t) = \left\langle \operatorname{grad} f(r(t)), \dot{r}(t) \right\rangle \tag{6.121}$$

Ist K eine Höhenlinie von f, d. h. es gilt:

$$H(t) = c \quad \forall t \in I, \tag{6.122}$$

dann gilt:

$$H'(t) = 0 \quad \forall t \in I, \tag{6.123}$$

also $\operatorname{grad} f(\underline{r}(t)) \perp \dot{r}(t)$

Somit gilt: Der Gradientenvektor $\operatorname{grad} f(\underline{a})$ steht im Punkt $\underline{x} = \underline{a}$ senkrecht auf der Höhenlinie der Funktion f, welche durch den Punkt $\underline{a}$ geht.

Beispiel:

$$f(x, y) = x^2 + y^2. \tag{6.124}$$

$$\text{Höhenlinien } f(x, y) = c \text{ sind Kreise.} \tag{6.125}$$

$$f_x = 2x \tag{6.126}$$

$$f_y = 2y, \tag{6.127}$$

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (2x, 2y) \tag{6.128}$$

$$\text{Punkt } \underline{a} = (2, 1) \tag{6.129}$$

$$f(2, 1) = 5 \tag{6.130}$$

$$\text{Höhenkurve: } \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 5\right\} \tag{6.131}$$

$$\operatorname{grad} f(\underline{a}) = (4, 2) \tag{6.132}$$

$$\text{Tangente } \underline{x} = \underline{a} + \lambda \cdot (-1, 2) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{6.133}$$

6.3.6. Implizite Funktionen

Beispiel:

$$x^2 + y^2 = 4 \iff y = \pm\sqrt{4 - x^2} \tag{6.134}$$

Hierbei ist die Auflösung nach y nicht eindeutig.

Gegeben:

- Gleichung $F(x, y) = c$ mit $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ (beschränkt eine Höhenlinie von F)
- Eine Lösung $F(x_0, y_0) = c$, $(x_0, y_0) \in D$

Dann gilt: Ist F in einer Umgebung (x_0, y_0) stetig differenzierbar und ist die $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, so gibt es Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in I$ und alle $y \in J$ gilt:

$$F(x, y) = c \iff y = g(x), \tag{6.135}$$

wobei $g : I \to J$ eine Funktion ist. Man sagt dann: Die Funktion g ist **implizit** durch die Gleichung $F(x, y) = c$ mit $g(x_0) = y_0$ **definiert**.

Für die Ableitung von g an der Stelle $x \in I$ gilt:

$$g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))} \tag{6.136}$$

Beweis. (des letzten Teiles)

$$(6.135) \implies F(x, g(x)) = c \quad \forall x \in I \to 0 = F'(x, g(x)) \tag{6.137}$$

Nach Kettenregel:

$$F_x \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{=1} + F_y \underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{=1} = 0 \tag{6.138}$$

$$\implies F_x(x, g(x)) \cdot 1 + \underbrace{F_y(x, g(x))}_{\neq 0} \cdot g'(x) = 0 \tag{6.139}$$

$$\implies g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))} \tag{6.140}$$

□

Beispiel:

- Gleichung: $y\,\mathrm{e}^{2x} + 20 \ln y = 1$
  $\implies F(x,y) = y\,\mathrm{e}^{2x} + 20 \ln y$
- Lösung der Gleichung: $(x_0, y_0) = (0,1)$
- $F_x(x,y) = 2y\,\mathrm{e}^{2x}$, $F_y(x,y) = \mathrm{e}^{2x} + \frac{20}{y}$
  $F_y(x_0,y_0) = F_y(0,1) = \mathrm{e}^0 + \frac{20}{1} = 21 \neq 0$

$$\implies F(x,y) = 1 \tag{6.141}$$

definiert implizit eine Funktion $y = g(x)$ mit $g(x_0) = y_0$. Es gibt Intervalle I, J mit

$$F(x,y) = 1 \iff y = g(x) \quad \forall x \in I, y \in J \tag{6.142}$$

$$g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))} \tag{6.143}$$

$$= -\frac{2g(x)\,\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + \frac{20}{g(x)}} \tag{6.144}$$

$$g'(0) = -\frac{2 \cdot 1\,\mathrm{e}^0}{1 + \frac{20}{1}} \tag{6.145}$$

$$= -\frac{2}{21}. \tag{6.146}$$

6.3.7. Ableitungen höherer Ordnung

Funktion: $f \colon \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D \mapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Beispiel:

- $f(x,y) = x^2\,\mathrm{e}^y + x$
  - $f_x = 2x\,\mathrm{e}^y + 1$
    - $f_{xx} = 2\,\mathrm{e}^y$
    - $f_{xy} = 2x\,\mathrm{e}^y$
  - $f_y = x^2\,\mathrm{e}\,y$
    - $f_{yx} = 2x\,\mathrm{e}^y$
    - $f_{yy} = x^2\,\mathrm{e}^y$

Allgemein:

$$f_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \right) \tag{6.147}$$

6.4. Extremwerte

6.4.1. Globale und lokale Extremwerte

Gegeben:

- Funktion $\underline{x} \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$
- Menge $D \subseteq D_f$

Globale Extremwerte von f auf D

Wir suchen: $\max\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\}$ bzw. $\min\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\}$, sofern diese existieren.

6.19. Ist $\underline{a} \in D$ und gilt $f(\underline{a}) = \max\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\}$ bzw. $f(\underline{a}) = \min\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\}$, so heißt

- $\underline{x} = \underline{a}$ **globale Maximal-** bzw. **Minimalstelle**
- $f(\underline{a})$ **globales Maximum** bzw. **Minimum** auf D.

Lokale Extremwerte von f auf D

6.20. Man nennt $\underline{x} = \underline{a}$ **lokale Maximal-** bzw. **Minimalstelle** von f auf D, falls es eine Umgebung $U_\varepsilon(\underline{a})$ gibt mit

$$f(\underline{a}) = \max\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D \cap U_\varepsilon(\underline{a})\} \text{ bzw.} \tag{6.148}$$
$$f(\underline{a}) = \min\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D \cap U_\varepsilon(\underline{a})\} \tag{6.149}$$

Dabei ist $U_\varepsilon(\underline{a}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x} - \underline{a}\| < \varepsilon\}$.

6.4.2. Existenz globaler Extremwerte

6.21. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, falls es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\forall \underline{x} \in D : \|\underline{x}\| < c$, d. h. $D \subseteq U_c(\underline{a})$

Satz 6.4 (Weierstrass). *Sei $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $D \subseteq D_f$ sei beschränkt und abgeschlossen.*

Dann besitzt f auf D ein globales Maximum und ein globales Minimum, d. h. es gibt $\underline{a}, \underline{b} \in D$ mit der Eigenschaft, mit

- $\forall \underline{x} \in D : f(\underline{a}) \leq f(\underline{x}) \leq f(\underline{b})$,
- $f(\underline{a}) = \min\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\}$ *und*

- $f(\underline{b}) = \max\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\}$

$\underline{a}$ und $\underline{b}$ sind lokale Extremstellen von f im Innern $\overset{\circ}{D} = D \setminus \partial D$ oder liegen auf dem Rand von D.

6.4.3. Lokale Extremstellen im Innern von D

Notwendige Bedingung

Voraussetzung:

- f stetig differenzierbar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\underline{a} \in D$ sei innerer Punkt von D

Dann gilt:

- $\underline{a}$ lokale Extremstelle von f auf $D \implies \operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$, d. h. $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : f_{x_i}(\underline{a}) = 0$.

Ist $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = 0$, so gilt näherungsweise

$$f(\underline{a} + \mathrm{d}\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + \underline{0}\mathrm{d}\underline{x} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\underline{x} \cdot H_f \cdot \mathrm{d}\underline{x}^T, \tag{6.150}$$

woraus folgt:

Hinreichende Bedingung

Voraussetzung:

- f ist zweimal stetig differenzierbar
- $\underline{a} \in D$ innerer Punkt von D
- $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ (d. h. $\underline{a}$ ist extremwertverdächtig)

Dann gilt:

(a) $H_f(\underline{a})$ positiv definit $\implies$ $\underline{a}$ ist lokale Minimalstelle von f auf D

(b) $H_f(\underline{a})$ negativ definit $\implies$ $\underline{a}$ ist lokale Maximalstelle von f auf D

Spezialfall:

- f zweimal stetig differenzierbar
- $\underline{a}$ innerer Punkt von D mit $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$, d. h. $\forall i \in \{1, \dots, n\} : f_{x_i}(\underline{a}) = 0$
- $H_f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\underline{a}) & f_{xy}(\underline{a}) \\ f_{yx}(\underline{a}) & f_{yy}(\underline{a}) \end{pmatrix}$

und es gilt

$$\left.\begin{aligned} \det H_f(\underline{a}) > 0 \\ f_{xx}(\underline{a}) > 0 \end{aligned}\right\} \overset{\text{s. o.}}{\Longrightarrow} H_f(\underline{a}) \text{ positiv definit} \tag{6.151}$$

$$\Longrightarrow \underline{a} \text{ lokale Minimalstelle} \tag{6.152}$$

$$\left.\begin{aligned} \det H_f(\underline{a}) > 0 \\ f_{xx}(\underline{a}) < 0 \end{aligned}\right\} \overset{\text{s. o.}}{\Longrightarrow} H_f(\underline{a}) \text{ negativ definit} \tag{6.153}$$

$$\Longrightarrow \underline{a} \text{ lokale Maximalstelle} \tag{6.154}$$

$$\det H_f(\underline{a}) < 0 \underset{\text{o. Bew.}}{\overset{\text{neu,}}{\Longrightarrow}} H_f(\underline{a}) \text{ „indefinit“} \tag{6.155}$$

$$\Longrightarrow \underline{a} \text{ ist keine Extremstelle (also Sattelpunkt)} \tag{6.156}$$

$$\det H_f(\underline{a}) = 0 \Longrightarrow \text{ keine Aussage} \tag{6.157}$$

Beispiel:

$$f(x, y) = xy - x^3 - y^3 \qquad D_f = \mathbb{R}^2 \tag{6.158}$$

$$D = \mathbb{R}^2 \qquad \partial\, \mathbb{R}^2 = \varnothing \tag{6.159}$$

$$\tag{6.160}$$

Notwendige Bedingung:

$$f_x = y - 3x^2 \tag{6.161}$$

$$f_y = x - 3y^2 \tag{6.162}$$

$$\Longrightarrow y = 3x^2 \tag{6.163}$$

$$\Longrightarrow x - 3 \cdot 9x^4 = 0 \tag{6.164}$$

$$\Longrightarrow x\left(1 - 27x^3\right) = 0 \tag{6.165}$$

$$\Longrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{3} \tag{6.166}$$

Lösungen:

$$(x_1, y_1) = \underbrace{(0, 0)}_{=:\underline{a}} \qquad \text{oder} \qquad (x_2, y_2) = \underbrace{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}_{=:\underline{b}} \tag{6.167}$$

Hinreichende Bedingung:

$$f_{xx} = -6x \qquad f_{xy} = 1 \tag{6.168}$$
$$f_{yx} = 1 \qquad f_{yy} = -6y \tag{6.169}$$

$$H_f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -6x & 1 \\ 1 & -6y \end{pmatrix} \tag{6.170}$$

$$H_f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \det H_f(\underline{a}) = -1 < 0 \tag{6.171}$$
$$\implies \underline{a} \text{ ist Sattelpunkt} \tag{6.172}$$
$$H_f(\underline{b}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \implies \det H_f(\underline{b}) = 3 > 0 \tag{6.173}$$
$$f_{xx} = -2 < 0 \implies \underline{b} \text{ ist lokales Maximum von } f \tag{6.174}$$
$$f(\underline{b}) = \frac{1}{27} \tag{6.175}$$

6.4.4. Extremwerte mit Nebenbedingungen

Aufgabenstellung

Gegeben:

- Funktion $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ („Zielfunktion“)
- Funktion $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(\underline{x}) = 0\}$

Gesucht:

- Lokale bzw. globale Extemwerte von f auf D

kurz:

- Extremwerte von f mit Nebenbedingung $g(\underline{x}) = 0$

Beispiele: $(n = 2)$

(a) $f(x, y) = x + y$ mit $x \cdot y = 9$, d. h. $g(x, y) = xy - 9$ oder $g(x, y) = 9 - xy$

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$, d. h. $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

Eigenschaften von D

Ist g stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ und $\operatorname{grad} g(\underline{x}) \neq 0$ für alle $\underline{x} \in D$, dann gilt:

(a) D hat keine inneren Punkte, d. h. $\partial D = D$

(b) D ist abgeschlossen

(c) Ist D beschränkt (d. h. $\forall \underline{x} \in D: \|x\| < c$ für eine gewisse Konstante c), dann besitzt f auf D ein globales Maximum un ein globales Minimumm (Weierstrass)

Lösungsmethoden

(a) Auflösung der Gleichung $g(x) = 0$

- Wir lösen die Gleichung $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ nach einer Variablen auf, etwa $x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1})$
- Einsetzen in die Zielfunktion f ergibt $\tilde{f}$ aus $\mathbb{R}^{n-1}$ in $\mathbb{R}$
- Ist $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ lokale Extremstelle von $\tilde{f}$, so ist $(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1}))$ lokale Extremstelle von f mit Nebenbedingung $g(\underline{x}) = 0$

Beispiel:

- $f(x, y) = x + y$, NB $xy = 0$
- auflösen: $y = \frac{9}{x}$, $x \neq 0$
- einsetzen: $\tilde{f}(x) = x + \frac{9}{x}$, $D_{\tilde{f}} = \tilde{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\tilde{f}'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} \stackrel{1}{=} 0 \implies x = \pm 3 \tag{6.176}$$

$$\tilde{f}''(x) = \frac{18}{x^3}; \tag{6.177}$$

$$\tilde{f}''(+3) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} > 0 \implies x = 3 \text{ lok. Min.-Stelle von } \tilde{f} \tag{6.178}$$

$$\tilde{f}''(-3) = -\frac{18}{27} = -\frac{2}{3} < 0 \implies x = -3 \text{ ist lok. Max.-Stelle von } \tilde{f} \tag{6.179}$$

Somit ist:

- $(x, y) = (3, 3)$ ist lokale Minimalstelle
- $(x, y) = (-3, -3)$ ist lokale Maximalstelle

(b) Multiplikationsregel von Lagrange

1. Wir betrachten eine Ersatzfunktion

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \underbrace{f(x_1, \ldots, x_n)}_{\text{Zielfunktion}} + \lambda \underbrace{g(x_1, \ldots, x_n)}_{\text{Nebenbedingung}} \tag{6.180}$$

2. Notwendige Bedingung: Bestimme extremwertverdächtige Stellen $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$ von L, d. h. die Lösungen $\operatorname{grad} L = \underline{0}$, d. h.

$$L_{x_1} = f_{x_1} + \lambda g_{x_1} \overset{!}{=} 0 \tag{6.181}$$
$$\vdots \tag{6.182}$$
$$L_{x_n} = f_{x_n} + \lambda g_{x_n} \overset{!}{=} 0 \tag{6.183}$$
$$L_\lambda = g \overset{!}{=} 0 \tag{6.184}$$

Dann sind die $(x_1, \dots, x_n)$ extremwertverdächtige Stellen von f mit der Bedingung $g(\underline{x}) = 0$. *Weitere extremwertverdächtige Stellen gibt es nicht!*

3. Hinreichende Bedingung: Sind nicht leicht aufzuschreiben.

Beispiel:

- $f(x, y) = x^2 + y^2$ mit Nebenbedingung: $x^2 + y^2 = 1,\ g(x, y) := 1 - x^2 - y^2$
- $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt
- f stetig auf $D \overset{\text{Weierstrass}}{\Longrightarrow} f$ hat globale Maximal-/Minimalstellen auf D
- $\operatorname{grad} g = (-2x, -2y) \neq (0, 0)$ für $(x, y) \in D$
- $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda\left(1 - x^2 - y^2\right)$

$$L_x = 2x - 2\lambda x \qquad = 0 \iff 2x(1-\lambda) = 0 \tag{6.185}$$
$$L_y = -2y - 2\lambda y \qquad = 0 \iff 2y(1-\lambda) = 0 \tag{6.186}$$
$$L_\lambda = g = 1 - x^2 - y^2 \qquad = 0 \tag{6.187}$$

Fall 1: $x = 0$

- 1. Unterfall: $y = 0$ $\lightning$ zu Gleichung 6.187
- 2. Unterfall: $\lambda = -1$, aus Gleichung 6.187 folgt $y = \pm 1$
- Somit: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Fall 2: $\lambda = 1$ (aus Gleichung 6.185) $\overset{6.186}{\Longrightarrow}$ $y = 0$.
Somit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Extremwertverdächtige Stellen von f mit Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ sind:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(x, y) = 1 \tag{6.188}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, f(x, y) = -1 \tag{6.189}$$

Mehrere Nebenbedingungen

Gegeben:

- Zielfunktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Nebenbedingungen $g_1(\underline{x}) = 0, \ldots, g_p(\underline{x}) = 0 \ (p < n)$
- $g_{\ldots} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Gesucht:

- Extremwerte von f unter Nebenbedingungen, d. h. auf $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\underline{x}) = 0, \ldots, g_p(\underline{x}) = 0\}$

Lagrange-Funktion:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{6.190}$$

6.4.5. Globale Extremwerte von f auf D

Gegeben:

- Zielfunktion $f(x, y) = x \cdot y$
- Menge $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \wedge x + y \leq 3\}$

Gesucht:

- globale Extremwerte von f auf D

Lösung:

(a) D beschränkt und abgeschlossen, f stetig auf $D \implies \exists$ globales Maximum/Minimum auf D

(b) innere Punkte:

notwendig für Extremalstellen:

$$f_x = y \overset{!}{=} 0 \wedge f_y = x \overset{!}{=} 0 \tag{6.191}$$

$$\implies (x, y) = (0, 0) \text{ erfüllt das} \tag{6.192}$$

Dies ist der einzige Punkt im $\mathbb{R}^2$, der diese Bedingung erfüllt. Allerdings liegt er nicht im Inneren von D.

(c) Rand ∂D von D:

- $D_1 = \{(x, y) \in \partial D \mid x = 0 \vee y = 0\}$

$$(x, y) \in D_1 \implies f(x, y) = xy = 0 \tag{6.193}$$
$$\text{und } f(x_0, y_0) > 0 \; \forall \, (x, y) \in D \setminus D_1 \tag{6.194}$$

Folglich: jede Stelle von D_1 ist globale Minimalstelle und 0 das globale Minimum.

- $D_2 = \{(x, y) \in \partial D \mid x, y > 0 \text{ (und } x + y = 3, x, y < 3)\}$

$$y = 3 - x \tag{6.195}$$
$$\widetilde{f}(x) = f(x, 3 - x) \tag{6.196}$$
$$= x(3 - x) \tag{6.197}$$
$$= 3x - x^2 \tag{6.198}$$
$$\widetilde{f}'(x) = 3 - 2x \tag{6.199}$$
$$\overset{!}{=} 0 \implies x = \frac{3}{2} \left(y = \frac{3}{2} \right) \tag{6.200}$$
$$\widetilde{f}''(x) = -2x, \tag{6.201}$$
$$\text{insbesondere } \widetilde{f}''\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \tag{6.202}$$
$$\implies x = \frac{3}{2} \text{ lokale Maximalstelle von } \widetilde{f} \tag{6.203}$$

Also ist ist $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ lokale Maximalstelle von f auf D.

Kapitel 7.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

7.1. Grundbegriffe

7.1.1. Ableitung einer Funktion

- **Funktion** $y : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $y = y(t)$
- **Ableitung**: $y' : I \to \mathbb{R}$, $y' = y'(t)$, $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$
- **Tangente**: Punkt $t_0 \in I, y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$
  $g(t) = y_0 + y_1 (t - t_0)$
- $y'(t)$ Anstieg, Zuwachs, Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t
- $y''(t)$ Beschleunigung zum Zeitpunkt t

Problem: y selbst ist unbekannt. Die Zusammenhänge zwischen y und seinen Ableitungen ist dagegen bekann.

7.1.2. Wachstum der Erdbevölkerung

- $y(t)$ beschreibe die Bevölkerung der Erde in Milliarden zum Zeitpunkt t
- $y(0) = 7,1$
- Modell für das Bevölkerungswachstum:
  - Zuwachs $y'(t)$ proportional zur Bevölkerung $y(t)$
  - *sehr einfaches Modell, VIEL zu einfach*

Somit ist

$$y'(t) = \alpha y(t) \tag{7.1}$$

für eine Konstante α.

Gesucht ist nun die Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ mit folgender **Anfangswertaufgabe**:

$$y'(t) = \alpha y(t) \qquad \text{und} \qquad y(0) = 7,1. \tag{7.2}$$

7.1. Eine Gleichung $y'(t) = \alpha y(t)$ heißt **Differentialgleichung erster Ordnung**.
$y(0) = 7,1$ ist eine **Anfangsbedingung**.

- Die Funktion $y(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$ erfüllt die Differentialgleichung im Beispiel, denn $y'(t) = \left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right) = \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t} = \alpha y(t)$, jedoch nicht die Anfangswertbedingung, da $y(0) = 1$ ist, aber $7,1$ sei1 müsste.
- $y(t) = 7,1\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ erfüllt die Differentialgleichung, denn $y'(t) = 7,1\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t} = \alpha y(t)$, $y(0) = 7,1\,\mathrm{e}^{0} = 7,1$ erfüllt die Anfangsbedingung.
- $y(t) := 7,1\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ ist Lösung der Anfangswertaufgabe (die einzige Lösung, ohne Beweis)

Bestimmung von α: „Alle 50 Jahre verdoppelt sich die Erdbevölkerung“. *(VIEL zu einfach)*

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ y(50) &= 14,2 && (7.3)\\
\Longrightarrow\ 7,1\,\mathrm{e}^{\alpha\cdot 50} &= 14,2 && (7.4)\\
\Longrightarrow\ \mathrm{e}^{50\alpha} &= 2 && (7.5)\\
\Longrightarrow\ 50\alpha &= \ln 2 && (7.6)\\
\Longrightarrow\ \alpha &= \frac{\ln 2}{50} && (7.7)\\
&\approx 0,1386 && (7.8)
\end{aligned}$$

7.1.3. Definitionen

7.2. Eine Gleichung der Form

$$F\left(t, y, y', y'', \ldots\right) = 0 \tag{7.9}$$

für eine Funktion $y = y(t)$ heißt **gewöhnliche Differentialgleichung** für $y = y(t)$

7.3. Die höchste auftretendende Ableitungsordnung von y in der Differentialgleichung 7.9 heißt **Ordnung** der Differentialgleichung.

7.4. Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall heißt (explizite) **Lösung** der Differentialgleichung 7.9, falls y auf I n-mal differenzierbar ist (n ist die Ordnung) und falls für alle Argumente $t \in I$ gilt:

$$F\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots\right) = 0 \tag{7.10}$$

Beispiele:

(a) $y' = \mathrm{e}^t$ ist eine Differentialgleichung erster Ordnung für $y = y(t)$

Lösung:

$$y = \int y' \,\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t + c,\ c \in \mathbb{R} \tag{7.11}$$

$$y = \mathrm{e}^t + c,\ c \in \mathbb{R} \text{ Kurvenschar/Funktionenschar} \tag{7.12}$$

Dieses y liefert für jedes c eine explizite Lösung.

(b) $y'' = \mathrm{e}^t$ ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Lösung:

$$\begin{aligned} y' &= \int y'' \,\mathrm{d}t && (7.13)\\ &= \int \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t && (7.14)\\ &= \mathrm{e}^t + c,\ c \in \mathbb{R} && (7.15)\\ y &= \int y' \,\mathrm{d}t && (7.16)\\ &= \int \mathrm{e}^t + c \,\mathrm{d}t && (7.17)\\ &= \mathrm{e}^t + ct + d,\ d \in \mathbb{R} && (7.18)\\ \Longrightarrow\quad y &= \mathrm{e}^t + ct + d \quad (c, d \in \mathbb{R}) && (7.19) \end{aligned}$$

Jedes Paar $c, d \in \mathbb{R}$ liefert eine explizite Lösung.

Bezeichnungen:

- **Spezielle Lösung**: $y = y(t)$ ist eine konkrete Funktion ohne frei wählbare Konstanten, etc.
- **Allgemeine Lösung**: $y = y(t, c_1, \ldots, c_n)$ ist eine Kurvenschar mit n frei wählbaren Konstanten.

7.1.4. Anfangswertaufgaben n-ter Ordnung

Gesucht sind alle Funktionen $y = y(t),\ t \in I$ mit

$$F\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{DGL } n\text{-ter Ordnung} \tag{7.20}$$

und

$$y(t_0) = y_0 \tag{7.21}$$
$$y'(t_0) = y_1 \tag{7.22}$$
$$\vdots \tag{7.23}$$
$$y^{(n-1)} = y_{n-1} \tag{7.24}$$

Beispiel:

$$y'' = \mathrm{e}^t \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 1 \tag{7.25}$$

- Alle Lösungen der Differentialgleichung (s. o.): $y = \mathrm{e}^t + ct + d$
- $y(0) = \mathrm{e}^0 + d = 2 \implies d = 1$
- $y'(0) = \mathrm{e}^0 + c = 1 \implies c = 0$

Daher hat die Anfangswertaufgabe die Lösung $y(t) = \mathrm{e}^t + 1$

Bemerkung. Eine Anfangswertaufgabe besitzt meist genau eine Lösung.

7.2. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

7.2.1. Explizite Differentialgleichungen erster Ordnung

7.5. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(t, y) \tag{7.26}$$

heißt **explizite Differentialgleichung** erster Ordnung.

Wir betrachten eine solche Differentialgleichung für die Funktion $y = y(t)$ sowie ein *Rechteck* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ der Form $D = \left\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in I, y \in I'\right\}$

Bemerkung. Ist $y = y(t)$ Lösung von Gleichung 7.26 mit $y(t_0) = y_0$, so gilt

$$y'(t_0) = f(t_0, y(t_0)) \tag{7.27}$$
$$= f(t_0, y_0), \tag{7.28}$$

d. h. $f(t_0, y_0)$ gibt den Anstieg der Lösungskurve im Punkt (t_0, y_0).

Näherungslösung durch das Eulersche Polygonzugverfahren:

(y_0, t_0) sind gegeben durch die Anfangsbedingung.

$$t_{i+1} = t_i + h, \text{ (h meist klein, konstant)} \tag{7.29}$$
$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \cdot h \tag{7.30}$$

Existenz von Lösungen (hinreichende Bedingung)

Satz 7.1 (Peano). *Ist f stetig auf D, so verläuft durch jeden inneren Punkt $(t_0, y_0) \in D$ mindestens eine Lösung von Gleichung 7.26, d. h. die Anfangswertaufgabe*

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad y(t_0) = y_0 \tag{7.31}$$

hat wenigstens eine Lösung $y = y(t)$, die nach beiden Seiten bis zu Rand von D verläuft.

Eindeutigkeit der Lösung (hinreichende Bedingung)

Ist sowohl f als auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig auf D, so verläuft durch jeden inneren Punkt $(t_0, y_0) \in D$ *genau* eine Lösung, die nach bedein Seiten bis zum Rand reicht.

Beispiel:

$$y' = 2\sqrt{y} \qquad y(1) = 1 \tag{7.32}$$

$$D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, 0 \leq y \leq c\} \tag{7.33}$$

f ist stetig auf D, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ist nicht stetig in t_0.

Sei nun die Anfangswertaufgabe $y' = 2\sqrt{y}, y(1) = 1, (1, 1)$ innerer Punkt.

Lösung:

$$y_1(t) = t^2, t > 0 \qquad y_2(t) = \begin{cases} t^2 & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases} \tag{7.34}$$

$$y_1'(t) = 2t, y(1) = 1 \qquad y_2'(t) = \begin{cases} 2t & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases} \tag{7.35}$$

$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{t^2} = 2t \text{ für } y = y_1, y = y_2 \tag{7.36}$$

Folglich hat die Anfangswertaufgabe $y' = 2\sqrt{y}, y(1) = 1$ zwei Lösungen.

7.2.2. Spezielle Typen von Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

7.6. Normalform

$$y' = g(t)\, h(y) \qquad (t, y) \in D \tag{7.37}$$

Lösung:

(1) Nullstellen von $h(y)$ bestimmen. Ist $h(y_0) = 0$, so ist $y = y_0$ (konstante Funktion) eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

(2) Trennung der Variablen (TdV) zur Bestimmung der restlichen Lösungen

$$\frac{1}{h(y)} y' = g(t) \tag{7.38}$$

$$\int \frac{1}{h(y)} y' \,\mathrm{d}t = \int g(t) \,\mathrm{d}t \tag{7.39}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{h(y)} \,\mathrm{d}y = \int g(t) \,\mathrm{d}t \tag{7.40}$$

Diese Gleichung wird dann ausgerechnet und nach y aufgelöst.

Beispiele:

(a) $y' = y \cos t \quad (g(t) = \cos t, h(y) = y)$

(b) $h(y) = 0$ für $y = 0$ ergibt die Lösung $y = 0$ (konstante Funktion)

(c) $h(y) \neq 0$ für $y \neq 0$ ergibt:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{7.41}$$

$$= y \cos t \tag{7.42}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y = \int \cos t \,\mathrm{d}t \tag{7.43}$$

$$\Longrightarrow \ln |y| = \sin t + c_1 \tag{7.44}$$

$$|y| = \mathrm{e}^{\sin t + c_1} \tag{7.45}$$

$$= \underbrace{\mathrm{e}^{c_1}}_{=: c_2 > 0} \mathrm{e}^{\sin t} \tag{7.46}$$

$$= c_2 \,\mathrm{e}^{\sin t} \tag{7.47}$$

$$y = \pm c_2 \,\mathrm{e}^{\sin t} \tag{7.48}$$

$$= c_3 \,\mathrm{e}^{\sin t} \text{ für ein } c_3 \neq 0 \tag{7.49}$$

(d) b und c zusammen ergibt die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y = c\,\mathrm{e}^{\sin t} \quad c \in \mathbb{R} \tag{7.50}$$

(e) Anfangswertaufgabe $y' = y\cos t, y(0) = -4$. Die Anfangsbedingung liefert:

$$-4 = y(0) \tag{7.51}$$

$$= c\underbrace{\mathrm{e}^{\overbrace{\sin 0}^{=0}}}_{=1} \tag{7.52}$$

$$= c \tag{7.53}$$

$$\Longrightarrow \quad c = -4 \tag{7.54}$$

Also ist $y(t) = -4\,\mathrm{e}^{\sin t}$ die Lösung der Anfangswertaufgabe.

Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

7.7. Normalform

$$y' = h\left(\frac{y}{t}\right) \tag{7.55}$$

Beispiel:

(a) $y' = \frac{t^2+y^2}{ty} = \frac{t^2\left(1+\frac{y^2}{t^2}\right)}{t^2\left(\frac{y}{t}\right)} = \frac{1+\frac{y^2}{t^2}}{\frac{y}{t}}$: $h(z) = \frac{1+z^2}{z}$

(b) $y' = \frac{t^2y+y^3}{t^2y^2}$ ist keine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

(c) $y' = \frac{y}{t}\cos\frac{y}{t}$: $h(z) = z\cos z$

Lösung:

- Substitution $z = \frac{y}{t}$
  Rücksubstitution $y = tz$
  (Ableitung: $y' = z + tz'$)
- Einsetzen in die Ausgangsgleichung

  $$y' = h\left(\frac{y}{t}\right) \tag{7.56}$$

  ergibt eine Differentialgleichung für $z = z(t)$

  $$z + tz' = h(z) \tag{7.57}$$

  $$\Longrightarrow \quad z' = \frac{1}{t}\left(h(z) - z\right) \tag{7.58}$$

  ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

  Wir bestimmen wie gewohnt die Lösungen z und erhalten durch Rücksubstitution $y = tz$ alle Lösungen der Ausgangsgleichung.

Beispiel:

$$y' = \frac{t^2 + y^2}{ty} \tag{7.59}$$

$$= \frac{1 + \left(\frac{y}{t}\right)^2}{\frac{y}{t}} \tag{7.60}$$

$$h(z) = \frac{1 + z^2}{z} \tag{7.61}$$

Substitution:

$$z = \frac{y}{t} \tag{7.62}$$

$$y = tz \tag{7.63}$$

$$y' = z + tz' \tag{7.64}$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung:

$$z + tz' = \frac{1 + z^2}{z} \tag{7.65}$$

$$= \frac{1}{z} + z \tag{7.66}$$

$$\Longrightarrow \; z' = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{z} \tag{7.67}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{1}{t}}_{g(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{z}}_{h_2(z)} \tag{7.68}$$

$$\Longrightarrow \; \int z \, \mathrm{d}z = \int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \tag{7.69}$$

$$\Longrightarrow \; \frac{1}{2} z^2 = \ln |t| + c \tag{7.70}$$

$$z^2 = 2 \ln |t| + 2c \tag{7.71}$$

$$\Longrightarrow \; z = \pm\sqrt{2 \ln |t| + 2c} \tag{7.72}$$

$$y = tz \tag{7.73}$$

$$= \pm t \sqrt{2 \ln |t| + \underbrace{2c}_{=d}} \tag{7.74}$$

Exakte Differentialgleichungen

Wir betrachten eine Differentialgleichung erster Ordnung für Funktionen $y = y(t)$ der Form

$$P(x, y) + Q(x, y) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{7.75}$$

$$P(x, y) \, \mathrm{d}x + Q(x, y) \, \mathrm{d}y = 0 \tag{7.76}$$

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei Rechteck, die Funktion $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ seien stetig differenzierbar auf D.

> **7.8.** Die Differentialgleichung 7.76 heißt **exakte Differentialgleichung** auf D, falls eine Funktion $F = F(x, y)$ existiert mit $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \, \forall x, y \in D$.

Dann gilt für das Differential von F:

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{7.77}$$

$$= P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \tag{7.78}$$

und man nennt F **Stammfunktion** von (P, Q) auf D.

$$\operatorname{grad} F = (P, Q) \tag{7.79}$$

Allgemeine Lösung Ist Gleichung 7.76 eine exakte Differentialgleichung und F Stammfunktion von (P, Q), so erhalten wir aus Gleichung 7.76

$$\mathrm{d}F = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 \iff F(x, y) = c \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \tag{7.80}$$

die Kurvenschar

$$F(x, y) = c, c \in \mathbb{R}. \tag{7.81}$$

Dies ist die Lösung von Gleichung 7.76 in impliziter Form.

Integrabilitätsbedingung. Die Differentialgleichung $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$ ist genau dann eine exakte Differentialgleichung, wenn

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \tag{7.82}$$

Bestimmung einer Stammfunktion F Bestimmungsgleichungen $F_x = P$, $F_y = Q$.

$$F_x = P \implies F = \int P(x, y)\,\mathrm{d}x = \widetilde{P}(x, y) + c(y) \tag{7.83}$$

Nun setzen für $F_y = Q$ ein und vergleichen. Daraus erhalten für eine Gleichung für $c'(y)$.

$$c(y) = \int c'(y)\,\mathrm{d}y \tag{7.84}$$

Beispiel:

$$y' = -\frac{2x + 3\cos y}{2y - 3x\sin y} \tag{7.85}$$

$$2x + 3\cos y + (2y - 3x\sin y)\, y' = 0 \tag{7.86}$$

$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\underbrace{(2x + 3\cos y)}_{=:P}\mathrm{d}x + \underbrace{(2y - 3x\sin y)}_{=:Q}\mathrm{d}y = 0 \tag{7.87}$$

$$\tag{7.88}$$

Integrabilitätsbedingung:

$$\left.\begin{matrix} P_y = -3\sin y \\ Q_x = -3\sin y \end{matrix}\right\} \implies P_y(x,y) = Q_x(x,y) \quad \forall (x,y) \in D = \mathbb{R}^2 \tag{7.89}$$

Stammfunktion bestimmen:

$$\begin{aligned}
F_x &= 2x + 3\cos y && (7.90)\\
F_x &= 3y - 3x\sin y && (7.91)\\
F &= \int F_x\,\mathrm{d}x && (7.92)\\
&= \int 2x + 3\cos y\,\mathrm{d}x && (7.93)\\
&= x^2 + 3x\cos y + c(y) && (7.94)\\
F_y &= -3x\sin y + c'(y) && (7.95)\\
&\overset{!}{=} 2y - 3x\sin y && (7.96)\\
\implies c'(y) &= 2y && (7.97)\\
\implies c(y) &= \int 2y\,\mathrm{d}y && (7.98)\\
&= y^2 + \widetilde{c} \quad \widetilde{c} \in \mathbb{R} \text{ Konstante} && (7.99)\\
F &= x^2 + 3x\cos y + y^2 + \widetilde{c} && (7.100)
\end{aligned}$$

ist eine Stammfunktion und eindeutig bis auf eine additive Konstante $\widetilde{c}$.

7.3. Lineare Differentialgleichungen

7.3.1. Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung für $y = y(t)$

7.9. Normalform.

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b \tag{7.101}$$

- $a_k = a_k(t)$ – **Koeffizientenfunktionen**
- $b = b(t)$ – **Störfunktion/Inhomogenität**
- Die Differentialgleichung 7.101 heißt **homogen**, falls b konstant 0 ist, ansonsten **inhomogen**

Beispiele:

$$y'' - t^2 y' + 3x = e^t - 5 \tag{7.102}$$

$$y'' - 2y' + 6y = 6e^t \tag{7.103}$$

$$y' = \sin t \cdot y + t^2 \tag{7.104}$$

Anfangswertaufgaben

Sind die Koeffizientenfunktionen $a_k = a_k(t)$ und die Störfunktion $b = b(t)$ stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, so besitzt die Anfangswertaufgabe

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = by(t_0) \quad = y_0, y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \tag{7.105}$$

mit $t_0 \in I$, $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$.

7.3.2. Lösungsstruktur für lineare Differentialgleichungen

Gegeben:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b \tag{7.106}$$

- $y \in V = C^{(n)}(I, \mathbb{R}) := \{y : I \to \mathbb{R} \mid y \text{ } n\text{-mal stetig differenzierbar}\}$
- V ist Vektorraum über $\mathbb{R}$
- $W = C^{(0)}(I, \mathbb{R}) = \{b : I \to \mathbb{R} \mid b \text{ stetig auf } I\}$
- W ist Vektorraum über R

Durch $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$ wird eine Abbildung $L : V \to W$ definiert. L ist linear, denn

$$\forall y_1, y_2 \in V : L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \tag{7.107}$$
$$\forall y_1 \in V, \alpha \in R : L(\alpha y_1) = \alpha L(y_1) . \tag{7.108}$$

Damit ist Gleichung 7.106 eine lineare Gleichung, nämlich $L(y) = b$. Aus dem Hauptsatz über lineare Gleichungen folgt sofort:

Satz 7.2 (Lösungsstruktur linearer Differentialgleichungen)**.** *Sei* $\Gamma = \{y \in V \mid L(y) = b\}$ *die Lösungsmenge der linearen Differentialgleichungen 7.106 und* $U = \{y \in V \mid L(y) = 0\}$ *die Lösungsmenge der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung* $L(y) = 0$.

Dann gilt:

(1) U *ist linearer Unterraum von* V

(2) $\Gamma = y_s + U$ *ist affiner Unterraum von* V

Bemerkungen.

- Kurzform von (2):

$$\underbrace{y_{allg}}_{\substack{\text{allgemeine} \\ \text{Lösung der} \\ \text{inhomogenen DGL}}} = \underbrace{y_s}_{\substack{\text{eine spezielle} \\ \text{Lösung der} \\ \text{inhomogenen DGL}}} + \underbrace{y_n}_{\substack{\text{allgemeine Lösung} \\ \text{der homogenen DGL}}} \tag{7.109}$$

- Die Dimension von U ist gleich n.

  $\Longrightarrow$ Sind $y_1, \ldots, y_n \in V$ linear unabhängige Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, so gilt für jede Lösung y_n aus U $y_h = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$ für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

7.3.3. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Normalform.

$$y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t) \tag{7.110}$$

Existenz und Eindeutigkeit: Ist $D = \{(t, y) \mid t \in I, y \in \mathbb{R}\}$ ein Streifen ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall) und sind a, b stetig, so verläuft durch jeden Punkt (t_0, y_0) genau eine Lösungskurve, die auf ganz I definiert ist.

Lösungsalgorithmen:

(a) Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y' + a(t)\, y = 0 \text{ (mit getrennten Variablen!)} \tag{7.111}$$

hat die Form

$$y_h = c \cdot y_1(t)\,, \text{ mit beliebiger Konstante } c \in \mathbb{R}. \tag{7.112}$$

$$y' = -a(t)\, y \tag{7.113}$$

$$y = 0 \text{ ist Lösung; } y \neq 0 \tag{7.114}$$

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{7.115}$$

$$\int \frac{1}{y}\, \mathrm{d}y = \int -a(t)\, \mathrm{d}t \tag{7.116}$$

$$\ln|y| = A(t) + c_1, \text{ wobei A Stammfunktion von } -a(t) \text{ ist} \qquad c_1 \in \mathbb{R} \tag{7.117}$$

$$\Longrightarrow \quad |y| = \mathrm{e}^{A(t)+c_1} \tag{7.118}$$

$$= \mathrm{e}^{A(t)}\, \underbrace{\mathrm{e}^{c_1}}_{>0} \tag{7.119}$$

$$|y| = \underbrace{c_2}_{>0}\, \mathrm{e}^{A(t)} \qquad c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{7.120}$$

$$y = \pm c_2\, \mathrm{e}^{A(t)} \tag{7.121}$$

$$\xRightarrow[\text{Lösung}]{\text{mit konst.}} \quad y = c\,\mathrm{e}^{A(t)}\,, \text{ ist Lösung der homogenen DGL} \qquad c \in \mathbb{R} \tag{7.122}$$

(b) Spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Wir bestimmen eine spezielle Lösung y_s von $y' + a(t)\, y = b$ durch *Variation der Konstante* (VdK).

Ansatz:

$$y_s = c(t) \quad \underbrace{y_1(t)}_{\substack{\text{Lösung der} \\ \text{homogenen DGL}}} \tag{7.123}$$

Ableitung:

$$y_s' = c'(t)\, y_1(t) + c(t)\, y_1'(t) \tag{7.124}$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung liefert

$$c' y_1 + \underbrace{cy_1 + acy_1}_{=c\cdot\underbrace{\left(y_1' + ay_1\right)}_{=0}} = b \tag{7.125}$$

$$\Longrightarrow \; c' y_1 = b \tag{7.126}$$

$$\Longrightarrow \; c(t) = \int c'(t)\,\mathrm{d}t \tag{7.127}$$

$$\Longrightarrow \; y_s = c(t)\, y_1(t) \tag{7.128}$$

(c) Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y' + ay = b$:

$$y_{allg} = y_s + y_h \tag{7.129}$$

Beispiel:

$$y' + \frac{1}{t}y = t^3 \qquad D = \{(t,x) \mid t > 0, x \in \mathbb{R}\} \tag{7.130}$$

$$\text{oder } D = \{(t,x) \mid t < 0, x \in \mathbb{R}\} \tag{7.131}$$

Allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung:

$$y' + \frac{1}{t}y = 0 \tag{7.132}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t}\mathrm{d}t \tag{7.133}$$

$$\Longrightarrow \; \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int -\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \tag{7.134}$$

$$\ln|y| = -\ln|t| + c_1 \tag{7.135}$$

$$|y| = \mathrm{e}^{-\ln|t|+c_1} \tag{7.136}$$

$$= e^{c_1} + \mathrm{e}^{-\ln|t|} \tag{7.137}$$

$$= \mathrm{e}^{c_1} \cdot \frac{1}{|t|} \tag{7.138}$$

$$\Longrightarrow \; y = \pm\,\mathrm{e}^{c_1} \cdot \frac{1}{|t|} \tag{7.139}$$

$$= \pm\,\mathrm{e}^{c_1} \cdot \frac{1}{t} \tag{7.140}$$

$$\Longrightarrow \; y = c_2 \cdot \frac{1}{t} \quad , c_2 \neq 0 \tag{7.141}$$

$$\Longrightarrow \; y_h = c_3 \cdot \frac{1}{t} \quad , c_3 \in \mathbb{R} \tag{7.142}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung.

Spezielle Lösung y_s finden:

$$y_s = c\,(t) \cdot \frac{1}{t} \text{ VdK} \tag{7.143}$$

$$\text{Ableitung: } y_s' = c' \cdot \frac{1}{t} + c\left(-\frac{1}{t^2}\right) \tag{7.144}$$

$$\text{Einsetzen: } c' \cdot \frac{1}{t} + \underbrace{c\left(-\frac{1}{t^2}\right) + \frac{1}{t}c \cdot \frac{1}{t}}_{=0} = t^3 \tag{7.145}$$

$$\implies c' \cdot \frac{1}{t} = t^3 \tag{7.146}$$

$$\implies c' = t^4 \tag{7.147}$$

$$\implies c = \int t^4 \,\mathrm{d}t \tag{7.148}$$

$$= \frac{1}{t}t^5 \text{ (+const.)} \tag{7.149}$$

$$\overset{\text{Ansatz}}{\implies} y_s = \frac{1}{5}t^5 \cdot \frac{1}{t} \tag{7.150}$$

$$= \frac{1}{5}t^4 \tag{7.151}$$

ist spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung.

Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung:

$$y_{allg} = y_s + y_h \tag{7.152}$$

$$= \frac{t^4}{5} + c \cdot \frac{1}{t} \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig, } t \in I = \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{7.153}$$

7.3.4. Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Gegeben:

- $y_1, \ldots, y_n \in C^{(n)}(I, \mathbb{R}) =: V$ (n Funktionen)

7.10. Die Funktionen sind **linear unabhängig**, wenn keine der Funktion Linearkombination der anderen ist.

Kriterium 1: $y_1, \ldots, y_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n = 0 \tag{7.154}$$

nur die triviale Lösung $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0)$ besitzt.

Die Gleichung 7.154 ist eine Gleichung in den Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ und äquivalent zu

$$\alpha_1 y\,(t) + \cdots + \alpha_n y_n\,(t) = 0 \quad \forall t \in I \tag{7.155}$$

Kriterium 2: Wir betrachten die sogenannte Wronski-Matrix:

$$W(t) = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ {y_1}' & \cdots & {y_n}' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n,n)}. \tag{7.156}$$

Die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\det W(t) \neq 0$ für ein $t \in I$. Sind $y_1, \ldots, y_n$ Lösungen einer homogenen Differentialgleichung

$$y_1, \ldots, y_n \text{ lin. unabh.} \overset{\text{Def.}}{\iff} \det W(t) \neq 0 \text{ für ein } t \in I \tag{7.157}$$
$$\iff \det W(t) \neq 0 \text{ für alle } t \in I. \tag{7.158}$$

7.3.5. Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Gegeben:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} \cdots + a_1 y' + a_0 y = b \text{ mit } a_{n-1}, \ldots, a_0 \text{ konstant aus } \mathbb{R} \tag{7.159}$$

Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

Wegen Abschnitt 7.3.2 ist die Lösungsmenge (für den Fall $b = 0$) ein linearer Unterraum von $C^{(n)}(I, \mathbb{R})$ der Dimension n.

$\implies$ sind $y_1, \ldots, y_n$ n linear unabhängige Lösungen von Gleichung 7.159 mit $b = 0$, so bilden sie eine Basis des Lösungsraums.

$$y_n = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \quad , c_1 \ldots, c_n \in \mathbb{R}. \tag{7.160}$$

Bestimmung einer Basis des Lösungsraumes

Ansatz:

$y = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (wir suchen Lösungen von Gleichung 7.159 mit $b = 0$ in dieser Form)

Ableitungen:

$$y' = \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{7.161}$$
$$y'' = \lambda^2\, \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{7.162}$$
$$\vdots \tag{7.163}$$
$$y^{(n)} = \lambda^n\, \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{7.164}$$

Einsetzen in Gleichung 7.159.

$$\mathrm{e}^{\lambda t} \underbrace{\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right)}_{=P(\lambda)} = 0 \tag{7.165}$$

$P(\lambda)$ heißt **charakteristisches Polynom** der Differentialgleichung.

Auswertung.

- Für jede Nullstelle λ von $P(\lambda)$ erhalten wir eine Lösung $y = \mathrm{e}^{\lambda t}$
- $P(\lambda)$ hat n Nullstellen in $\mathbb{C}$ gezählt mit ihren Vielfachheiten.

Ist $\lambda = a$ eine relle Nullstelle mit Vielfachheiten r, so sind $y_1 = \mathrm{e}^{at}$, $y_2 = t\,\mathrm{e}^{at}, \ldots, y_r = t^{r-1}\,\mathrm{e}^{at}$ Lösungen.

Ist $\lambda = a + \mathrm{i}\,b$, $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, so ist $a - \mathrm{i}\,b$ ebenfalls Nullstelle von $P(\lambda)$ mit gleicher Vielfachheit r wie λ.

Lösungen sind dann:

$$y_{11} = \mathrm{e}^{at}\cos(bt), \ldots, y_{1r} = t^{r-1}\,\mathrm{e}^{at}\cos(bt) \tag{7.166}$$

$$y_{21} = \mathrm{e}^{at}\sin(bt), \ldots, y_{2r} = t^{r-1}\,\mathrm{e}^{at}\sin(bt) \tag{7.167}$$

Anhang A.

Nachtrag: Bestimmung der Darstellungsmatrix bei anderen Basen

$$L : K^n \to K^m \text{ lineare Abbildung} \tag{A.1}$$
$$L(\vec{x}) = M\vec{x} \tag{A.2}$$

M ist leicht bestimmbar, wenn $L(\vec{e_i})$ bekannt. Was, wenn andere Bilder bekannt sind?

Gegeben:

- Basis $\{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}\}$ von $K^n \implies A = (\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n})$ ist invertierbar.
- Bilder von $\vec{a_i}$: $\vec{b_i} = L(\vec{a_i})$

Bestimmung von M:

$$L(\vec{x}) = M\vec{x} \tag{A.3}$$
$$\implies M\vec{a_i} = \vec{b_i} \tag{A.4}$$
$$\implies M(\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}) = \left(\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n}\right) \tag{A.5}$$
$$= (M\vec{a_1}, \dots, M\vec{a_n}) \tag{A.6}$$

Durch Multiplikation der rechten Seite mit A^{-1}:

$$MAA^{-1} = \left(\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n}\right) A^{-1} \tag{A.7}$$
$$\implies M = \left(\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n}\right) A^{-1} \tag{A.8}$$
$$= (L(\vec{a_1}), \dots, L(\vec{a_n}))(\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n})^{-1} \tag{A.9}$$

Stichwortverzeichnis