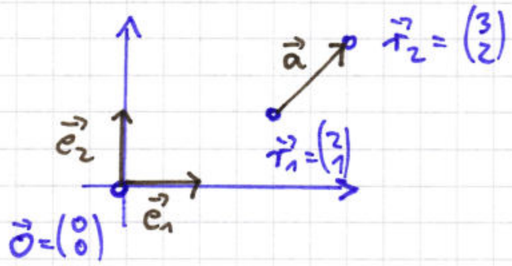
(5.4) Affine Unterräume

(5.4.1) Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ als Punktraum

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ – Vektor (Verbindungsvektor / Richtungsvektor)

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ – Punkt (Ortsvektor)

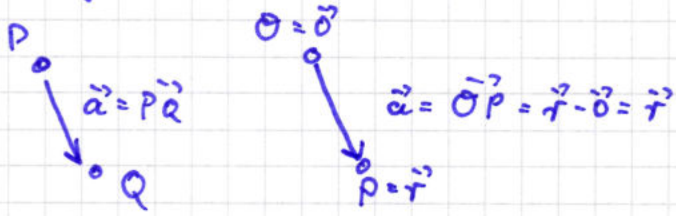


a) Verbindungsvektor bzw Richtungsvektor zweier Punkte

Punkt $P = \vec{r}_1$

Punkt $Q = \vec{r}_2$

Verb. vektor $\vec{a} = \vec{PQ} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$



b) Abtragen eines Vektors an einem Punkt

Vektor $\vec{a}$

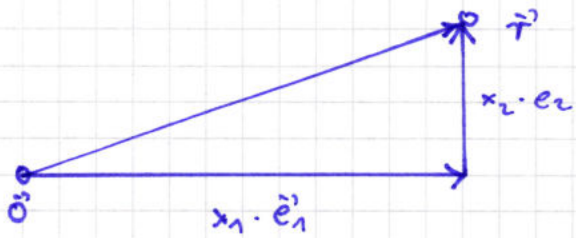
Punkt $\vec{r}_1$

Punkt $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{a}$

$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Koordinaten eines Punktes

$$\vec{r} = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \vec{r} = \vec{0} + x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \qquad \vec{e}_1 = \binom{1}{0} \quad \vec{e}_2 = \binom{0}{1}$$



(x_1, x_2) heißen die Koordinaten des Punktes $P = \vec{r} = \binom{x_1}{x_2}$

bzgl des affinen Koordinatensystems $(\vec{0}, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$

$\vec{0}$: Ausgangspunkt

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$: Standardbasis des $\mathbb{R}^2$

c) Abtragen einer Vektormenge an einem Punkt

Vektormenge $\quad U \subseteq \mathbb{R}^n$

Punkt $\quad \vec{r}_0 \in \mathbb{R}^n$

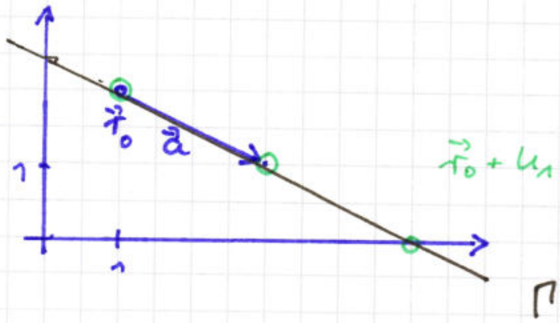
Punktmenge $\quad \vec{r}_0 + U := \{ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x} \mid \vec{x} \in U \} \subseteq \mathbb{R}^n$

Bsp: $\quad n = 2 \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) $\quad U_1 = \{ \vec{0}, \vec{a}, 2\vec{a} \} \Rightarrow \vec{r}_0 + U_1 = \left\{ \vec{r}_0 + \vec{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{r}_0 + \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{r}_0 + 2\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\quad U_2 = [\vec{a}] = \{ \vec{x} = t\vec{a} \mid t \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2$ linearer UR

$\Rightarrow \Gamma = \vec{r}_0 + U_2 = \{ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x} \mid \vec{x} \in U \} = \{ \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a} \mid t \in \mathbb{R} \}$



Gerade

$$\vec{r} \in \Gamma = \vec{r}_0 + U \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x}, \ \vec{x} \in U \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 \in U$$

5.4.2. Affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$

Def: Die Vektormenge (Punktmenge) $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$\boxed{\Gamma = \vec{r}_0 + U}$$

heißt affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$, falls gilt $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist linearer Unterraum.
Weiterhin ist $\quad \dim(\Gamma) := \dim(U) \quad$ die Dimension von Γ

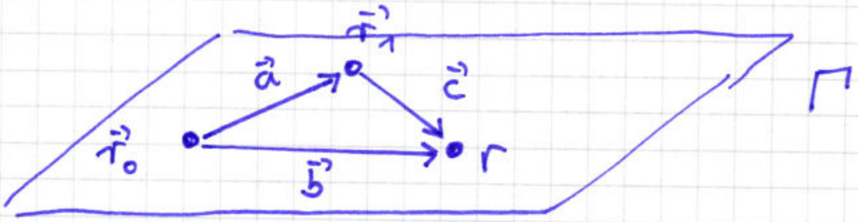
Für einen affinen UR $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ gilt

(1) $\vec{r} \in \Gamma \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x}$ mit $\vec{x} \in U \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 \in U$

(2) $\vec{0} \in U$, woraus folgt $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{0} = \vec{r}_0 \in \Gamma$

$$\Gamma = \underset{\substack{\text{spezieller} \\ \text{Punkt von } \Gamma}}{\vec{r}_0} + \underset{\substack{\text{Richtungsvektoren} \\ \text{von } \Gamma}}{U}$$

(3) Ist $\vec{r}_1 \in \Gamma$, so gilt $\Gamma = \vec{r}_1 + U$



Bew. $\vec{r}_1 \in \Gamma \Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{a} \qquad \vec{a} \in U$

$(\Gamma \subseteq \vec{r}_1 + U)$ $\vec{r} \in \Gamma \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{b} \quad \vec{b} \in U$

$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) + \vec{b}$

$\vec{r} = \vec{r}_1 \underbrace{-\vec{a} + \vec{b}} \qquad (\vec{a}, \vec{b} \in U \Rightarrow -\vec{a} + \vec{b} \in U$

$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{c}$ mit $\vec{c} \in U$

$\Rightarrow \vec{r} \in \vec{r}_1 + U$

$(r_1 + U \subseteq \Gamma)$ $\vec{r} \in \vec{r}_1 + U \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{c}$ mit $\vec{c} \in U$

$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \underbrace{\vec{a} + \vec{c}}, \quad \vec{a}, \vec{c} \in U$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{b} \qquad \vec{b} \in U$

$\Rightarrow \vec{r} \in \Gamma$

(4) Ist $\vec{r} = \vec{0} \in \Gamma$ so ist $\Gamma = \vec{0} + U = U$

(5) Ist $\dim(\Gamma) = 0$, so ist $\dim(U) = 0 \Rightarrow U = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow \Gamma = \vec{r}_0 + U = \{\vec{r}_0\}$ ein Punkt

Parameterdarstellung von $\Gamma = \vec{r}_0 + U$

Ist $d = \dim(\Gamma) = \dim(U) \geq 1$ so wählen wir eine Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d\}$ von U. Dann ist
$U = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d] = \{\vec{x} = t_1\vec{a}_1 + \dots + t_d\vec{a}_d \mid t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}\}$
und für $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ gilt

$$\boxed{\vec{r} \in \Gamma \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t_1\vec{a}_1 + \dots + t_d\vec{a}_d, \quad t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}}$$

heißt Parameterdarstellung von Γ

Matrix-Vektor-Schreibweise
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + A \cdot \vec{t} \qquad A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d) \qquad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{pmatrix}$$

Spezialfälle

- $d = 0$ $\quad \Gamma = \{\vec{r}_0\}$ Punkt
- $d = 1$ $\quad \Gamma = \vec{r}_0 + [\vec{a}_1]$ Gerade
- $d = 2$ $\quad \Gamma = \vec{r}_0 + [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ Ebene
- $d = n$ $\quad$ Dann ist $U = \mathbb{R}^n \Rightarrow \Gamma = \vec{r}_0 + U = \mathbb{R}^n$ der ganze Raum
- $d = n-1$ $\quad \Gamma$ = <u>Hyperebene</u>

Bemerkung (wichtig)

Sämtliche obige Definitionen und Aussagen können auf beliebige Vektorräume verallgemeinert werden.

$\mathbb{R}^n$	$\longrightarrow$	K-VR V	$\rightarrow$	Bsp: $V = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
$\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ Punkt	$\longrightarrow$	$r_0 \in V$ beliebiger Vektor	$\rightarrow$	$r_0 = 1$ konstante Funktion
$\Gamma = \vec{r}_0 + U$ affiner UR des $\mathbb{R}^n$ falls U lin UR	$\longrightarrow$	$\Gamma = r_0 + U$ aff UR von V falls U lin UR	$\rightarrow$	$\Gamma = 1 + [\cos, \sin] = \{f \mid f(x) = 1 + t_1\cos x + t_2 \sin x,\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$

Jetzt speziell für $V = \mathbb{R}^n$

<u>Parameterfreie Darstellung von $\Gamma = \vec{r}_0 + U$</u>

Γ ist Lösungsmenge eines LGS

<u>Bsp:</u>

- $\Gamma = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{r} = \vec{b} \}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

-

x_1	x_2	x_3	
1	2	-3	4
0	1	-1	2
1	0	-1	0
0	1	-1	2

$-2\cdot$, $+$

$x_3 = t$

$x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 = t$

$x_2 - x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 + x_3 = 2 + t$

- Lösungen $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

- $\Gamma = \vec{r}_0 + [\vec{a}]$ mit $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(5.4.3) Hauptsatz über lineare Gleichungssysteme

Seien $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ und

$$\Gamma = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{r} = \vec{b} \}$$

$$U = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \}$$

Dann gilt

(1) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist linearer UR mit $\dim(U) = n - rg(A)$

(2) $\Gamma \neq \emptyset \iff rg(A) = rg(A, \vec{b})$

(3) Ist $\Gamma \neq \emptyset$ und $\vec{r}_0 \in \Gamma$, so ist Γ ein affiner UR mit $\Gamma = \vec{r}_0 + U$

und $\dim(\Gamma) = \dim(U) = n - rg(A)$

<u>Beweis</u>

(1) Siehe (5.3.2) und (5.3.5) (R 4)

(2) Siehe (5.3.5) (R 5)

(3) Zeigen a) $\Gamma \subseteq \vec{r}_0 + U$ und b) $\vec{r}_0 + U \subseteq \Gamma$

<u>zu a)</u> $\vec{r} \in \Gamma$, d.h. $A\vec{r} = \vec{b}$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x} \quad \text{mit} \quad \vec{x} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$A\vec{x} = A(\vec{r} - \vec{r}_0) = A\vec{r} - A\vec{r}_0 \overset{\vec{r}, \vec{r}_0 \in \Gamma}{=\!=} \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{x} \in U \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x} \text{ mit } \vec{x} \in U \Rightarrow \vec{r} \in \vec{r}_0 + \Gamma$$

<u>zu b)</u> $\vec{r} \in \vec{r}_0 + U \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x}$ mit $\vec{x} \in U$

$$\Rightarrow A\vec{r} = A(\vec{r}_0 + \vec{x}) = A\vec{r}_0 + A\vec{x}$$

$$\underset{\vec{x} \in U}{\overset{\vec{r}_0 \in \Gamma}{=\!=}} \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{r} \in \Gamma$$

$\blacksquare$

Bemerkung 1

Satz und Beweis gelten analog, wenn statt $\mathbb{R}^n$ K^n benutzt wird.

Bemerkung 2

$$\Gamma \quad = \quad \vec{r}_0 \quad + \quad U$$

$$\{\vec{r} \mid A\vec{r} = \vec{b}\} \quad = \quad \vec{r}_0 \quad + \quad \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{o}\}$$

(allgemeine) Lösungsmenge des inhomogenen LGS $A\vec{r} = \vec{b}$

spezielle Lösung des inhom. LGS $A\vec{r} = b$ d.h. $A\vec{r}_0 = \vec{b}$

Lösungsmenge des homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{o}$

Änderung von $\vec{b}$ bewirkt nur Änderung von $\vec{r}_0$ (Parallelverschiebung), solange noch eine Lösung existiert.

Bemerkung 3

Verallgemeinerung auf allgemeine Vektorräume ist möglich und folgt später.

Spezialfall Hyperebene im $\mathbb{R}^n$

- $m = 1$ Gleichung $n \geq 2$ Unbekannte
- $A = \underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{(1,n)}$ $\quad \vec{b} = (b) \in \mathbb{R}^1$ $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\Gamma = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{a} \cdot \vec{r} = b\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b\right\}}$$

- Ist $\underline{a} \neq \underline{o}$ so ist $rg(A) = rg(A, \vec{b}) = 1$ und somit $\Gamma \neq \emptyset$ und $\boxed{\dim \Gamma = n - 1}$

$\Rightarrow$ Γ ist Hyperebene des $\mathbb{R}^n$

($n=2$ Gerade, $n=3$ Ebene)

- Die Mengen

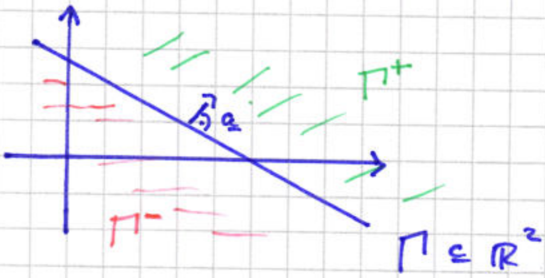
$$\Gamma^+ = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{a} \cdot \vec{r} \geq b \}$$
$$\Gamma^- = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{a} \cdot \vec{r} \leq b \}$$

heißen dann <u>abgeschlossene Halbräume</u> des $\mathbb{R}^n$

Es gilt dann:

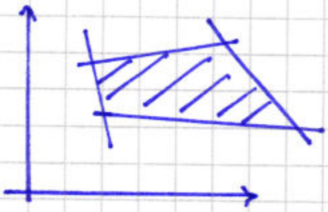
$\Gamma = \Gamma^+ \cap \Gamma^-$

$\mathbb{R}^n = \Gamma^+ \cup \Gamma'$

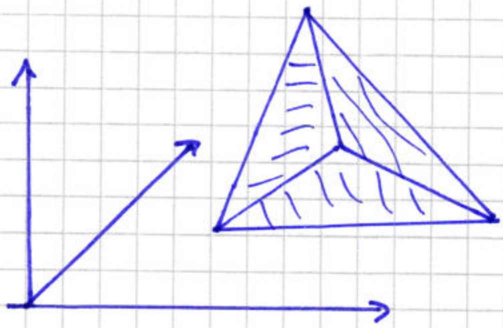


- $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>Polyeder</u>, falls P Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen des $\mathbb{R}^n$ ist.

<u>Beispiele</u>



$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$

<u>Bemerkung</u>

Polyeder sind wichtig in linearer Optimierung

(5.4.4) Affine Unterräume durch vorgegebene Punkte

Gegeben

$\vec{r}_0, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_d \in \mathbb{R}^n$ $\quad d+1$ Punkte des $\mathbb{R}^n$ $\quad (d \geq 1)$

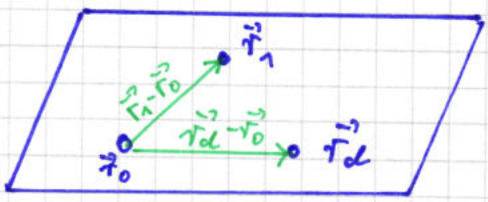
Gesucht

kleinster aff. UR $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, der die Punkte $\vec{r}_0, \ldots, \vec{r}_d$ enthält.

Bezeichnung

$\Gamma = \Gamma(\vec{r}_0, \ldots, \vec{r}_d)$

Lösung



Γ

- Γ = spezieller Punkt + linUR U $\quad$ U = Menge der RV

  ↑ wählen $\vec{r}_0$ $\quad$ ↑ $U = [\underbrace{\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \ldots, \vec{r}_d - \vec{r}_0}]$

  Erzeugendensystem von U
  nicht unbedingt Basis

- $\Gamma = \vec{r}_0 + [\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \ldots, \vec{r}_d - \vec{r}_0]$

  $\dim(\Gamma) = rg(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \ldots, \vec{r}_d - \vec{r}_0) \leq d$

Bsp: $\quad n = 3 \quad$ 3 Punkte $\quad (d = 2)$

- $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \Gamma = \Gamma(\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$
- $\vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_2 - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = 2(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)$

  $\Rightarrow U = [\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{r}_2 - \vec{r}_0] = [\vec{r}_1 - \vec{r}_0] = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \quad \dim(U) = 1$

- $\Gamma = \vec{r}_0 + U = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \dim(\Gamma) = 1$

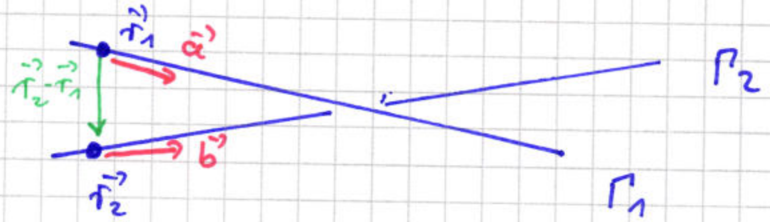
Bemerkung $\quad \Gamma(\vec{r}_0, \ldots, \vec{r}_d)$ wird auch <u>affine Hülle</u> der Punkte $\vec{r}_0, \ldots, \vec{r}_d$ genannt

(5.4.5) Lagebeziehungen affiner Unterräume

Beispiel Geraden im $\mathbb{R}^3$

- $\Gamma_1 = \vec{r}_1 + [\vec{a}]$ $\quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $\Gamma_2 = \vec{r}_2 + [\vec{b}]$ $\quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



(a) $\vec{r}_2 \in \Gamma_1$? (liegt $\vec{r}_2$ auf Γ_1 ?)

$\vec{r}_2 \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + t\,\vec{a} \quad , t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = t \cdot \vec{a} \quad , t \in \mathbb{R}$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq t \cdot \vec{a} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall t \quad \Rightarrow \vec{r}_2 \notin \Gamma_1$$

(b) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ (Schnitt von Γ_1 und Γ_2)

$\vec{r} \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \iff \vec{r} \in \Gamma_1 \wedge \vec{r} \in \Gamma_2$

$\iff \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a} \wedge \vec{r} = \vec{r}_2 + s\vec{b}$

$\Rightarrow \vec{r}_1 + t\vec{a} = \vec{r}_2 + s\vec{b}$

$\iff \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = t\vec{a} - s\vec{b}$

$\iff \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2 = t - s \\ 1 = t - s \end{matrix}$ $\lightning$

inhomogenes LGS
ohne Lösung

$\Rightarrow \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$

(c) $\Gamma_1 \parallel \Gamma_2$? (Γ_1 parallel zu Γ_2)

$[\vec{a}] \neq [\vec{b}]$ Richtungsvektoren von Γ_1, Γ_2 verschieden

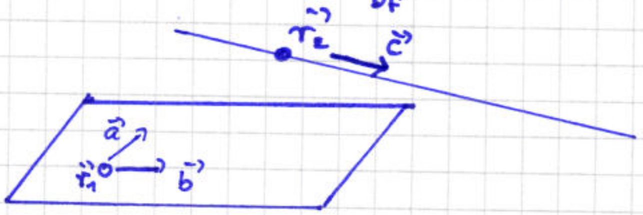
$\vec{a} \notin [\vec{b}] \qquad \vec{b} \notin [\vec{a}]$

also $\Gamma_1 \nparallel \Gamma_2$ (nicht parallel)

Geraden im $\mathbb{R}^3$, die sich nicht schneiden und nicht parallel sind heißen <u>windschief</u>

Allgemeine Bedingung für Parallelität

$$\vec{r}_1 + U \parallel \vec{r}_2 + W \underset{Df}{\Leftrightarrow} U \subseteq W \text{ oder } W \subseteq U$$



$\Gamma_2 = \vec{r}_2 + [\vec{c}]$

$\Gamma_1 = \vec{r}_1 + [\vec{a}, \vec{b}]$

$$\Gamma_1 \parallel \Gamma_2 \Leftrightarrow [\vec{c}] \subseteq [\vec{a}, \vec{b}] \Leftrightarrow \vec{c} \in [\vec{a}, \vec{b}]$$

Sind zwei aff UR identisch, so sind sie auch parallel.

Sind Γ_1, Γ_2 aff UR des $\mathbb{R}^n$, so ist $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ oder wieder ein aff. UR des $\mathbb{R}^n$ (führt auf ein inhomogenes LGS)

Bemerkung

Sind $\Gamma_1 = \vec{r}_1 + U$ $\Gamma_2 = \vec{r}_2 + W$, so führt Gleichsetzen der Parameterdarstellungen zu einem inhomogenen LGS mit $\dim(U) + \dim(W)$ vielen Variablen zur Berechnung von $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.
Eine effizientere Berechnungsmethode für den Schnitt bekommt man, wenn einer der aff UR in parameterfreier Form gegeben ist, etwa $\Gamma_2 = \{\vec{r} \mid A\vec{r} = \vec{b}\}$.
Setzt man dann die Parameterdarstellung von Γ_1 in die parameterfreie Darstellung von Γ_2 ein, erhält man ein LGS mit nur $\dim(U)$ vielen Variablen.

(5.5) Euklidische Räume

Euklidischer Raum := $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt

(5.5.1) Skalarprodukt, Norm, Winkel

(1) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot , \cdot \rangle : V^2 \to \mathbb{R}^2$

$a, b \in V \mapsto \langle a, b\rangle \in \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt, wenn gilt:

$\forall\, a, b, c \in V \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}$:

(S1) $\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$ (symmetrisch)

(S2) $\langle a, b+c\rangle = \langle a,b\rangle + \langle a,c\rangle$

(S3) $\langle a, tb\rangle = t\,\langle a,b\rangle$

} Linearität in 2. Komponente (gilt auch für 1. Komp. wegen S1)

(S4) $\langle a,a\rangle \geq 0$, $\langle a,a\rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0_V$ positive Definitheit

Beispiele:

a) Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \vec{a}^T \cdot \vec{b}$$

b) $V = C^0([0,1], \mathbb{R}) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig auf } [0,1] \}$

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx$$

Eigenschaften leicht nachzuprüfen

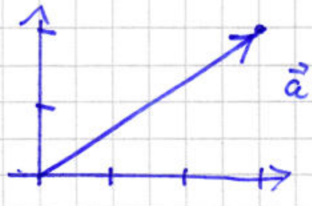
(2) Norm (Betrag / Länge) von $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ $(a \in V)$

$$\|\vec{a}\| := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

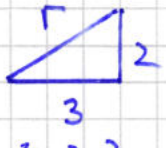
Bemerkung

$\|\vec{a}\|$ heißt auch euklidische Norm von $\vec{a}$

Bsp: $(n=2)$



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



Pythagoras: $r^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow r = \sqrt{13} = \|\vec{a}\|$

Eigenschaften

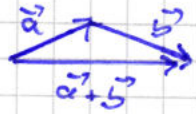
$\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

(N1) $\quad \|\vec{a}\| \geq 0 \,, \quad \|\vec{a}\| = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = 0$ (positive Definitheit)

(N2) $\quad \|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$

Bew: $\|\lambda \vec{a}\| = \sqrt{\langle \lambda \vec{a}, \lambda \vec{a} \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$

(N3) $\quad \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (Dreiecksungleichung)



Jede Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ mit obigen Eigenschaften heißt Norm.

Andere Beispiele für $V = \mathbb{R}^n$

$\|\vec{a}\|_1 := |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ Betragssummennorm

$\|\vec{a}\|_\infty := \max\limits_{i=1,\dots,n} |a_i|$ Maximumnorm

Für die aus dem Skalarprodukt abgeleitete Norm gilt zusätzlich:

(N4) Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (CSU)

$$-\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \leq \langle a, b \rangle \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

bzw. $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$

Gleichheit gilt für $\vec{b} = \alpha \vec{a} \in [\vec{a}]$

Beweis

Für $\vec{b} = \vec{0}$ trivial also sei $\vec{b} \neq \vec{0}$

$0 \leq \langle \vec{a} - t\vec{b}, \vec{a} - t\vec{b} \rangle$ für beliebiges t (S4)

$0 \leq \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2t \langle a, b \rangle + t^2 \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$ (S2) (S3)

$0 \leq \|\vec{a}\|^2 - 2 \dfrac{(\langle a, b \rangle)^2}{\|\vec{b}\|^2} + \dfrac{(\langle a, b \rangle)^2}{\|b\|^2}$ $\quad t := \dfrac{\langle a, b \rangle}{\|\vec{b}\|^2} = \dfrac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle}$

$\dfrac{(\langle a, b \rangle)^2}{\|\vec{b}\|^2} \leq \|\vec{a}\|^2$

$(\langle a, b \rangle)^2 \leq \|\vec{a}\|^2 \cdot \|b\|^2$

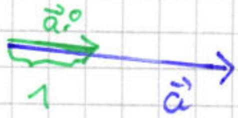
$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ $\quad$ Gleichheit, falls $\vec{a} - t\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \in [\vec{b}]$

$\vec{b} \in [\vec{a}]$ ∎

(3) Einheitsvektoren

Geg.: $\vec{a} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{a} \neq \vec{o}$

Ges.: Einheitsvektor $\vec{a}^{\,o}$ in Richtung $\vec{a}$, d.h. $\vec{a}^{\,o} = \lambda \vec{a}$, $\lambda > 0$, $\|\vec{a}^{\,o}\| = 1$

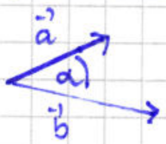


$$1 = \|\vec{a}^{\,o}\| = \|\lambda \vec{a}\| = |\lambda|\,\|\vec{a}\| \underset{\lambda>0}{=} \lambda \|\vec{a}\| \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\|\vec{a}\|}$$

$\Rightarrow$ Lsg.: $\boxed{\vec{a}^{\,o} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}}$

Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{3} \Rightarrow \vec{a}^{\,o} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(4) Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{o}$



$\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ mit $0 \leq \alpha \leq \pi$

$\cos \alpha := \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$

(W1) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))$

(W2) $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2} = 90° \Leftrightarrow \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

(5) Orthogonalität

$\vec{a} \perp \vec{b}$ ($\vec{a}$ orthogonal zu $\vec{b}$) $\Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

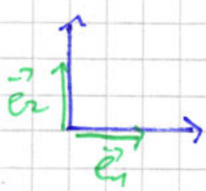
a) $\vec{o} \perp \vec{x} \quad \forall \vec{x}$ aber $\sphericalangle(\vec{o}, \vec{x})$ nicht definiert

b) $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90° = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

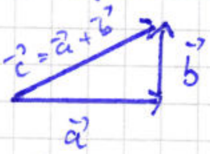
c) $\vec{a} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$

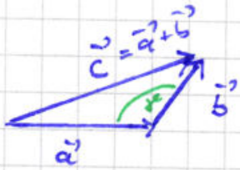
Bsp: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$

$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$



(6) Pythagoras / Kosinussatz





$\gamma = \pi - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$\cos \gamma = -\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\|\vec{c}\|^2 = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$$
$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$\vec{a} \perp \vec{b}$:

$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$

Satz des Pythagoras

sonst $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2 \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \gamma$

Kosinussatz

(5.5.2) Abstände

(I) Abstand Punkt - Punkt: $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\begin{array}{l} d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) := \| \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \| \quad \text{Abstand von } \vec{r}_1 \text{ und } \vec{r}_2 \\ d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \end{array}}$$

(D1) $d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \geq 0$, $d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0 \Leftrightarrow \vec{r}_1 = \vec{r}_2$ (pos. def.)

(D2) $d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = d(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ (symmetrisch)

<u>Bew:</u> $d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \underset{(\text{Def})}{=} \| \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \| = \| -(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \| \underset{(N2)}{=} |-1| \cdot \| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \| \underset{(\text{Def})}{=} d(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$

(D3) $d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \leq d(\vec{r}_1, \vec{r}) + d(\vec{r}, \vec{r}_2)$ (Dreiecksungleichung)

<u>Bew:</u> $d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \| \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \| = \| (\vec{r}_1 - \vec{r}) + (\vec{r} - \vec{r}_2) \|$
$$\underset{(N3)}{\leq} \| \vec{r}_1 - \vec{r} \| + \| \vec{r} - \vec{r}_2 \| = d(\vec{r}_1, \vec{r}) + d(\vec{r}, \vec{r}_2)$$

<u>Bemerkungen</u>

1) Sei M Menge. Jede Fkt. $g: M^2 \to \mathbb{R}$ welche symmetrisch, positiv definit ist und die Δs ungl. erfüllt heißt <u>Metrik</u> auf M

2) Ist V ein VR mit Norm $\|\cdot\|$ so ist $d: V^2 \to \mathbb{R}$ mit $d(x, y) := \| x - y \|$ eine Metrik auf V

3) Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle \longrightarrow$ passende Norm $\longrightarrow$ passende Metrik

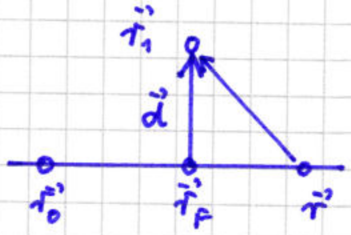
(II) Abstand Punkt - affiner UR

Gegeben

- aff UR $\Gamma = \vec{r}_0 + U \qquad \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$
- Punkt $\vec{r}_1 \in \mathbb{R}^n$

Gesucht $\cdot\ d(\vec{r}_1, \Gamma) := \min\{ d(\vec{r}_1, \vec{r}) \mid \vec{r} \in \Gamma \}$ Abstand von $\vec{r}_1$ zu Γ

Lösung



$d^2(\vec{r}_1, \vec{r}) = d^2(\vec{r}_1, \vec{r}_F) + d^2(\vec{r}_F, \vec{r})$

$\Rightarrow d(\vec{r}_1, \vec{r}) \geq d(\vec{r}_1, \vec{r}_F)$

Bestimmen $\vec{r}_F \in \Gamma$ mit $\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_F \perp U$ (d.h. $\vec{d} \perp \vec{x}$ f. alle $\vec{x} \in U$)

Dann ist $d(\vec{r}_1, \Gamma) = d(\vec{r}_1, \vec{r}_F) = \|\vec{d}\|$

Bezeichnung

- $\vec{r}_F$ heißt <u>Fußpunkt des Lotes</u> von $\vec{r}_1$ auf Γ
- $\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_F$ heißt <u>Lotvektor</u> von $\vec{r}_1$ auf Γ

Bestimmung von $\vec{r}_F$

(1) Parameterdarstellung von $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ bestimmen

- Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d\}$ von U wählen
- $U = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d] \qquad d = \dim(U)$
- $\vec{r} \in \Gamma \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x}$ mit $\vec{x} \in U$

  $\Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2 + \dots + t_d \vec{a}_d \qquad t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$
- $A := (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d) \qquad \vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{pmatrix} \qquad A\vec{t} = t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_d \vec{a}_d$
- $\boxed{\vec{r} \in \Gamma \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + A\vec{t} \text{ mit } \vec{t} \in \mathbb{R}^d}$

(2) Orthogonales Komplement $U^\perp$ von U bestimmen

Def:

- $\vec{x} \perp U \iff \vec{x} \perp \vec{a} \quad \forall \vec{a} \in U$
- $U^\perp := \{ \vec{x} \mid \vec{x} \perp U \}$ orthogonales Komplement von U

Kriterium

$$\vec{x} \perp \vec{a}_1, \dots, \vec{x} \perp \vec{a}_d \iff \vec{x} \perp t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_d \vec{a}_d \quad \forall t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$$

Beweis ($\Leftarrow$) trivial $t_i = 0$ bzw 1

($\Rightarrow$) $\langle \vec{x}, t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_d \vec{a}_d \rangle = t_1 \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{a}_1 \rangle}_{\substack{0 \\ \text{da } \vec{x} \perp \vec{a}_1}} + \dots + t_d \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{a}_d \rangle}_{\substack{0 \\ \text{da } \vec{x} \perp \vec{a}_d}} = 0$

Also gilt für $U = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d]$

- $\vec{x} \in U^\perp \iff \vec{x} \perp \vec{a}_1, \dots, \vec{x} \perp \vec{a}_d$

$$\iff \langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle = \dots = \langle \vec{a}_d, \vec{x} \rangle = 0$$

$$\iff \vec{a}_1^T \vec{x} = \vec{a}_2^T \vec{x} = \dots = \vec{a}_d^T \vec{x} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vdots \\ \vec{a}_d^T \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff A^T \vec{x} = \vec{0} \qquad A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d)$$

(3) Parameterfreie Darstellung von $\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp$ bestimmen

- $\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp$ aff UR durch $\vec{r}_1$ der $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ senkrecht schneidet
- $\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp \underset{(2)}{=} \vec{r}_1 + \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A^T \vec{x} = \vec{0} \} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hauptsatz über LGS}}}{=} \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid A^T \vec{r} = \vec{b} \}$ $\vec{b} = A^T \vec{r}_1$

(4) Dann ist $\vec{r}_F$ Schnittpunkt von $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ und $\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp$

I • $\vec{r}_F \in \Gamma \iff \vec{r}_F = \vec{r}_0 + A \vec{t}$ mit $t \in \mathbb{R}^d$

II • $\vec{r}_F \in \Gamma' \iff A^T \vec{r}_F = \vec{b} = A^T \vec{r}_1$

$$\overset{\text{I in II}}{\Longrightarrow} A^T (\vec{r}_0 + A \vec{t}) = A^T \vec{r}_1$$

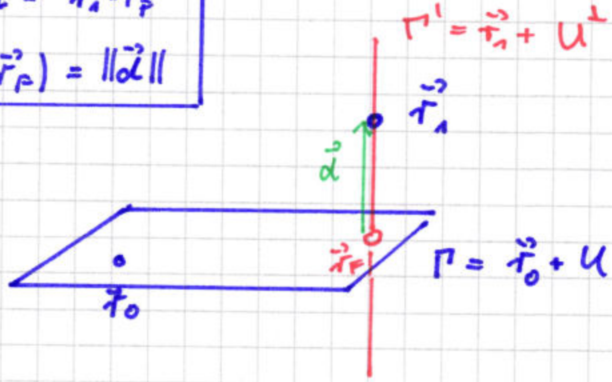
$$A^T \vec{r}_0 + A^T A \vec{t} = A^T \vec{r}_1$$

$$A^T A \vec{t} = A^T (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)$$

$A^T A$ ist quadratisch und invertierbar

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{t} = (A^T A)^{-1} A^T (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \\ &\vec{r}_F = \vec{r}_0 + A\vec{t} \qquad \vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_F \\ &d(\vec{r}_1, \Gamma) = d(\vec{r}_1, \vec{r}_F) = \|\vec{d}\| \end{aligned}}$$

graphische Veranschaulichung



<u>Beispiel</u>

<u>Geg:</u>

- Punkt $\vec{r}_1 = (0, 1, 2, 5)^T \in \mathbb{R}^4$
- aff UR $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ mit $U = [\vec{a}, \vec{b}]$ $\vec{r}_0 = \vec{0}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\\4\end{pmatrix}$

<u>Ges:</u>

- $d(\vec{r}_1, \Gamma)$: Abstand von $\vec{r}_1$ und Γ
- $\vec{r}_F$: Fußpunkt des Lotes von $\vec{r}_1$ auf Γ

<u>(1) Parameterdarstellung von Γ</u>

- $\vec{r} \in \Gamma \iff \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{r}_0 + (\vec{a}, \vec{b})\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix} = \vec{r}_0 + A\vec{t}$
- $A = (\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&3\\1&4\end{pmatrix}$ $\quad \vec{t} = \begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}$ $\quad \vec{r}_0 = \vec{0}$

<u>(2) orthogonales Komplement $U^\perp = \{\vec{x} \mid \vec{x} \perp U\}$</u>

- $U = [\vec{a}, \vec{b}] = \{A\vec{t} \mid \vec{t} \in \mathbb{R}^2\}$
- $\vec{x} \perp U \iff \vec{x} \perp \vec{a}$ und $\vec{x} \perp \vec{b}$

$$\iff \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix}\vec{a}^T\\ \vec{b}^T\end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff A^T \vec{x} = \vec{0}$$

- $U^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A^T\vec{x} = \vec{0}\}$ $\qquad A^T = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&4\end{pmatrix}$

<u>(3) Parameterfreie Darstellung von $\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp$</u>

- $\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp = \vec{r}_1 + \{\vec{x} \mid A^T\vec{x} = \vec{0}\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hauptsatz über LGS}}}{=} \{\vec{r} \mid A^T\vec{r} = \vec{b}\}$, $\vec{b} = A^T\vec{r}_1$

(4) $\vec{r}_F$ ist Schnittpunkt von $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ und $\Gamma' = r_1 + U^\perp$

- $\vec{r}_F \in \Gamma \iff \vec{r}_F = \vec{r}_0 + A\vec{t}$
- $\vec{r}_F \in \Gamma' \iff A^T \vec{r}_F = A^T \vec{r}_1$

$$\Rightarrow \quad A^T(\vec{r}_0 + A\vec{t}) = A^T \vec{r}_1$$

$$A^T \vec{r}_0 + A^T A \vec{t} = A^T \vec{r}_1$$

$$A^T A \vec{t} = A^T(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{pmatrix}$$

$$A^T(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{t} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

- $\vec{r}_F = \vec{r}_0 + A\vec{t} = \vec{0} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 31 \\ 42 \end{pmatrix}$

- $d(\vec{r}_1, \Gamma) = d(\vec{r}_1, \vec{r}_F) = \| \vec{r}_1 - r_F \| = \left\| \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{190}$

Bemerkung

Ist $U = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]$ lin UR des $\mathbb{R}^n$ und $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ so gilt

(1) $\dim(U) = rg(A)$

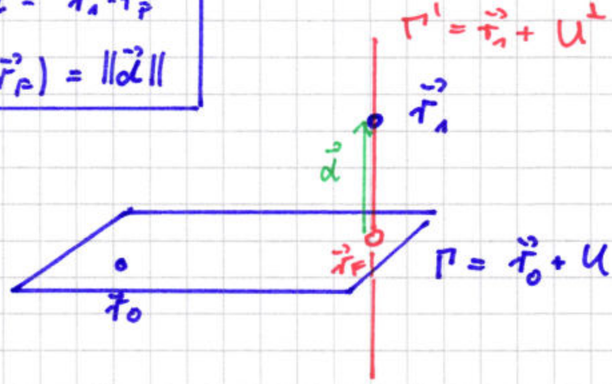
(2) $U^\perp = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A^T \vec{x} = \vec{0} \}$

(3) $\dim(U^\perp) = n - rg(A^T) = n - rg(A) = n - \dim(U)$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(U) + \dim(U^\perp) = n}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{t} = (A^T A)^{-1} A^T (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \\ \vec{r}_P = \vec{r}_0 + A\vec{t} \qquad \vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_P \\ d(\vec{r}_1, \Gamma) = d(\vec{r}_1, \vec{r}_P) = \|\vec{d}\| \end{array}}$$

graphische Veranschaulichung



Beispiel

Geg:
- Punkt $\vec{r}_1 = (0, 1, 2, 5)^T \in \mathbb{R}^4$
- aff UR $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ mit $U = [\vec{a}, \vec{b}]$ $\vec{r}_0 = \vec{0}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\\4\end{pmatrix}$

Ges:
- $d(\vec{r}_1, \Gamma)$: Abstand von $\vec{r}_1$ und Γ
- $\vec{r}_P$: Fußpunkt des Lotes von $\vec{r}_1$ auf Γ

(1) Parameterdarstellung von Γ

- $\vec{r} \in \Gamma \iff \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{r}_0 + (\vec{a}, \vec{b})\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix} = \vec{r}_0 + A\vec{t}$
- $A = (\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&3\\1&4\end{pmatrix}$ $\quad \vec{t} = \begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}$ $\quad \vec{r}_0 = \vec{0}$

(2) orthogonales Komplement $U^\perp = \{\vec{x} \mid \vec{x} \perp U\}$

- $U = [\vec{a}, \vec{b}] = \{A\vec{t} \mid \vec{t} \in \mathbb{R}^2\}$
- $\vec{x} \perp U \iff \vec{x} \perp \vec{a}$ und $\vec{x} \perp \vec{b}$

$$\iff \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle = 0$$
$$\iff \begin{pmatrix}\vec{a}^T\\ \vec{b}^T\end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\iff A^T \vec{x} = \vec{0}$$

- $U^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A^T\vec{x} = \vec{0}\}$ $\qquad A^T = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&4\end{pmatrix}$

(3) Parameterfreie Darstellung von $\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp$

- $\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp = \vec{r}_1 + \{\vec{x} \mid A^T\vec{x} = \vec{0}\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hauptsatz über LGS}}}{=} \{\vec{r} \mid A^T\vec{r} = \vec{b}\}$, $\vec{b} = A^T\vec{r}_1$

(4) $\vec{r}_F$ ist Schnittpunkt von $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ und $\Gamma' = r_1 + U^\perp$

- $\vec{r}_F \in \Gamma \iff \vec{r}_F = \vec{r}_0 + A\vec{t}$
- $\vec{r}_F \in \Gamma' \iff A^T\vec{r}_F = A^T\vec{r}_1$

$$\Rightarrow \quad A^T(\vec{r}_0 + A\vec{t}) = A^T\vec{r}_1$$
$$A^T\vec{r}_0 + A^TA\vec{t} = A^T\vec{r}_1$$
$$A^TA\,\vec{t} = A^T(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{pmatrix}$$

$$A^T(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{t} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

- $\vec{r}_F = \vec{r}_0 + A\vec{t} = \vec{0} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 31 \\ 42 \end{pmatrix}$

- $d(\vec{r}_1, \Gamma) = d(\vec{r}_1, \vec{r}_F) = \| \vec{r}_1 - r_F \| = \left\| \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{10}\cdot\sqrt{190}$

Bemerkung

Ist $U = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]$ lin UR des $\mathbb{R}^n$ und $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ so gilt

(1) $\dim(U) = rg(A)$

(2) $U^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A^T\vec{x} = \vec{0}\}$

(3) $\dim(U^\perp) = n - rg(A^T) = n - rg(A) = n - \dim(U)$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(U) + \dim(U^\perp) = n}$$

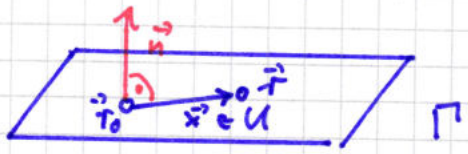
(5.5.3) Hessesche Form einer Hyperebene

Gegeben Sei

- $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ Hyperebene im $\mathbb{R}^n$, also $\dim(\Gamma) = \dim(U) = n-1$

Dann gilt

- $\dim(U^\perp) = n - \dim(U) = 1$ also $U^\perp = [\vec{n}]$ für ein $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$



- $\vec{r} \in \Gamma = \vec{r}_0 + U \iff \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x},\ \vec{x} \in U \qquad U^\perp = [\vec{n}] : \vec{x} \perp \vec{n}$

$$\iff \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{r}_0 + \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle + \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle}_{0} = \langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle$$

Erhalten äquivalente Darstellung für Γ

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Gamma = \{ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x} \mid \vec{x} \in U \} & U^\perp = [\vec{n}],\ U = [\vec{n}]^\perp \\ \Gamma = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = p \} & p = \langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle \end{array}}$$

Darstellung von Γ durch Gleichung

$$\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = p \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = p \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

heißt <u>Hessesche Form</u> von Γ und $\vec{n}$ heißt <u>Normalenvektor</u> von Γ $(\vec{n} \perp U)$

Bemerkung

$t\vec{n}$ $t \neq 0$ ist dann ebenfalls Normalenvektor von Γ

es gilt $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = p \iff \langle \vec{r}, t\vec{n} \rangle = tp$

Beispiel Hyperebene im $\mathbb{R}^3$

Geg:

- $\Gamma = \vec{r}_0 + [\vec{a}, \vec{b}] \qquad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ges:

- Hessesche Form von Γ
- $d(\vec{r}_1, \Gamma)$ sowie Lotfußpunkt $\vec{r}_F$ von $\vec{r}_1$ auf Γ

Lösung

(1) $U = [\vec{a}, \vec{b}] = \{ A \cdot \vec{t} \mid \vec{t} \in \mathbb{R}^2 \}$ $\quad A = (\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $U^\perp = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A^T \vec{x} = \vec{0} \} = \{ \vec{x} \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

$\Rightarrow U^\perp = \{ \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \} = [\vec{n}]$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ NV von Γ

(3) Hessesche Form von $\Gamma = \vec{r}_0 + U$

$p = \langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 5$

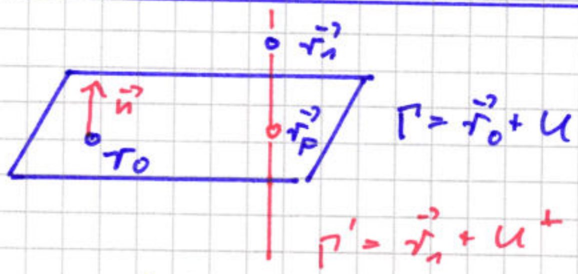
$\Gamma = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = p \}$

$\Gamma = \{ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 7x - 3y + z = 5 \}$

(4) $\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp = \vec{r}_1 + [\vec{n}] = \{ \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{n},\ t \in \mathbb{R} \}$

Gerade durch $\vec{r}_1$ $\perp$ zu Γ

(5) $\vec{r}_F$ ist Schnittpunkt von Γ und Γ'



- $\vec{r}_F \in \Gamma \Rightarrow \langle \vec{r}_F, \vec{n} \rangle = p$
- $\vec{r}_F \in \Gamma' \Rightarrow \vec{r}_F = \vec{r}_1 + t\vec{n}$

Einsetzen: $\langle \vec{r}_1 + t\vec{n}, \vec{n} \rangle = p$

$\langle \vec{r}_1, \vec{n} \rangle + t \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = p$

$$\Rightarrow t = \frac{p - \langle \vec{r}_1, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle} = \frac{\langle r_0, \vec{n} \rangle - \langle \vec{r}_1, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle} = \frac{\langle \vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle} = \frac{1}{59}$$

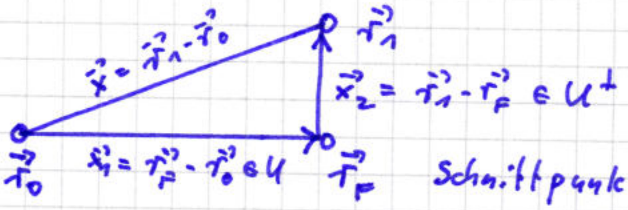
$$\Rightarrow \vec{r}_F = \vec{r}_1 + t\vec{n} = \vec{r}_1 + \frac{1}{59}\vec{n} = \frac{1}{59} \begin{pmatrix} 66 \\ 115 \\ 178 \end{pmatrix}$$

$$d(\vec{r}_1, \Gamma) = d(\vec{r}_1, \vec{r}_F) = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_F\| = \|\vec{r}_F - \vec{r}_1\| = \|t\vec{n}\| = |t| \cdot \|\vec{n}\| = \frac{1}{59}\sqrt{59}$$

allgemein: $d(\vec{r}_1, \Gamma) = |t| \cdot \|\vec{n}\| = \dfrac{|\langle \vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}$

(5.5.4) Orthogonale Projektion, Orthonormalbasis

Abstand $d(\vec{r}_1, \Gamma)$ mit $\Gamma = \vec{r}_0 + U \qquad \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$



Schnittpunkt von $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ und $\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp$

$$d(\vec{r}_1, \Gamma) = d(\vec{r}_1, \vec{r}_F) = \| \vec{r}_1 - \vec{r}_F \| = \|\vec{x}_2\| = \| \vec{x} - \vec{x}_1 \|$$

(1) Orthogonale Projektion

Gegeben:
- $U \subseteq \mathbb{R}^n$ lin UR
- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ Vektor

Gesucht:
- Zerlegung von $\vec{x}$ in Summe der Form

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \quad \text{mit } \vec{x}_1 \in U \quad \vec{x}_2 \in U^\perp}$$

Bezeichnung:
- $\vec{x}_1 = \text{proj}(\vec{x} : U)$ heißt orthogonale Projektion von $\vec{x}$ auf U
- $\vec{x}_2 = \vec{x} - \vec{x}_1$ heißt orthogonale Komponente von $\vec{x}$ bzgl. U

(2) Orthonormalsystem, Orthonormalbasis

Sei $M = \{ \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m \} \subseteq \mathbb{R}^n$

Definition

a) M heißt Orthonormalsystem (ONS), falls $\vec{b}_i \perp \vec{b}_j$ für $i \neq j$ und $\| \vec{b}_i \| = 1$ für alle i ist.

b) M heißt Orthonormalbasis (ONB) von U, falls M ein ONS und Basis von U ist.

Kriterium

$$M = \{ \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m \} \text{ ist ONS} \iff \langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$\left(1 = \langle \vec{b}_i, \vec{b}_i \rangle = \| \vec{b}_i \|^2 \iff \| \vec{b}_i \| = 1 \right)$$

(3) Eigenschaften eines ONS

Sei $M = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\}$ ein ONS. Dann gilt

(a) Jst $\vec{x} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \ldots + \alpha_m \vec{b}_m$ LK der Vektoren aus M

so ist $\alpha_i = \langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle \quad \forall i$

(b) M ist linear unabhängig

Beweis

(a) $\langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle = \langle \alpha_1 \vec{b}_1 + \ldots + \alpha_m \vec{b}_m, \vec{b}_i \rangle$

$$= \alpha_1 \underbrace{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_i \rangle}_{0} + \ldots + \alpha_i \underbrace{\langle \vec{b}_i, \vec{b}_i \rangle}_{1} + \ldots + \alpha_m \underbrace{\langle \vec{b}_m, \vec{b}_i \rangle}_{0}$$

$$= \alpha_i$$

(b) Die Gleichung $\vec{0} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \ldots + \alpha_m \vec{b}_m$ hat wegen

(a) nur die Lösung $\alpha_i = \langle \vec{0}, \vec{b}_i \rangle = 0 \quad \forall i$

$\rightarrow$ M ist linear unabhängig

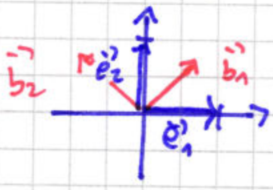
Folgerung

Jst $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein lin UR mit $\dim(U) = m$ und ist $M = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\}$ ein ONS mit $M \subseteq U$, so ist M ONB von U

Bsp1 $\quad U = \mathbb{R}^2$

(a) $M = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist ONS und somit ONB von $\mathbb{R}^2$

(b) $M = \left\{ \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist ONS und somit ONB von $\mathbb{R}^2$



Bemerkung

Sämtliche obige Bemerkungen gelten analog für beliebige euklidische Vektorräume (VR über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt)

Klassisches Beispiel

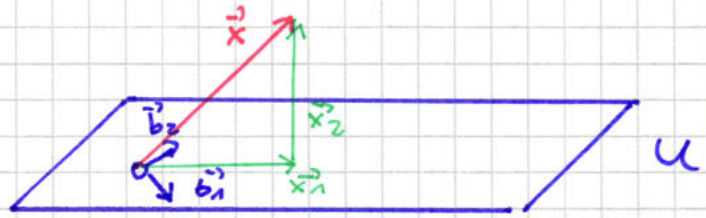
- V = VR der 2π-periodischen Fkt. $\quad \langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx$
- ONS $M = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}$

(4) Berechnung der orthogonalen Projektion

Ist $M = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ eine ONB des lin UR $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, so gilt

$$\boxed{\vec{x}_1 = \operatorname{proj}(\vec{x} : U) = \langle \vec{x}, \vec{b}_1 \rangle \cdot \vec{b}_1 + \dots + \langle \vec{x}, \vec{b}_m \rangle \vec{b}_m}$$

Beweis



Es sei $\vec{x}_1 = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_m \vec{b}_m$ mit $\alpha_i = \langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle$

Also ist $\vec{x}_1 \in [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m] = U$. Setzen $\vec{x}_2 := \vec{x} - \vec{x}_1$

Um die Projektionseigenschaft nachzuweisen bleibt z.z. $\vec{x}_2 \in U^\perp$

Aus (3) a) folgt $\alpha_i = \langle \vec{x}_1, \vec{b}_i \rangle$ für $i = 1, \dots, m$. Somit gilt:

$\langle \vec{x}_2, \vec{b}_i \rangle = \langle \vec{x} - \vec{x}_1, \vec{b}_i \rangle = \langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle - \langle \vec{x}_1, \vec{b}_i \rangle = \alpha_i - \alpha_i = 0$

also $\vec{x}_2 \perp \vec{b}_i$ für $i = 1, \dots, m$. Dann ist $\vec{x}_2 \perp [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m] = U \Rightarrow \vec{x}_2 \in U^\perp$

■

(5) Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

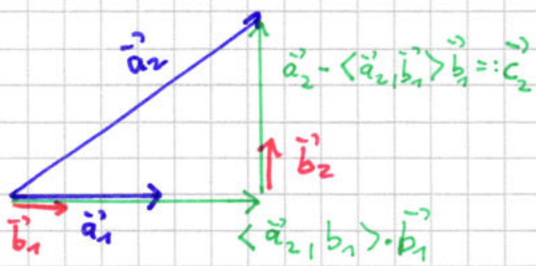
<u>Eingabe:</u> Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\}$ des lin UR $U \subseteq \mathbb{R}^n$

<u>Ausgabe:</u> ONB $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$

<u>Berechnung</u>

$\vec{b}_1 = \frac{1}{\|\vec{a}_1\|} \cdot \vec{a}_1$

$\vec{c}_2 := \vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle \cdot \vec{b}_1$, $\vec{b}_2 := \frac{1}{\|\vec{c}_2\|} \cdot \vec{c}_2$



allgemein für $1 \leq r \leq m-1$

$$\vec{c}_{r+1} := \vec{a}_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \langle \vec{a}_{r+1}, \vec{b}_i \rangle \cdot \vec{b}_i \quad \left(= \vec{a}_{r+1} - \operatorname{proj}(\vec{a}_{r+1} : [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r]) \right)$$

$$\vec{b}_{r+1} := \frac{1}{\|\vec{c}_{r+1}\|} \cdot \vec{c}_{r+1}$$

<u>Beispiel 1</u> $\qquad U = [\vec{a}]$

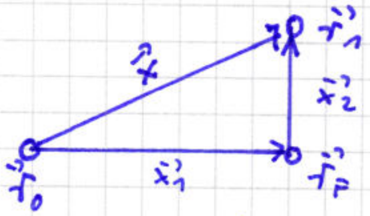
- ONB : $\vec{b} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}$
- Projektion : $\vec{x}_1 = \text{proj}(\vec{x} : [\vec{a}]) = \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \cdot \vec{b} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \cdot \vec{a}$

<u>Beispiel 2</u>

(a) $\quad U = \left[\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

- $\|\vec{a}_1\| = \sqrt{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{b}_1 = \frac{1}{2} \cdot \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{c}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\|\vec{c}_2\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ONB von U ist $\left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\quad \Gamma = \vec{r}_0 + U \quad$ mit $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad d(\vec{r}_1, \Gamma) = ?$



- $\vec{x} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
- $\vec{x}_1 = \text{proj}(\vec{x} : U) = \langle \vec{x}, \vec{b}_1 \rangle \cdot \vec{b}_1 + \langle \vec{x}, \vec{b}_2 \rangle \cdot \vec{b}_2$
  $\qquad = 3\, \vec{b}_1 + 5\sqrt{2}\; \vec{b}_2 \qquad = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\vec{x}_2 = \vec{x} - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_F = \vec{r}_0 + \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
- $d(\vec{r}_1, \Gamma) = d(\vec{r}_1, \vec{r}_F) = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_F\| = \|\vec{x}_2\| = \sqrt{2}$
  $\quad (= d(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, U))$

<u>Bemerkungen</u>

1) Gram-Schmidt funktioniert auch, wenn nur Erzeugendensystem gegeben ($\vec{0}$ weglassen)
2) $\text{proj}(\vec{r}_1 : \Gamma = \vec{r}_0 + U) = \vec{r}_0 + \text{proj}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0 : U)$
3) Verfahren funktioniert in allgemeinen euklidischen Räumen

(5.6) Methode der kleinsten Quadrate

Problemstellung

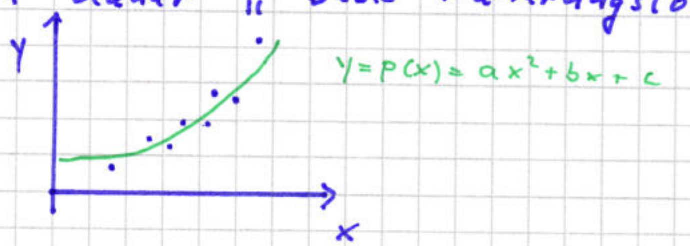
Bremsweg y eines Autos hängt quadratisch von der Geschwindigkeit x ab, d.h.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Messungen ergeben überbestimmtes LGS für die Koeff. a, b, c

$$(x, y) = (100, 50) \quad \rightarrow \quad a \cdot 10\,000 + b \cdot 100 + c = 50$$

Aufgrund von Messfehlern besitzt das LGS keine Lösung. Suchen daher „beste Näherungslösung"



(5.6.1) Näherungslösung eines LGS

Gegeben

LGS der Form $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$ (*) mit $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

Gesucht

Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ für welchen $\| A\vec{x} - \vec{b} \|$ den kleinsten Wert hat. Man nennt dann $\vec{x}$ eine (im quadratischen Mittel) <u>beste Näherungslösung</u> von (*)

Bemerkung

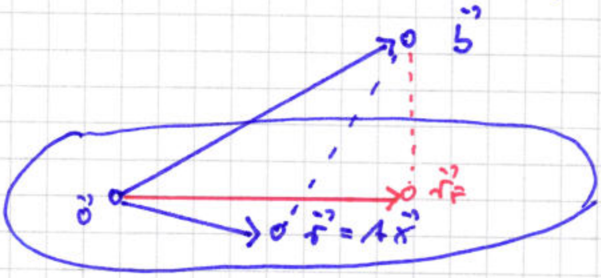
$\| A\vec{x} - \vec{b} \| = 0 \iff A\vec{x} = \vec{b}$

$\Rightarrow$ Ist das LGS (*) lösbar, so sind die besten Näherungslösungen gerade die Lösungen von (*)

Lösung

- $U = \{ A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n \}$ ist ein UR $U \subseteq \mathbb{R}^m$
- $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ mit $\vec{r}_0 = \vec{o}$ ist aff. UR von $\mathbb{R}^m$

  $\Gamma = \{ \vec{r} \mid \vec{r} = A\vec{x} \;,\; \vec{x} \in \mathbb{R}^n \} = U$



$\Gamma = \vec{o} + U = U$

- Für $\vec{r} = A\vec{x}$ und $\vec{b}$ ist $\| A\vec{x} - \vec{b} \| = \| \vec{r} - \vec{b} \| = d(\vec{r}, \vec{b})$

  Wir suchen also den Punkt $\vec{r}$ aus Γ mit $d(\vec{r}, \vec{b}) = d(\Gamma, \vec{b})$

  also $\vec{r}_F$ = Fußpunkt des Lotes von $\vec{b}$ auf Γ.

- $U^\perp = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid A^T \vec{y} = \vec{o} \}$ siehe (5.5.2)

  $\Gamma' = \vec{b} + U^\perp = \{ \vec{r} \mid A^T \vec{r} = A^T \vec{b} \}$
- $\vec{r}_F \in \Gamma \cap \Gamma'$
- $\left.\begin{array}{l} \vec{r}_F \in \Gamma \;\Rightarrow\; \vec{r}_F = A\vec{x} \\ \vec{r}_F \in \Gamma' \;\Rightarrow\; A^T \vec{r}_F = A^T \vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$

Somit gilt

$\vec{x}$ beste Näherungslösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\| A\vec{x} - \vec{b} \|$ minimal $\Leftrightarrow$ $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$

Bemerkung

$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ ist stets lösbar

Beispiel

- LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{pmatrix} \quad A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \end{pmatrix}$
- LGS $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ $\quad \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\left(A\vec{x} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 31 \\ 42 \end{pmatrix} \right)$

(5.6.2) Ausgleichspolynom

Gegeben

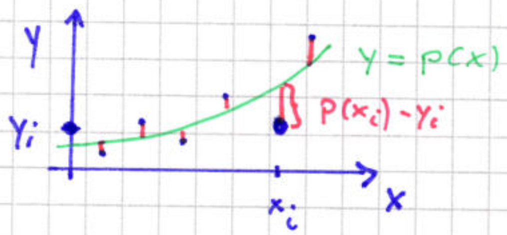
- Messpunkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$
- natürliche Zahl $k \geq 1$

Gesucht

Ein Polynom $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$ vom Grad $\leq k$, für welches die quadratische Abweichung

$$D = (p(x_1) - y_1)^2 + \dots + (p(x_n) - y_n)^2$$

den kleinsten Wert hat. Man nennt dann $p(x)$ ein Ausgleichspolynom vom Grad $\leq k$ für die n Messpunkte



Lösung

- Suchen Vektor $\vec{x} = (a_0, \dots, a_k)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$ der Koeffizienten
- Es gilt
  - $\vec{r} := \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_k x_1^k \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_k x_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \dots x_1^k \\ 1 & x_n & x_n^2 \dots x_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$
  - $\vec{r} = A\vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^k \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
- Dann gilt $D = (p(x_1) - y_1)^2 + \dots + (p(x_n) - y_n)^2 = \|\vec{r} - \vec{b}\|^2 = \|A\vec{x} - \vec{b}\|^2$
- Suchen $\vec{x}$ für welches $D = \|A\vec{x} - \vec{b}\|^2$ also auch $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$ minimal ist also beste Näherungslösung für $A\vec{x} = \vec{b}$

$\Rightarrow$ $\vec{x}$ ist Lösung von $\boxed{A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}}$

Bsp:
- $(x_i, y_i) = (0,0), (1,1), (3,2), (4,5)$ $\quad n = 4$ Punkte
- $k = 1 \Rightarrow$ gesucht Ausgleichsgerade $p(x) = a_1 x + a_0$
- LGS $p(x_i) = a_0 + a_1 x_i = y_i$ ergibt $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$
- beste Näherungslösung (siehe 4.5.1) $\vec{x} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$ $\Bigg\} \Rightarrow p(x) = \frac{11}{10} x - \frac{2}{10}$

6. Determinanten

(6.1) Definition der Determinante

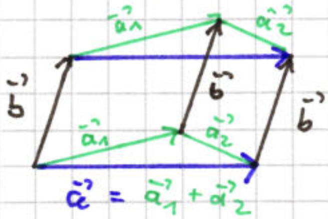
Motivation

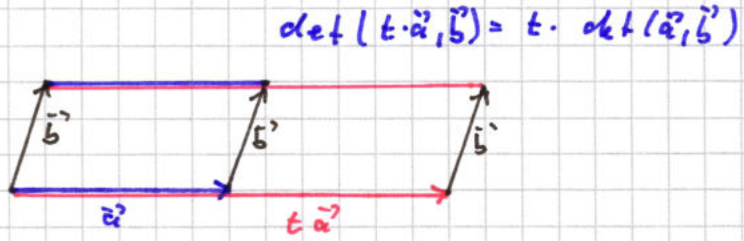
Geg: n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ des Spaltenvektorraumes K^n, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p$, $A := (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in K^{(n,n)}$ Matrix

Ges: Eine Funktion $\det: K^{(n,n)} \to K$, die der Vektormenge (bzw. der Matrix) das verallgemeinerte Volumen des aufgespannten Objektes zuweist. (Im $\mathbb{R}^2$ Flächeninhalt des Parallelogramms, im $\mathbb{R}^3$ Volumen des Spats ...)

Gewünschte Eigenschaften

(D1) Linearität in jeder Spalte





$$\det(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}) = \det(\vec{a}_1, \vec{b}) + \det(\vec{a}_2, \vec{b})$$

Allgemein
- $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i + \vec{a}_i{}', \dots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i{}', \dots \vec{a}_n)$
  gilt für beliebige i und beliebige $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, $\vec{a}_i{}'$
- $\det(\vec{a}_1, \dots, t \cdot \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) = t \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n)$

(D2) Enthält A zwei gleiche Spalten, so ist $\det(A) = 0$

Anschauung klar $\Longrightarrow$ Fläche 0

(D3) Normierung: $\det(E) = 1$

Satz (ohne Beweis)

a) Es sei K ein beliebiger Körper. Dann gibt es genau eine Funktion $\det : K^{(n,n)} \to K$ welche die Eigenschaften (D1), (D2), (D3) besitzt. Die Funktion wird **Determinante** genannt.

b) **Leibniz-Formel**:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Bemerkungen

- S_n = Menge der bijektiven Abbildungen $\sigma : \{1,..,n\} \to \{1,..,n\}$ (Permutationen)
- Vorzeichen einer Permutation $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{Anzahl der Kreuzungen}}$

Kreuzung: (i,j) mit $i < j$ aber $\sigma(i) > \sigma(j)$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^6 = 1$$

Spezialfälle der Leibniz-Formel

$n = 2$ $\qquad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - c \cdot b$

$n = 3$ (Sarrus-Regel)

$$\det \left(\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right) \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = \begin{matrix} aei + bfg + cdh \\ - gec - hfa - idb \end{matrix}$$

Für größere n ist Leibniz-Regel Mist ($n!$ Summanden)

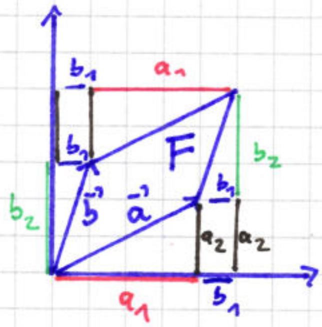
Es gibt **keine Verallgemeinerung der Sarrus-Regel** für $n > 3$!!!

Folgerung aus der Leibniz-Formel

(D4) $\quad \det(A) = \det(A^T)$

$\Rightarrow$ Die Regeln (D1) (D2) gelten in analoger Form für Zeilen statt für Spalten.

Beispiele

① 

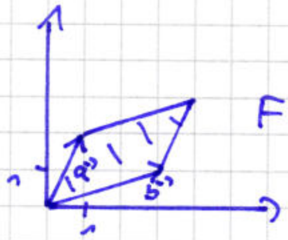
$$F = (a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) - a_1 a_2 - b_1 b_2 - 2 b_1 a_2$$

$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2 - a_1 a_2 - 2 b_1 a_2 - b_1 b_2$$

$$= a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right)$$

② $\det(\vec{a}, \vec{b})$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -5$$



$F = 5$

Determinante ist vorzeichenbehaftet

Flächeninhalt (Volumen) = Betrag der Determinante

③ $$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot -1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = -3$$

(6.2) Eigenschaften der Determinante

(D5) Hat A Nullzeile (oder Spalte) so ist $\det(A) = 0$

folgt aus (D1) mit $t = 0$

(D6) Gaußoperationen und $\det(A)$

(i) Zeile mit Konstante multiplizieren

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha \cdot a \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \end{pmatrix}$$ Regel (D1) für Zeilen

(ii) Vielfaches einer Zeile zu anderer Zeile addieren

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ b \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ b \\ \vdots \end{pmatrix} + \alpha \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ a \\ \vdots \end{pmatrix}}_{0} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ b \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ \alpha a \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ b + \alpha a \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ keine Änderung der Determinante!

(iii) Zeilentausch

$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \underline{a}\\ \vdots\\ \underline{b}\\ \vdots\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ \underline{a}\\ \vdots\\ \underline{b}+\underline{a}\\ \vdots\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ \underline{a}-(\underline{b}+\underline{a})\\ \vdots\\ \underline{b}+\underline{a}\\ \vdots\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ -\underline{b}\\ \vdots\\ \underline{a}\\ \vdots\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \underline{b}\\ \vdots\\ \underline{a}\\ \vdots\end{pmatrix}$$

Vorzeichenwechsel!

(D7) Dreiecksmatrizen

Sei D eine Matrix aus $K^{(n,n)}$. Falls gilt:

$d_{ij} = 0$ für $j < i$, so heißt D obere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$

$d_{ij} = 0$ für $j > i$, so heißt D untere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&5&6\end{pmatrix}$

Ist D eine obere oder untere Dreiecksmatrix, so gilt

$$\boxed{\det(D) = d_{11}\cdot d_{22}\cdot\ldots\cdot d_{nn}}$$

Begründung: $\det(\vec{d}_1,\ldots,\vec{d}_n) \underset{\text{Typ ii}}{\overset{\text{Gaußop}}{=\!=}} \det\begin{pmatrix}d_{11}&&0\\&d_{22}&\\0&&\ddots\ d_{nn}\end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} d_{11}\cdot\ldots\cdot d_{nn}\cdot\underbrace{\det E}_{1}$

Kann genutzt werden:

Bsp:

$$A\quad \begin{array}{ccc|} 1&2&3\\ 4&5&6\\ 7&8&10\\ \hline 1&2&3\\ 0&-3&-6\\ 0&-6&-11\\ \hline 1&2&3\\ 0&-3&-6\\ 0&0&1 \end{array}$$

Zeilenoperationen: $\cdot(-4)$, $\cdot(-7)$ für A; $\cdot(-2)$ für A'; die Blöcke sind A, A', D.

$\det(A) = \det(A') = \det(D) = 1\cdot -3\cdot 1 = -3$

Gauß-Jordan-Verfahren zur Bestimmung von $\det(A)$

Überführen A durch Gaußoperationen vom Typ (ii) α-Faches einer Zeile zu anderer Zeile addieren und (iii) Zeilentausch in Dreiecksmatrix $D = (d_{ij})$

Dann ist $\det(A) = (-1)^m\cdot\det D = (-1)^m\cdot d_{11}\cdot\ldots\cdot d_{nn}$

m = Anzahl der Zeilentauschs

Beispiele

1) $\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 - 4\cdot 2 = -1$

2) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} = ?$

Sarrus: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \\ 3 & 9 \end{matrix} = \begin{matrix} 1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 3 + 5\cdot 7\cdot 9 \\ -3\cdot 1\cdot 5 - 9\cdot 4\cdot 1 - 3\cdot 7\cdot 2 \end{matrix}$

$= 3 + 24 + 315 - 15 - 36 - 42 = 249$

Gauß: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-7) \\ \cdot(-3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -13 & -31 \\ 0 & 3 & -12 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & -13 & -31 \end{vmatrix}$

$= -3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -13 & -31 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 13 \\ + \end{matrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -83 \end{vmatrix} = -3\cdot 1\cdot 1\cdot(-83) = 249$

(D8) Invertierbarkeit

Folgende Aussagen sind äquivalent für $A \in K^{(n,n)}$

(i) A ist invertierbar

(ii) Die Spalten von A sind linear unabhängig

(iii) Die Zeilen von A sind linear unabhängig

(iv) $rg(A) = n$

(v) $\det(A) \neq 0$

Folgt aus (D7) und (D6)

(D9) Produktregeln

Seien $A, B \in K^{(n,n)}$ $\alpha \in K$. Dann gilt

a) $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$

b) $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det(A)$

c) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ falls A invertierbar

Bew: a) Für $\det(B) \neq 0$ zeigt man $\frac{\det(A\cdot B)}{\det(B)} =: d(A)$ erfüllt D1 – D3

b) folgt aus (D1)

c) $1 = \det(E) = \det(A\cdot A^{-1}) = \det(A)\cdot\det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

(6.3) Adjunkten / Laplacescher Entwicklungssatz

Sei $A \in K^{(n,n)}$ eine quadratische Matrix. Dann bezeichnet $A_{ij} \in K^{(n-1,n-1)}$, die aus A durch Streichen der Zeile i und der Spalte j entsteht.

$$\alpha_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

A_{ij} heißt <u>Minor</u> und α_{ij} <u>Adjunkte</u> von A zum Element a_{ij}

<u>Entwicklungssatz</u>

<u>(1) Entwicklung nach der i-ten Zeile</u>

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \alpha_{ij} = a_{i1}\alpha_{i1} + \dots + a_{in}\alpha_{in} \quad \text{für beliebiges } i$$

<u>(2) Entwicklung nach der j-ten Spalte</u>

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \alpha_{ij} = a_{1j} \cdot \alpha_{1j} + \dots + a_{nj} \cdot \alpha_{nj} \quad \text{für beliebiges } j$$

<u>Inversenformel</u>

Ist $\det(A) \neq 0$ so gilt $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A_{adj}^{T}$ mit $A_{adj} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$

Folgt aus Leibniz-Formel

<u>Bsp 1:</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- Vorzeichen $(-1)^{i+j} = \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$ (Schachbrettmuster)
- Adjunkten

$$\alpha_{11} = +\det\begin{pmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ \cancel{c} & d \end{pmatrix} = d \qquad \alpha_{12} = -\det\begin{pmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ c & \cancel{d} \end{pmatrix} = -c$$

$$\alpha_{21} = -\det\begin{pmatrix} \cancel{a} & b \\ \cancel{c} & \cancel{d} \end{pmatrix} = -b \qquad \alpha_{22} = +\det\begin{pmatrix} a & \cancel{b} \\ \cancel{c} & \cancel{d} \end{pmatrix} = a$$

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

- Entwicklung nach Spalte 1 $\det(A) = \begin{vmatrix} \boxed{a} & b \\ \boxed{c} & d \end{vmatrix} = a\alpha_{11} + c\alpha_{12}$

$$= ad - cb$$

- Inverse Matrix, falls $\det(A) = ad - cb \neq 0$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{adj}^{T} = \frac{1}{ad-cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Bsp2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{Vorzeichen } (-1)^{i+j} \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach Spalte 2

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & +5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & \cancel{2} & 3 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & \cancel{2} & 3 \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{9} \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -2(36-42) + 5(9-21) - 8(6-12)$$

$$= 12 - 60 + 48 = 0$$

Entwicklung nach Zeile 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$+ \quad - \quad +$

$$= 7(12-15) - 8(6-12) + 9|5-8|$$

$$= -21 + 48 - 27 = 0$$

$\det(A) = 0$ (Zeilen linear abhängig, $3.Z = -1.Z + 2 \cdot 2.Z$)

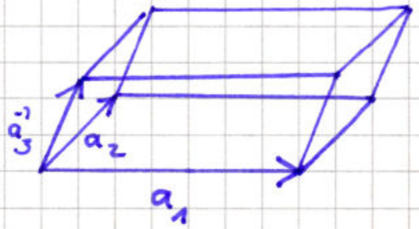
Bemerkung

- Entwicklungssatz liefert rekursive Berechnungsmöglichkeit für die Determinante
- nützlich, wenn in einer Zeile oder Spalte viele Nullen
- sonst Gaußverfahren besser

(6.4) Anwendung der Determinante

(I) Volumen im $\mathbb{R}^3$

Für das Volumen des Parallelepipeds mit den Seitenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt $V = |\det(A)|$ mit $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$



analog für $n \geq 3$ n-dimensionales Volumen im $\mathbb{R}^n$.

II Untersuchung linearer Gleichungssysteme

(1) Inhomogenes LGS

$A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in K^{(n,n)}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$

also n Gleichungen in n Unbekannten

1. Fall $\det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = n$ und $\exists A^{-1}$

$\Rightarrow$ Es gibt genau 1 Lsg. $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

2. Fall $\det A = 0 \Rightarrow rg(A) \leq n-1$ $\nexists A^{-1}$

a) $rg(A) < rg(A, \vec{b}) \Rightarrow$ keine Lösung

b) $rg(A) = rg(A, \vec{b}) \Rightarrow$ Lösungsmenge Γ mit Dimension $d = n - rg(A) \geq 1$ also unendlich viele Lsg (falls K nicht endlich)

Cramersche Regel

Sei $A = (\vec{a}_1, .., \vec{a}_n) \in K^{(n,n)}$. Ist $\det(A) \neq 0$, so gilt für die eindeutig bestimmte Lösung $\vec{x} = (x_1, .., x_n)^T$ von $A\vec{x} = \vec{b}$

$$x_i = \frac{\det(\vec{a}_1, .., \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1}, \dots \vec{a}_n)}{\det(A)}$$

(Ersetze in Zählerdeterminante i-te Spalte durch $\vec{b}$)

Beweis der Regel

$$\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{b} \iff x_1 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + x_n \cdot \vec{a}_n = \vec{b}$$

$$\det\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n\right) = \det\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, x_1 \vec{a}_1 + \ldots + x_n \vec{a}_n, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n\right)$$

$$= x_1 \cdot \underbrace{\det\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right)}_{0} + \ldots + x_i \underbrace{\det\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n\right)}_{\det(A)} + \ldots + x_n \underbrace{\det\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \ldots, \vec{a}_n\right)}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad x_i = \frac{\det\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n\right)}{\det(A)}$$

$\blacksquare$

Beispiel $\quad K = \mathbb{C}, \; n = 2$

$$\begin{pmatrix} i+1 & 5 \\ 4 & i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\det(A) = \begin{vmatrix} i+1 & 5 \\ 4 & i-1 \end{vmatrix} = (i+1)(i-1) - 4 \cdot 5 = -2 - 20 = -22$
- $\det\left(\vec{b}, \vec{a}_2\right) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & i-1 \end{vmatrix} = 2(i-1) - 2 \cdot 5 = -12 + 2i \Rightarrow x_1 = \frac{-12+2i}{-22} = \frac{6-i}{11}$
- $\det\left(\vec{a}_1, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} i+1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (i+1) \cdot 2 - 4 \cdot 2 = -6 + 2i \Rightarrow x_2 = \frac{-6+2i}{-22} = \frac{3-i}{11}$
- Lösung $\quad \underline{\underline{\vec{x} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6-i \\ 3-i \end{pmatrix}}}$

(2) Homogenes LGS

$A\vec{x} = \vec{0}$ mit $A \in K^{(n,n)}$, $\vec{0} \in K^n$ $\quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$

Hat stets die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$, d.h. Fall 2 a) entfällt

1. Fall $\quad \det(A) \neq 0$

$\Rightarrow$ Es gibt nur die triviale Lösung $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$

2. Fall $\quad \det(A) = 0$

$\Rightarrow$ Es gibt auch nichttriviale Lösungen

$\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{x} = \vec{0}$

III Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

heißt <u>Vektorprodukt (Kreuzprodukt)</u> von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

<u>Bemerkung:</u> Die Determinante ist als Merkregel zu verstehen

<u>Beispiel</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \boxed{\vec{e}_1}\,+ & 1 & 4 \\ \boxed{\vec{e}_2}\,- & 2 & 5 \\ \boxed{\vec{e}_3}\,+ & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 \cdot (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - \vec{e}_2 (1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + \vec{e}_3 (1 \cdot 5 - 2 \cdot 4)$$

$$= -3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

anders: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 \quad 4 \\ 2 \quad 5 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

<u>Rechenregeln</u>

(V1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (Spaltentausch in Determinante)

(V2)
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times (t \cdot \vec{b}) = t \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

} Linearität in Spalte 3

- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$
- $(t\vec{a}) \times \vec{b} = t(\vec{a} \times \vec{b})$

} Linearität in Spalte 2

(V3) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (Spatprodukt)

Volumen $= |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |\langle \vec{a} \times \vec{b}, c \rangle|$

Begründung
- $\vec{e}_i$ in Formel wird durch c_i ersetzt

$\Rightarrow \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \det(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

(2 × Spaltentausch)

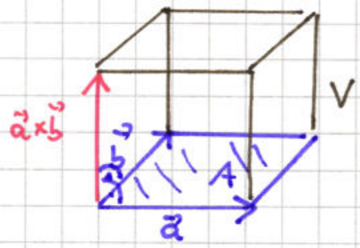
(V4) $\langle \vec{a}\times\vec{b}, \vec{a}\rangle = 0$ also $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a}$

$\langle \vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\rangle = 0$ also $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{b}$

folgt aus (V3) und (D2)

(V5) $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = F(\vec{a},\vec{b}) = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin(\sphericalangle\, \vec{a},\vec{b})$

↑ Schule



$A = F(\vec{a},\vec{b})$ Flächeninhalt des Parallelogramms.

Bew: $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \langle \vec{a}\times\vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\rangle \overset{(V3)}{=} \det(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b})$

$= V(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b})$

$= A\cdot h$ (Grundfläche · Höhe)

$= F(\vec{a},\vec{b})\cdot\|\vec{a}\times\vec{b}\|$

$\Rightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\| = F(\vec{a},\vec{b}) = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$

(V6) $\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$ folgt aus (V5)

(V7) $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2$

Bew: $\cos^2(\sphericalangle\,\vec{a},\vec{b}) + \sin^2(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})) = 1$

$$\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2}{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2} + \frac{\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2}{\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2} = 1$$

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2 + \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2$$

Bemerkung: Das Vektorprodukt hat viele Anwendungen in der analytischen Geometrie (Normalenvektor, Flächenberechnungen etc.)

7. Lineare Abbildungen und Eigenwerte

(7.1) Lineare Abbildungen und Gleichungen

- Seien V, W Vektorräume über K $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots)$
- $L : V \to W$ Abbildung

$$x \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow y = L(x)$$

<u>Definition</u>

(a) L heißt <u>lineare Abbildung</u>, falls gilt

$$\text{(LA)} \quad \boxed{\forall \alpha, \beta \in K \ \forall x, y \in V : \quad L(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y)}$$

(b) Die Gleichung

$$L(x) = b$$

heißt <u>lineare Gleichung</u> in der Unbekannten x, falls L eine lineare Abbildung ist. Die Gleichung heißt <u>homogen</u>, falls $b = 0_W$ und <u>inhomogen</u> falls $0_W \neq b \in W$

<u>Bemerkungen</u>

(1) Die Eigenschaft (LA) ist äquivalent zu

(LA1) $\quad \forall x, y \in V : \quad L(x+y) = L(x) + L(y)$

(LA2) $\quad \forall x \in V \ \forall \alpha \in K : \quad L(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot L(x)$

<u>Bew:</u> (LA) mit $\alpha = \beta = 1_K \Rightarrow$ (LA1)

(LA) mit $\beta = 0_K \Rightarrow$ (LA2)

$$L(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \overset{LA1}{=\!=} L(\alpha \cdot x) + L(\beta \cdot y) \overset{LA2}{=\!=} \alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y)$$

(2) Eine lineare Abbildung des Vektorraumes V in den Vektorraum W heißt auch (Vektorraum-) Homomorphismus (operationstreue Abbildung)
(vgl. Homomorphismen von Gruppen, Ringen, Körpern)

Beispiele

a) $V = K^n$, $W = K^m$ $\qquad A \in K^{(m,n)}$

$f: V \to W$ mit $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ ist lineare Abbildung, da

$f(\alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y}) = A(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha \cdot A \cdot \vec{x} + \beta \cdot A \vec{y} = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$

$\Rightarrow$ Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist eine lineare Gleichung

b) $V = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \qquad W = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Die Abbildung $D: V \to W$ mit $D(f) = f'$ ist linear

$D(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)' = \alpha \cdot f' + \beta \cdot g' = \alpha \cdot D(f) + \beta \cdot D(g)$

c) Die identische Abbildung $id_V : V \to V$ mit $id_V(x) = x \quad \forall x$

ist stets linear (trivial)

Bemerkung

Die Menge $L(V, W) := \{ f: V \to W \mid f \text{ ist linear} \}$
der linearen Abbildungen ist ein Vektorraum
(linearer Unterraum von $Abb(V, W)$), d.h.
Summe und Vielfache linearer Abbildungen
sind lineare Abbildungen.

Bsp:

- $L: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit
  $L(f) = f' - f$ ist linear

- analog $L: C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
  $L(f) = f'' - 3f' + 2f$

Satz (Hauptsatz über lineare Abbildungen)

Seien V, W zwei K-VR und $L \in L(V,W)$ eine lineare Abbildung. Weiterhin seien

$$U = \{x \in V \mid L(x) = 0_W\} \quad \text{und}$$
$$\Gamma = \{x \in V \mid L(x) = b\}$$

Dann gilt

(1) U ist linearer Unterraum von V

(2) $\Gamma = \emptyset$ oder, falls $x_s \in \Gamma$, dann ist Γ ein affiner Unterraum von V mit

$$\Gamma = x_s + U$$

eine spezielle Lösung der inhom. Gl — allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

Beweis:

- analog zum Beweis des Hauptsatzes über LGS
- Hauptsatz über LGS ist Spezialfall mit $L(\vec{x}) = A\vec{x}$ und $b = \vec{b} \in K^m$

(1) (U1) z.z. $0_V \in U$

$$L(0_V) = L(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot L(0_V) = 0_W$$
$$\Rightarrow 0_V \in U$$

(U2/3) $x, y \in U \quad \alpha, \beta \in K$

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y) = \alpha \cdot 0_W + \beta \cdot 0_W = 0_W$$
$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in U$$

(2) Ist $\Gamma \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_s \in \Gamma$

$$\Gamma = x_s + \{x - x_s \mid x \in \Gamma\}$$

Beh: $M = \{x - x_s \mid x \in \Gamma\} = U$

($\subseteq$) sei $y \in M \Rightarrow y = x - x_s$ für ein $x \in \Gamma$

$$L(y) = L(x - x_s) = L(x) - L(x_s) = b - b = 0_W \Rightarrow y \in U$$

($\supseteq$) $y \in U \Rightarrow y = x - x_s$ mit $x = x_s + y$

z.z: $x \in \Gamma$

$$L(x) = L(x_s + y) = L(x_s) + L(y) = b + 0_W = b \quad \Rightarrow x \in \Gamma$$

■

Beispiel

Ges: Funktion $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Gleichung $y'(x) - y(x) = 3x^2 - x^3$ erfüllt.

- Lineare Gleichung $L(y) = b$ mit $L(y) = y' - y$, $b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $b(x) = 3x^2 - x^3$
- homogene lineare Gleichung $y' - y = 0$ $\quad y' = y$

  $\mathcal{U} = \{ y \mid y' = y \}$ $\qquad \mathcal{U} = \{ y \mid y(x) = ce^x,\ c \in \mathbb{R} \}$
- eine spezielle Lösung $y_s(x) = x^3$ $\qquad y_s' - y_s = 3x^2 - x^3 = b(x)$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung der Gleichung $\underline{y(x) = x^3 + c \cdot e^x \qquad c \in \mathbb{R}}$

(7.2) Lineare Abbildungen $L: K^n \to K^m$, Matrizendarstellung

Geg:
- $V = K^n$, $W = K^m$
- $L: K^n \to K^m$

$$\vec{x} \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow \vec{y} = L(\vec{x})$$

Dann gilt

(1) Ist $L(\vec{x}) = M\vec{x}$ mit $M \in K^{(m,n)}$, so ist L linear (siehe (7.1))

(2) Ist L eine lineare Abbildung, dann gibt es ein $M \in K^{(m,n)}$ mit $L(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$

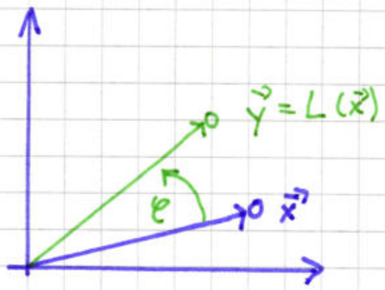
Bew:
- $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + \ldots + x_n \vec{e}_n$

- $$\begin{aligned} L(\vec{x}) &= L(x_1 \cdot \vec{e}_1 + \ldots + x_n \vec{e}_n) \\ &= x_1 \cdot L(\vec{e}_1) + \ldots + x_n \cdot L(\vec{e}_n) \qquad \text{(LA)} \\ &= \left(L(\vec{e}_1), \ldots, L(\vec{e}_n) \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= M \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

  mit $\boxed{M = \left(L(\vec{e}_1), \ldots, L(\vec{e}_n) \right)}$

Bsp 1

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Drehung um $\vec{o}$ mit Winkel φ



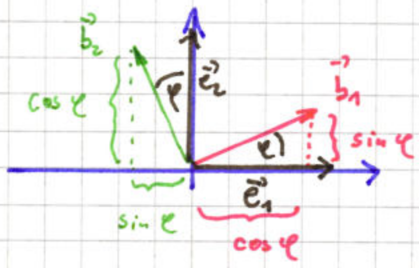
Linearität

$$L(\alpha \vec{x}) = \alpha \cdot L(\vec{x})$$

$$L(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = L(\vec{x}_1) + L(\vec{x}_2)$$

✓

$\Rightarrow \quad \vec{y} = L(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$



$$\vec{b}_1 = L(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_2 = L(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Drehmatrix $M = \left(L(\vec{e}_1), L(\vec{e}_2) \right) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Bestimmung von M bei Basiswechsel

$L: K^n \to K^m$ lin. Abb $\Rightarrow L(\vec{x}) = M\vec{x} \qquad M = ?$

M leicht bestimmbar, wenn $L(\vec{e}_i)$ bekannt. Was, wenn andere Bilder bekannt?

geg: • Basis von K^n $\quad \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \Rightarrow A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ inv.'bare Matrix

• Bilder von $\vec{a}_i$ $\quad L(\vec{a}_i) = \vec{b}_i$

Bestimmung von M $\qquad L(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} \Rightarrow L(\vec{a}_i) = \vec{b}_i$

$$\Rightarrow M \cdot \vec{a}_i = \vec{b}_i$$

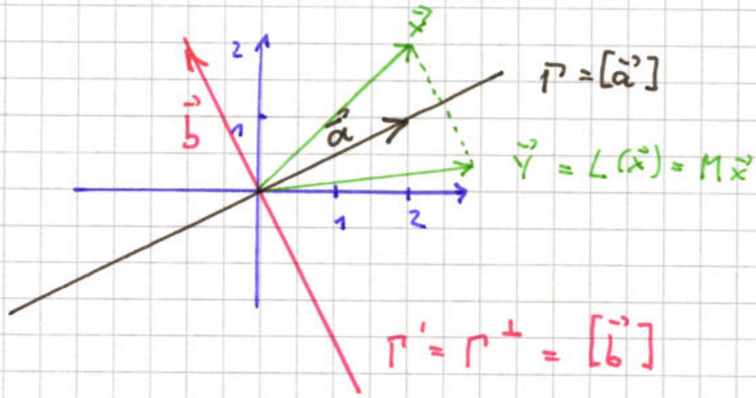
$$M(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = (M\vec{a}_1, \dots, M\vec{a}_n) = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$$

$$\Rightarrow M = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) \cdot (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \left(L(\vec{a}_1), \dots, L(\vec{a}_n) \right) \cdot (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)^{-1}}$$

Beispiel $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Spiegelung an Ursprungsgeraden

$\Gamma = [\vec{a}]$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



Gerade durch $\vec{0}$ $\perp$ zu Γ, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $\vec{x} \in \Gamma \Rightarrow L(\vec{x}) = \vec{x} \Rightarrow L(\vec{a}) = \vec{a}$
- $\vec{x} \in \Gamma' \Rightarrow L(\vec{x}) = -\vec{x} \Rightarrow L(\vec{b}) = -\vec{b}$
- $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ Basis des $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow M = \left(L(\vec{a}), L(\vec{b})\right) \cdot \left(\vec{a}, \vec{b}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Komposition linearer Abbildungen / Matrizenmultiplikation

$L_1 : K^n \to K^m$ linear mit $L_1(\vec{x}) = M\vec{x}$, $M \in K^{(m,n)}$

$L_2 : K^m \to K^p$ linear mit $L_2(\vec{y}) = N\vec{y}$, $N \in K^{(p,m)}$

$L_2 \circ L_1 : K^n \to K^p$ $(L_2 \circ L_1)(\vec{x}) = L_2(L_1(\vec{x})) = N \cdot M \cdot \vec{x}$

$$\begin{tikzcd} \vec{x} \in K^n \arrow[r, mapsto, "M"] \arrow[rr, bend right, "N \cdot M"'] & \vec{y} = M\vec{x} \arrow[r, mapsto] & z \in N\vec{y} \in K^p \end{tikzcd}$$

$$\vec{z} = N\vec{y} = N(M\vec{x}) = (N \cdot M)\vec{x}$$

Umkehrabbildung / inverse Matrix

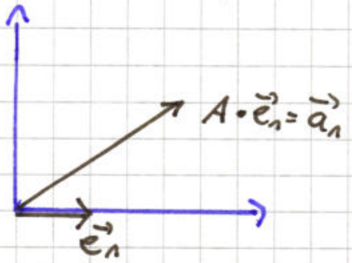
$$\begin{tikzcd} \vec{x} \in K^n \arrow[r, "A"] & \vec{y} = A\vec{x} \in K^n \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$\vec{y} = A\vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ (nur falls $A \in K^{(n,n)}$ invertierbar)

(7.3) Orthogonale Matrizen

Betrachten $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \to \vec{y} = A\vec{x} \in \mathbb{R}^n$



$A \cdot \vec{e}_i = \vec{a}_i$

(1) A Drehmatrix $\Rightarrow \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ ist ONS des $\mathbb{R}^n$ (Da Winkel u. Längen erhalten bleiben)

(2) $A^T A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_n^{\,T} \end{pmatrix} \cdot (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \left(\vec{a}_i^{\,T} \vec{a}_j \right) = \left(\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle \right)$

Definition

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt orthogonale Matrix, falls $A^T A = E$

Folgerung aus (2)

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist orthogonale Matrix $\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren von A bilden ONS und damit ONB des $\mathbb{R}^n$

Bsp: Spiegelmatrix $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$: $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$, $\left\| \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = 1$

Eigenschaften orthogonaler Matrizen

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ orthogonal, dann gilt

(O1) $A^{-1} = A^T$

(O2) A^T und A^{-1} sind ebenfalls orthogonal

(O3) $\langle A\vec{x}_1, A\vec{x}_2 \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle \quad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$

(O4) $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

(O5) $\sphericalangle(A\vec{x}_1, A\vec{x}_2) = \sphericalangle(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$

(O6) $\det(A) = \pm 1$

(O7) $A \cdot B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist orthogonal

Beweis

(O1/O2) A orth. $\Rightarrow A^TA = E \Rightarrow A^T = A^{-1} \Rightarrow$ (O1)

$\Rightarrow E = A \cdot A^{-1} = A \cdot A^T = (A^T)^T \cdot A^T \Rightarrow A^T$ orth. $\Rightarrow$ (O2)

(O3) $\langle A\vec{x}_1, A\vec{x}_2 \rangle = (A\vec{x}_1)^T A\vec{x}_2 = \vec{x}_1^{\,T} \underbrace{(A^TA)}_{E} \vec{x}_2 = \vec{x}_1^{\,T}\vec{x}_2 = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle$

(O4) $\|A\vec{x}\| = \sqrt{\langle A\vec{x}, A\vec{x}\rangle} \overset{(O3)}{=} \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle} = \|\vec{x}\|$

(O5) folgt aus (O3), (O4), da $\cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$

(O6) A orth. $\Rightarrow A^TA = E \Rightarrow 1 = \det(E) = \det(A^T \cdot A) = \det(A^T) \cdot \det(A)$

$\Rightarrow 1 = \det(A) \cdot \det(A) \Rightarrow \det(A) = \pm 1$

(O7) $(AB)^T \cdot AB = B^T \underbrace{A^TA}_{E} B = B^TB = E \Rightarrow AB$ orth.

$\blacksquare$

Satz: Die Menge $O(n) := \{ A \in \mathbb{R}^{(n,n)} \mid A^TA = E \}$ der orthogonalen Matrizen bildet eine Gruppe bzgl. der Matrizenmultiplikation.

Bew: Zeigen $O(n)$ ist UG von $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$, da jede orth. Matrix invertierbar ist.

(U1) $E \in O(n)$, da $E^TE = E$

(U2) $A, B \in O(n) \Rightarrow A \cdot B \in O(n)$ (O7)

(U3) $A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$ (O2)

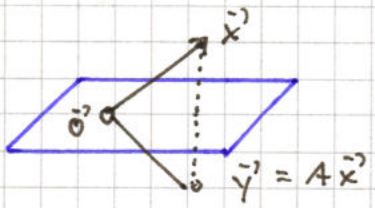
$\blacksquare$

Klassifikation $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

Die Abbildung $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto A\vec{x} = \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist

(a) Drehung $\Leftrightarrow$ A ist orthogonal und $\det(A) = +1$

(b) Spiegelung $\Leftrightarrow$ A ist orthogonal und $A^T = A$ $(\Rightarrow A^TA = AA = E)$

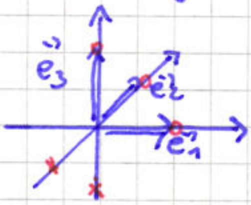


Spiegelebene durch $\vec{o}$

$A\vec{y} = \vec{x}$

(c) Ist A orth. und weder Drehung noch Spiegelung, so ist Abbildung **Drehspiegelung**. (Drehmatrix · Spiegelmatrix)

Bsp 1 $\vec{y} = A\vec{x}$ Spiegelung an $\Gamma = [\vec{e}_1]$ in $\mathbb{R}^3$



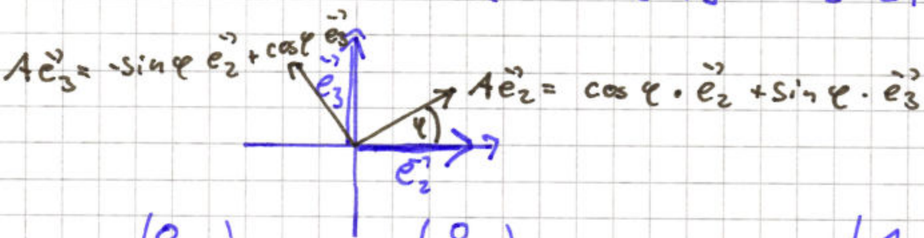
$A\vec{e}_1 = \vec{e}_1$, $A\vec{e}_2 = -\vec{e}_2$, $A\vec{e}_3 = -\vec{e}_3$ $\Rightarrow$ $A = (\vec{e}_1, -\vec{e}_2, -\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^T A = E$ $\Rightarrow$ A orthogonal, $\det(A) = +1$ $\Rightarrow$ $\vec{y} = A\vec{x}$ ist Drehung

Drehachse Γ, Drehebene $\Gamma' = [\vec{e}_2, \vec{e}_3]$, Drehwinkel $\varphi = 180° = \pi$

Bsp 2 $\vec{y} = A\vec{x}$ Drehung um $\Gamma = [\vec{e}_1]$ Winkel φ $n = 3$

$A\vec{e}_1 = \vec{e}_1$ Drehebene $\Gamma' = [\vec{e}_1]^\perp = [\vec{e}_2, \vec{e}_3]$



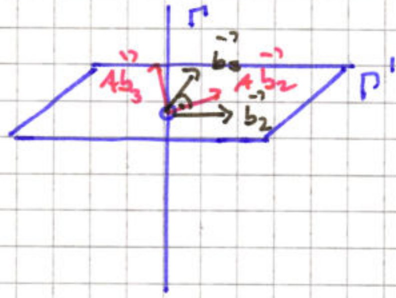
$A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$, $A\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

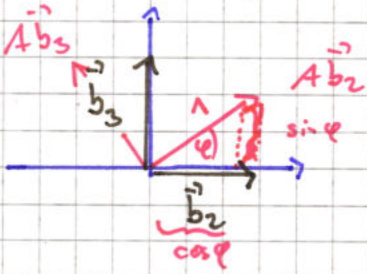
Bsp 3 Drehung $\vec{y} = A\vec{x}$ um Ursprungsgerade Γ, Winkel φ

1. Bestimmen Richtungsvektor $\vec{b}_1$ von Γ mit $\|\vec{b}_1\| = 1$ $\Gamma = [\vec{b}_1]$
2. Bestimmen ONB $\{\vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ der Drehebene $\Gamma' = \Gamma^\perp$

   $\Gamma' = [\vec{b}_2, \vec{b}_3] = [\vec{b}_1]^\perp$

   $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$





Dann gilt: $A\vec{b}_1 = \vec{b}_1$

$A\vec{b}_2 = \cos\varphi \cdot \vec{b}_2 + \sin\varphi \cdot \vec{b}_3$

$A\vec{b}_3 = -\sin\varphi\, \vec{b}_2 + \cos\varphi\, \vec{b}_3$

Matrix B ist orthogonal, da $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ONB $\Rightarrow B^T B = E$, $B^{-1} = B^T$

Wichtig: Wähle $\vec{b}_3$ so, dass $\det B = +1$ ($\vec{b}_3 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$)

$$\Rightarrow \quad AB = A(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = (A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, A\vec{b}_3)$$

$$= (\vec{b}_1, \cos\varphi\, \vec{b}_2 + \sin\varphi\, \vec{b}_3, -\sin\varphi\, \vec{b}_2 + \cos\varphi\, \vec{b}_3)$$

$$= (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= B\,D \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

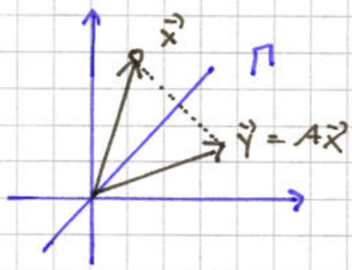
$\Rightarrow \quad \underline{A = B D B^T}$ $\qquad$ B = geordnete ONB, 1. Spalte Drehachse

D = Drehmatrix um $\vec{e}_1$ Winkel φ

(vgl. später Koordinatentransformation)

<u>Bsp 4</u> $\quad A = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} \quad A^T = A \quad A^T A = E \Rightarrow A$ orthogonal

$\Rightarrow \vec{y} = A\vec{x}$ ist Spiegelung an Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^2$



$\vec{x} \in \Gamma \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} - \vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow (A - E)\vec{x} = \vec{o}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} - E\right)\vec{x} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -32 & 8 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}\vec{x} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Gamma = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$$

Probe: $\quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 17 \\ 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

✓

(7.4.) Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer Matrizen

(1) Eigenwertgleichung (EWG)

<u>Geg:</u> $A \in K^{(n,n)}$

<u>Ges:</u> Lösungen $(\lambda, \vec{x})$ mit $\lambda \in K$, $\vec{x} \in K^n$ der EWG

$$\boxed{A\vec{x} = \lambda\vec{x}} \qquad \text{von } A$$

Für alle $\lambda \in K$ ist $\vec{x} = \vec{o}$ eine (triviale) Lsg der EWG. Ist $(\lambda, \vec{x})$ Lösung der EWG mit $\vec{x} \neq \vec{o}$ so heißt λ <u>Eigenwert</u> (EW) von A und $\vec{x}$ heißt <u>Eigenvektor</u> (EV) von A zum EW λ.

<u>Bsp:</u> Spiegelmatrix $A = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$ hat EW $\lambda = 1$ mit zugehörigen EV $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$.

<u>Bemerkung</u> Ist $L: V \to W$ eine lin. Abb. und gilt für ein $x \in V \setminus \{o_V\}$ und $\lambda \in K$: $L(x) = \lambda \cdot x$ so heißt x ebenfalls Eigenvektor von L zum EW λ.

(2) Bestimmung der EW von $A \in K^{(n,n)}$

$$\boxed{A\vec{x} = \lambda\vec{x}} \qquad \text{EWG}$$

$$\Updownarrow \quad A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{o}$$

$$\boxed{(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{o}} \qquad \text{homogenes LGS mit Parameter } \lambda \in K$$

<u>1. Fall</u> $\det(A - \lambda E) \neq 0 \Rightarrow$ nur triviale Lsg $\vec{x} = \vec{o} \Rightarrow \lambda$ kein EW

<u>2. Fall</u> $\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow$ es gibt Lsg $\vec{x} \neq \vec{o} \Rightarrow \lambda$ ist EW von A

Bsp1 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ $\quad (A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = (5-\lambda)(1-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = 3$ $\quad$ ($\lambda = 3$ ist 2-facher EW von A)

Bsp2 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)} \subseteq \mathbb{C}^{(2,2)}$ $\quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i$$

$\Rightarrow$ A hat komplexe EW $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$ aber keine reellen EW

Charakteristisches Polynom von $A \in K^{(n,n)}$

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

a) $P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0$

ist Polynom vom Grad n (<u>charakteristisches Polynom</u> von A)

mit $b_{n-1}, \dots, b_0 \in K$

b) λ ist EW von A $\Leftrightarrow$ $P(\lambda) = 0$ (Nullstelle)

c) Ist $K = \mathbb{C}$ dann hat A genau n EW (gezählt mit ihren Vielfachheiten als NS von $P(\lambda)$)

d) Ist $K = \mathbb{R}$ dann hat A $\leq n$ reelle EW

(3) EV von $A \in K^{(n,n)}$

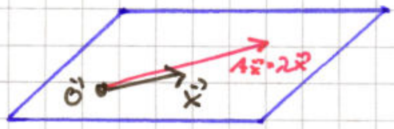
Betrachten einen EW $\lambda = \tilde{\lambda} \in K$ von A und die Lösungsmenge der EWG für $\lambda = \tilde{\lambda}$

$$E(A, \tilde{\lambda}) := \{ \vec{x} \in K^n \mid (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0} \}$$

Dann gilt

a) $\vec{x}$ ist EV von A zum EW $\lambda = \tilde{\lambda} \Leftrightarrow \vec{x} \in E(A, \tilde{\lambda}),\ \vec{x} \neq \vec{0}$

b) $E(A, \tilde{\lambda})$ ist lin. UR von K^n (<u>Eigenraum</u> von A zum EW $\tilde{\lambda}$)



$E(A, \tilde{\lambda})$

Lokal ist die Abbildung $\vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x}$ auf $E(A, \tilde{\lambda})$ eine Dilatation (Stauchung / Streckung) um Faktor $\tilde{\lambda}$.

c) Ist $\lambda = \tilde{\lambda}$ k-facher EV (k-fache NS von $P(\lambda)$)

so gilt:

$$1 \leq \dim\left(E(A, \tilde{\lambda})\right) \leq k$$

Man nennt k die <u>algebraische</u> und $\dim(E(A, \tilde{\lambda}))$ die <u>geometrische Vielfachheit</u> des EW $\lambda = \tilde{\lambda}$

<u>Bsp:</u> $\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad K = \mathbb{R}$

(a) charakteristische Matrix $\qquad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

(b) charakteristisches Polynom $\qquad P(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9$

(c) Nullstellen / Eigenwerte $\qquad \lambda = 3$

(d) $(A - \lambda E)\,\vec{x} = \vec{0}$ für $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Lösung } \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E(A, \lambda = 3) = \left\{ \vec{x} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\dim\left(E(A, \lambda = 3)\right) = 1$$

e) Der EW $\lambda = 3$ hat algebraische Vielfachheit 2 aber geometrische Vielfachheit 1

$av(A, 3) = 2, \quad gv(A, 3) = 1$

(7.5.) Quadratische Formen, Hauptachsentransformation

(1) Aufgabe:

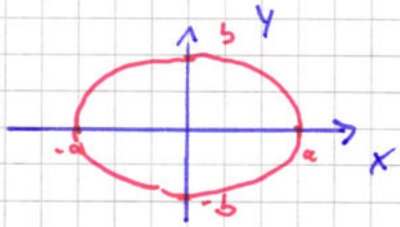
Wie sieht die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$6x^2 + 8xy + 6y^2 = 20$$

in der x-y-Ebene $\mathbb{R}^2$ aus?

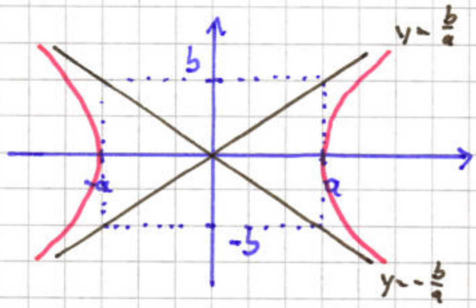
Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



(2) Quadratische Formen

Ein Ausdruck der Form

$$q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \vec{x}^T A \vec{x}$$

heißt quadratische Form in $\vec{x} = (x_1, .., x_n)^T$, wobei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^4$ eine symmetrische Matrix ist, d.h. $A^T = A$ bzw $a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j$

a) Fall $n = 2$ $\quad \vec{x} = \binom{x}{y}$

- $q(\vec{x}) = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix}$

$$= ax^2 + bxy + bxy + cy^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

- $q(\vec{x}) = 6x^2 + 8xy + 6y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) Spezialfall

Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine Diagonalmatrix, etwa $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

so gilt $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = \lambda_1 x_1^2 + \ldots \lambda_n x_n^2$

(3) Lineare Koordinatentransformation

Darstellung des Vektors (Punkts) $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ bzgl verschiedener Basen des $\mathbb{R}^n$

(a) Standardbasis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$

Dann gilt $\boxed{\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + \ldots + x_n \cdot \vec{e}_n}$

$x_1, \ldots, x_n$ sind Koordinaten von $\vec{x}$ bzgl der Standardbasis

(b) neue Basis $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$

Vektor $\vec{x}$ hat genau eine Darstellung der Form

$$\boxed{\vec{x} = u_1 \cdot \vec{b}_1 + \ldots + u_n \cdot \vec{b}_n}$$

$u_1, \ldots, u_n$ sind Koordinaten von $\vec{x}$ bzgl Basis $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$

$\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T$ Koordinatenvektor von $\vec{x}$ bzgl. Basis $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$

(c) Transformationsgleichung (Umrechnen zwischen $\vec{x}$ und $\vec{u}$)

Matrix $T = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ ist invertierbar und es gilt

$$\boxed{\vec{x} = T \cdot \vec{u}} \qquad (*)$$

Die Abbildung

$\vec{u} \in \mathbb{R}^n \mapsto \vec{x} = T \cdot \vec{u}$ ist linear und bijektiv

$$\vec{x} = T\vec{u} \iff u = T^{-1} \cdot \vec{x}$$

Man nennt $(*)$ eine <u>lineare Koordinatentransformation</u>

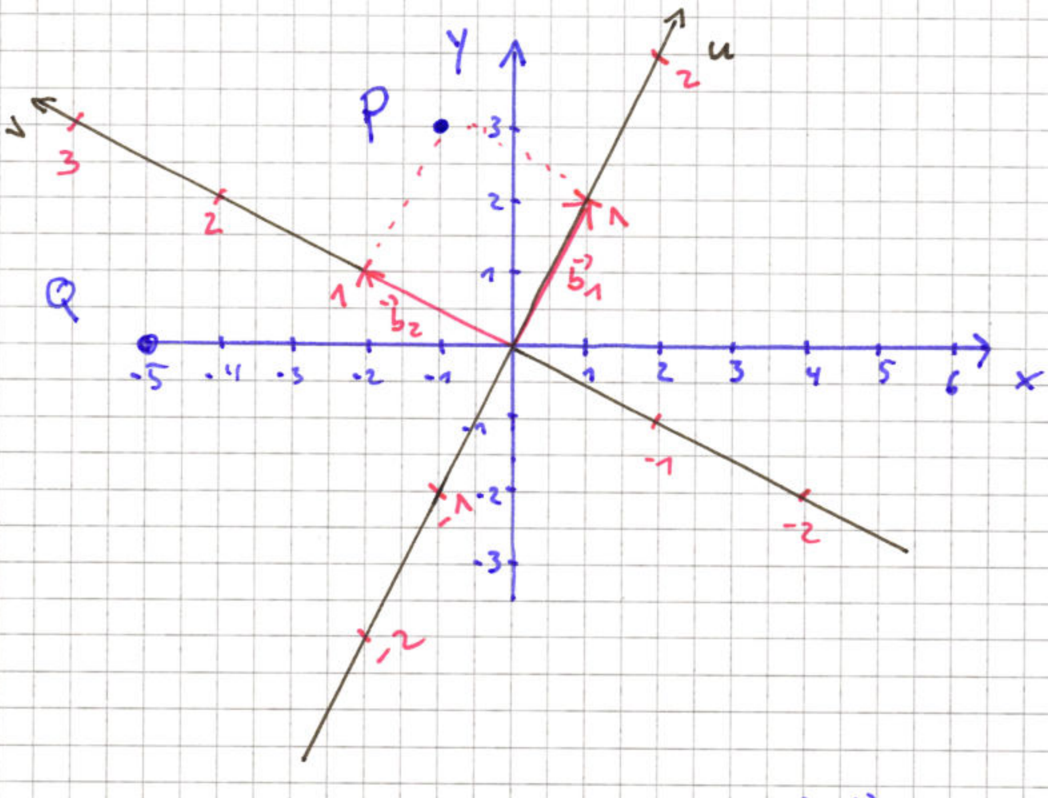
Beispiel

$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Transformationsgleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} x = u - 2v \\ y = 2u + v \end{matrix}$

Koordinatenvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$	Vektor (Punkt) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
$\vec{u} = \vec{o}$	$\vec{x} = \vec{o}$
$\vec{u} = \vec{e}_1$	$\vec{x} = \vec{b}_1$
$\vec{u} = \vec{e}_2$	$\vec{x} = \vec{b}_2$
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$



Punkt P hat x-y Koord. $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und u-v Koordinaten $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punkt Q mit x-y Koord $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat u-v Koord. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(4) Hauptachsentransformation

(a) Transformationsformel für quadratische Gleichungen

$$\boxed{\vec{x}^T A \vec{x} = d}$$

quadr. Gl. in $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$
$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symm. Matrix, $d \in \mathbb{R}$

Transformation $\boxed{\vec{x} = T\vec{u}}$
$T \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ invertierbar

$$\updownarrow$$

$$\boxed{\vec{u}^T (T^T A T) \vec{u} = d}$$

quadr. Gl. in $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$
$D := T^T A T \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist symm.

<u>Bew:</u>
- $\vec{x}^T A \vec{x} = (T\vec{u})^T A (T\vec{u}) = \vec{u}^T (T^T A T) \vec{u}$
- $(T^T A T)^T = T^T A^T (T^T)^T = T^T A T$

(b) Zielstellung

Geg: $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symm. Matrix

Ges: $T \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ derart dass gilt

(b1) T ist orthogonal $\Rightarrow T^T = T^{-1}$

(b2) $D = T^T A T$ ist Diagonalmatrix

<u>Bemerkung</u>
(b1) bewirkt: neues Koord.-syst. ist rechtwinklig
(b2) bewirkt: Lösungsmenge der Gleichung gut darstellbar

<u>Lösung</u>

Bestimmen falls möglich ONB $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ des $\mathbb{R}^n$ aus lauter EV von A. Ist $\vec{b}_i$ EV zum EW λ_i dann gilt

$$A\vec{b}_i = \lambda_i \vec{b}_i$$

und die Matrix $T = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ erfüllt (b1) und (b2)

$$D = T^T A T = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beweis

- T ist orthogonal, da Spalten von T eine ONB bilden
- $T^{-1}AT = D \Leftrightarrow AT = TD$

$$\Leftrightarrow A(\vec{b}_1,..,\vec{b}_n) = (\vec{b}_1,..,\vec{b}_n)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (A\vec{b}_1,...,A\vec{b}_n) = (\lambda_1\vec{b}_1,..,\lambda_n\vec{b}_n)$$

$$\Leftrightarrow A\vec{b}_i = \lambda_i\vec{b}_i \quad \forall i$$

$\Leftrightarrow$ $\vec{b}_i$ ist EV zu λ_i für alle i

(c) Satz (ohne Beweis)

Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gilt

(c1) Alle EW von A sind reell, d.h. A hat n reelle EW gezählt mit ihren algebraischen Vielfachheiten

(c2) EV zu verschiedenen EW sind stets orthogonal

(c3) Für jeden EW von A sind algebraische und geometrische Vielfachheit gleich

(c4) Es gibt eine ONB des $\mathbb{R}^n$, die aus lauter EV von A besteht

(5) Beispiele

Bsp1 $\qquad 6x^2 + 8xy + 6y^2 = 20$

Matrix-Vektor-Form: $(x,y)\cdot\begin{pmatrix}6 & 4\\4 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 20$

$A = \begin{pmatrix}6 & 4\\4 & 6\end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \qquad d = 20$

a) EW und EV von A bestimmen

- EWG $\quad A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (A-\lambda E)\vec{x} = \vec{0}$
- $A - \lambda E = \begin{pmatrix}6-\lambda & 4\\4 & 6-\lambda\end{pmatrix}$
- $P(\lambda) = \det(A-\lambda E) = (6-\lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 12\lambda + 20 \overset{!}{=} 0$
- EW von A $\quad \lambda_{1/2} = 6 \pm \sqrt{16} \qquad \lambda_1 = 10 \qquad \lambda_2 = 2$

- EV zu $\lambda_1 = 10$

$$(A - 10E)\,\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \iff \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$E(A, \lambda_1 = 10) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad \text{ONB} \qquad \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- EV zu $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2E)\,\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

$$E(A, \lambda_2 = 2) = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad \text{ONB} \qquad \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Transformationsmatrix $\quad T = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Koordinatentransformation $\quad \vec{x} = T\vec{u} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

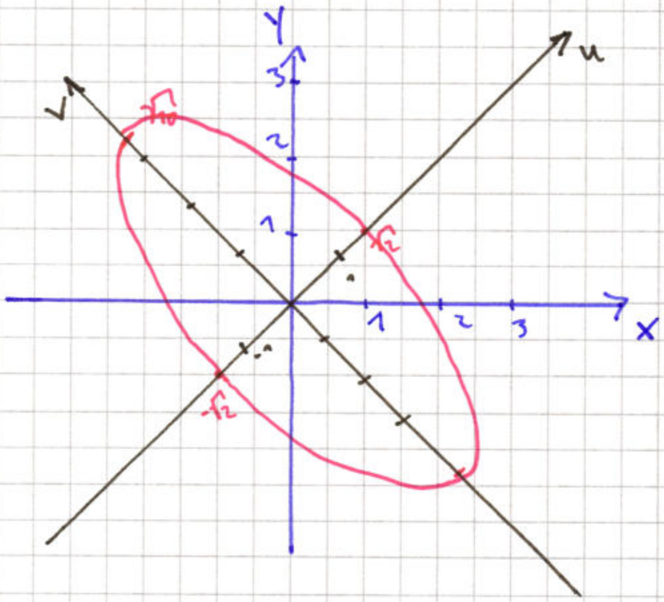
d) transformierte Gleichung

$$\vec{u}^T D\,\vec{u} = 20 \quad \text{mit} \quad D = T^T A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$10u^2 + 2v^2 = 20$$

$$\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{10} = 1$$

e) Skizze



Bsp 2 $\qquad 2x^2 + 12xy - 7 = 20$

- Matrix-Vektor Form : $(x\ y)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 20$

- char. Matrix $\quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 6 & -7-\lambda \end{pmatrix}$

- $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 6 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-7-\lambda) - 36 = \lambda^2 + 5\lambda - 50 \overset{!}{=} 0$

- EW $\quad \lambda_{1/2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{15}{2} \qquad \lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = -10$

- EV zu $\lambda_1 = 5$

  $(A - 5E)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}\vec{x} = \vec{0} \iff \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$

  $E(A,5) = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \qquad$ ONB: $\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- EV zu $\lambda_2 = -10$

  $\vec{b}_2 \perp \vec{b}_1 \implies \vec{b}_2 = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad$ Probe $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \end{pmatrix} = -10\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

  ONB : $\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Transformationsmatrix $\quad T = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Koordinatentransformation

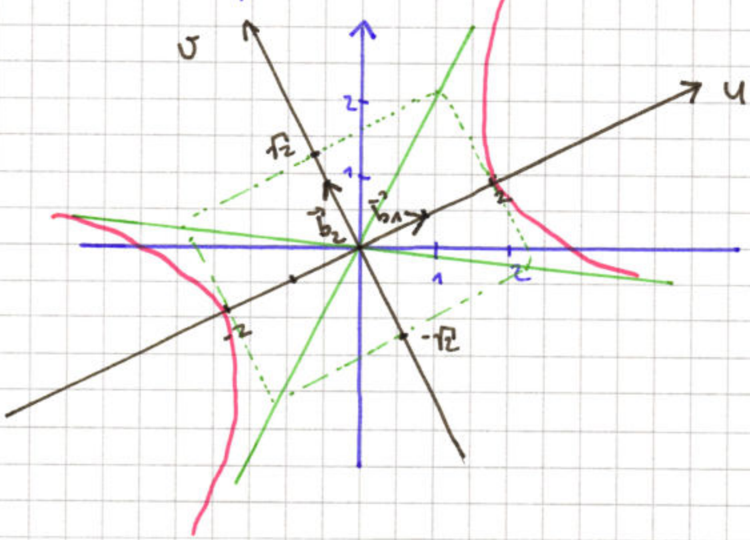
  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- transformierte Gleichung

  $\vec{x}^T A \vec{y} = \vec{u}^T T^T A T \vec{u} = \vec{u}^T D \vec{u} = (u, v)\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 20$

$$5u^2 - 10v^2 = 20$$

$$\frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{2} = 1$$



Bsp3

$$7x^2 + 13y^2 + 6\sqrt{3}\,xy - 12(\sqrt{3}+4)x - 12(4\sqrt{3}-1)y = -164$$

- Matrix-Vektor Schreibweise

$$(x,y)\begin{pmatrix} 7 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(-12(\sqrt{3}+4), -12(4\sqrt{3}-1)\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -164$$

$$\vec{x}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} = d$$

- EV und EV von A

- $$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 13-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 91 - 27 = \lambda^2 - 20\lambda + 64 \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1/2} = 10 \pm \sqrt{100-64} \qquad \lambda_1 = 16 \qquad \lambda_2 = 4$$

- EV zu $\lambda_1 = 16$ $\qquad (A - 16E)\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -9 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\vec{x} = \vec{0} \iff \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

- $\vec{b}_2 \perp \vec{b}_1 \Rightarrow \vec{b}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Probe: $A \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow T = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

- Transformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
- transformierte Gleichung

$$(u\,v)T^T A T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \vec{b}^T T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = d$$

$$(u\,v)\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + (-12)\cdot(\sqrt{3}+4, 4\sqrt{3}-1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -164$$

$$16u^2 + 4v^2 - 6\,(16, -4)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -164$$

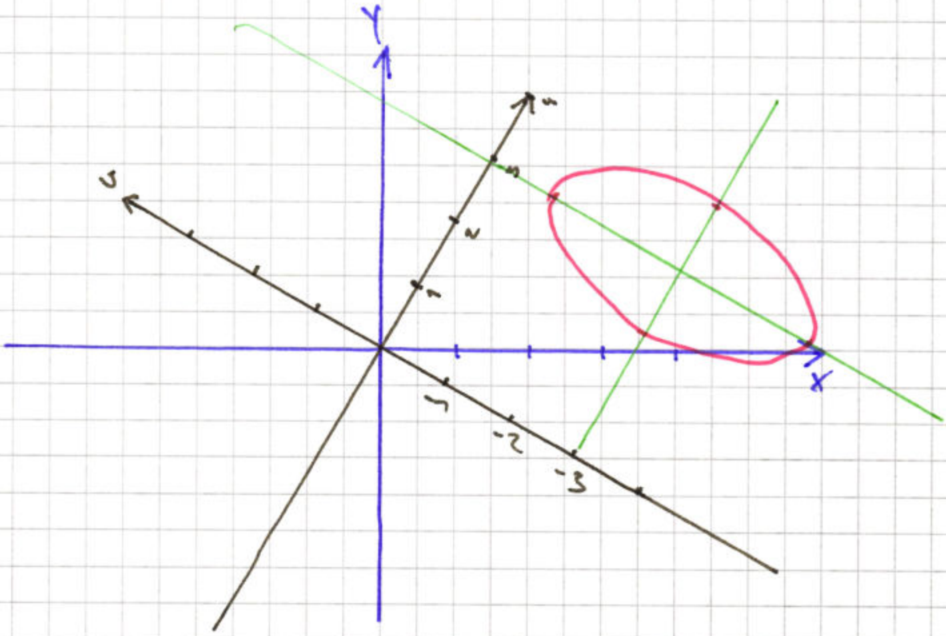
$$16u^2 + 4v^2 - 96u + 24v = -164$$

$$16(u^2 - 6u) + 4(v^2 + 6v) = -164)$$

$$16(u^2 - 6u + 9) + 4(v^2 + 6v + 9) = -164 + 144 + 36$$

$$16(u-3)^2 + 4(v+3)^2 = 16$$

$$\frac{(u-3)^2}{1^2} + \frac{(v+3)^2}{2^2} = 1$$


Y
X
u
v
1
2
3
-1
-2
-3

(7.6) Affine Abbildungen $K^m \to K^n$

(1) Definition

$F: K^n \to K^m$ wird affine Abbildung genannt, falls für alle $\vec{x} \in K^n$ gilt

$$F(\vec{x}) = M\vec{x} + \vec{b}$$

mit $M \in K^{(m,n)}$ und $\vec{b} \in K^m$

Spezialfälle

- $M = E$, $m = n$: $\quad F(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{b}$ (Verschiebung, Translation)
- $\vec{b} = \vec{0}$ $\quad F(\vec{x}) = M\vec{x}$ (lineare Abbildung)
- $M \in O(n)$ $\quad F$ ist Bewegung

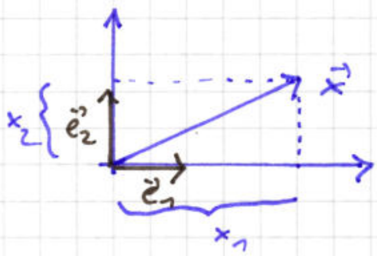
$$\begin{tikzcd}
\vec{x} \in K^n \arrow[r, "\text{lin. Abb.}"'] \arrow[rr, bend right, "\text{affine Abbildung}"'] & M\vec{x} \in K^m \arrow[r, mapsto, "\text{Verschiebung}"'] & M\vec{x} + \vec{b} \in K^m
\end{tikzcd}$$

(2) Affine Koordinatentransformation im $\mathbb{R}^n$

- affines Koordinatensystem = (Punkt; Basis des $\mathbb{R}^n$)
- Punkt (Vektor) $\quad \vec{x} = (x_1, .., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

a) Standardsystem $(\vec{0}; \vec{e}_1, .., \vec{e}_n)$

$$\boxed{\vec{x} = \vec{0} + x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n}$$



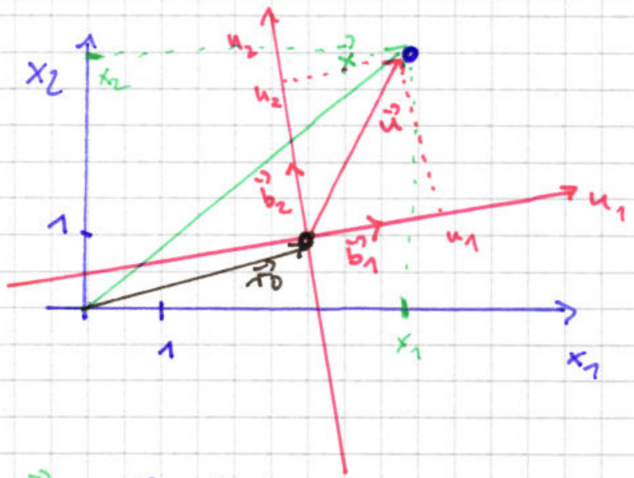
b) neues Koordinatensystem $(\vec{r}_0, \vec{b}_1, .., \vec{b}_n)$

$$\boxed{\vec{x} = \vec{r}_0 + u_1\vec{b}_1 + \ldots + u_n\vec{b}_n}$$

$\vec{u} = (u_1, .., u_n)^T$ affiner Koordinatenvektor von $\vec{x}$ bzgl. $(\vec{r}_0; \vec{b}_1, .., \vec{b}_n)$

c) Transformation

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{x} = \vec{r}_0 + T\,\vec{u} & T = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) \in \mathbb{R}^{(n,n)} \\ \vec{u} = T^{-1}(\vec{x} - \vec{r}_0) & (T \text{ invertierbar}) \end{array}}$$



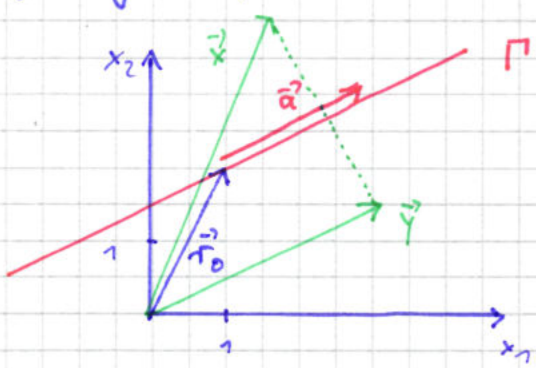
$\vec{x} = \vec{r}_0 + T\vec{u}$

$\vec{u} = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{r}_0$

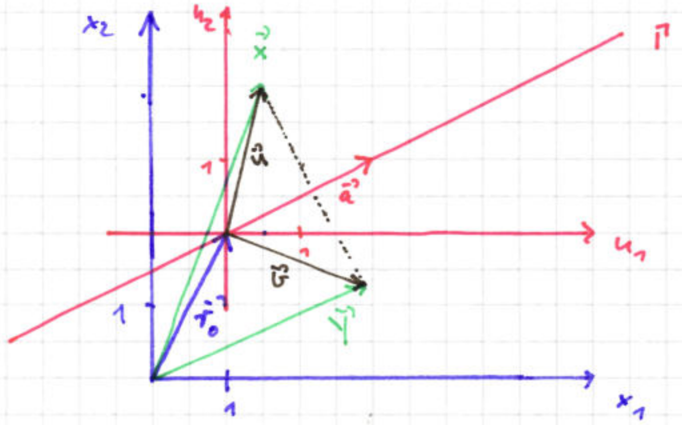
(3) Beispiel: Spiegelung im $\mathbb{R}^2$ an Geraden

Geg: $\Gamma = \vec{r}_0 + [\vec{a}]$ $\quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ges: Spiegelung $\vec{y} = F(\vec{x})$ $\quad \vec{x}, \vec{y}$ im Standardsystem



Lösung 1 (besonders einfache Koordinatentransformation)



$\vec{u}, \vec{v}$ seien Koordinatenvektoren von $\vec{x}, \vec{y}$ in $(\vec{r}_0; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$\Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{r}_0 + \vec{u} \qquad \vec{u} = \vec{x} - \vec{r}_0$

$\quad\quad \vec{y} = \vec{r}_0 + \vec{v} \qquad \vec{v} = \vec{y} - \vec{r}_0 \qquad T = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = E$

Abbildung $\vec{u} \mapsto \vec{v}$ ist Spiegelung an Ursprungsgeraden $[\vec{a}]$ also $\vec{v} = M \cdot \vec{u}$ und es gilt:

$M\,\vec{a} = \vec{a} \qquad M\,\vec{b} = -\vec{b} \qquad$ für $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \vec{a}$

$\Rightarrow \quad M(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, -\vec{b})$

$\Rightarrow \quad M = (\vec{a}, -\vec{b}) \cdot (\vec{a}, \vec{b})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Damit gilt

$\vec{v} = M\,\vec{u} \qquad \vec{v} = \vec{y} - \vec{r}_0 \qquad \vec{u} = \vec{x} - \vec{r}_0$

$\vec{y} - \vec{r}_0 = M(\vec{x} - \vec{r}_0)$

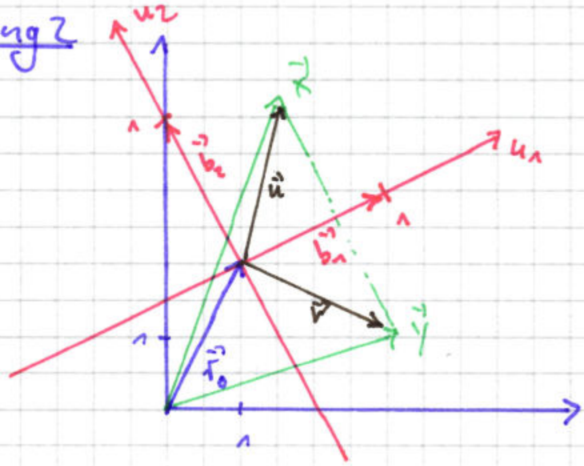
$\vec{y} = M(\vec{x} - \vec{r}_0) + \vec{r}_0$

$\vec{y} = M\vec{x} + \underbrace{\vec{r}_0 - M\vec{r}_0}_{\vec{b}} \qquad \vec{b} = \vec{r}_0 - M\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\qquad = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{\vec{y} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \vec{x} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}}}$$

Lösung 2



neues Koordinatensystem $(\vec{r}_0; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$

mit $\vec{b}_1 = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b}_2 \perp \vec{b}_1$

$\vec{u}$ Koordinatenvektor von $\vec{x}$ bzgl. $(\vec{r}_0; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$

$\vec{v}$ " " $\vec{y}$ " "

$$\vec{x} = \vec{r}_0 + T\vec{u} \qquad \vec{u} = T^{-1}(\vec{x} - \vec{r}_0)$$

$$\vec{y} = \vec{r}_0 + T\vec{v} \qquad \vec{v} = T^{-1}(\vec{y} - \vec{r}_0)$$

$$T = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Im neuen Koord.-system Spiegelung an u_1-Achse

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad T^{-1}(\vec{y} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1}(\vec{x} - \vec{r}_0)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{y} - \vec{r}_0 = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1}(\vec{x} - \vec{r}_0)$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}(\vec{x} - \vec{r}_0) + \vec{r}_0$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}(\vec{x} - \vec{r}_0) + \vec{r}_0$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\vec{x} + \left(-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + E\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\vec{y} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\vec{x} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}}}$$

(7.7) PageRank

Geg: Link-Struktur von html-Seiten als gerichteter Graph. $G = (V, E)$ $\quad (i,j) \in E \Leftrightarrow \exists$ Link von Seite i zu Seite j

Ges: Bewertungsfunktion für die Wichtigkeit einer Seite

Idee: Seite ist umso wichtiger, je mehr wichtige Seiten auf sie verlinken

Formalisierung:

$V = \{1, \dots, n\}$ Menge der Seiten

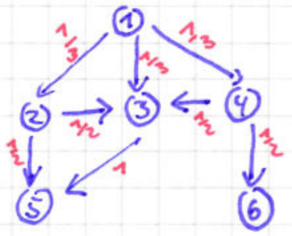
PR_j = PageRank der Seite $j \in V$ $\qquad \vec{PR} = \begin{pmatrix} PR_1 \\ \vdots \\ PR_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$PR_j = \frac{1-d}{n} + d \sum_{\substack{i \in V \\ ij \in E}} \frac{1}{d_G(i)} \cdot PR_i$$

Gesucht: Lösung mit $\sum PR_j = 1$

d = Dämpfungsterm $\qquad$ Original $d = 0{,}85$

Bsp:



G

Adjazenzmatrix

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M := \frac{1-d}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spalten ersetzen durch $\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für die Lösung gilt dann $\quad \vec{PR} = M \cdot \vec{PR} \quad$ Eigenwertgleichung

Transponierte der Google-Matrix

$$\vec{PR} \approx \begin{pmatrix} 0{,}09 \\ 0{,}12 \\ 0{,}21 \\ 0{,}12 \\ 0{,}32 \\ 0{,}14 \end{pmatrix}$$

- Interpretationsmöglichkeit: Zufallssurfer-Modell
  Surfer startet irgendwo und folgt in jeder Runde mit Wsk d einem der ausgehenden Links und mit Wsk $1-d$ geht er zu irgendeiner Seite
- PR_j = Wsk, dass der Surfer nach m Runden auf Seite j ist (für $m \to \infty$)

- Gleichung kann analytisch gelöst werden oder iterativ

$$\vec{PR}(t+1) := M \cdot \vec{PR}(t)$$

konvergiert für beliebige Startvektoren

(kleines Problem, wenn der Graph Senken enthält)
siehe grüne Korrektur

Kapitel IV: Funktionen in mehreren Variablen, Differentiation

1 Grundbegriffe

(1.1) Funktionen aus $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$

(1) Definition

Eine Funktion f aus $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt durch

(a) $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ Definitionsbereich

(b) eine eindeutige Zuordnungsvorschrift

$$\underline{x} = (x_1, .., x_n) \in D_f \longmapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$$

Argumente von f — Funktionswert von f an der Stelle $\underline{x}$

(2) Darstellung von f

(a) Graph von f

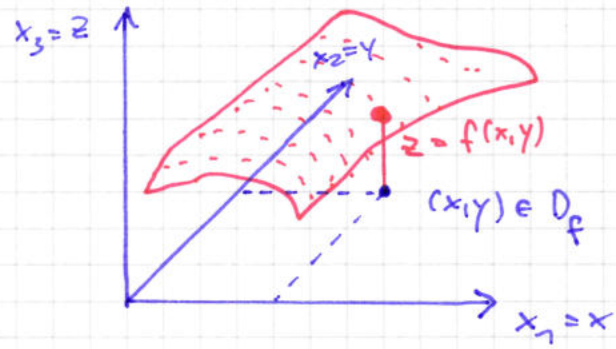
$$\text{graph}(f) := \{ (\underline{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \underline{x} \in D_f,\ x_{n+1} = f(\underline{x}) \}$$

$$x_{n+1} = f(x_1, .., x_n)$$

abhängige Variable — unabhängige Variablen

$(n=1)$ $\quad \text{graph}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad$ Spur der Kurve $\quad y = f(x)$

$(n=2)$ $\quad \text{graph}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad$ Fläche im $\mathbb{R}^3$ $\quad z = f(x,y)$



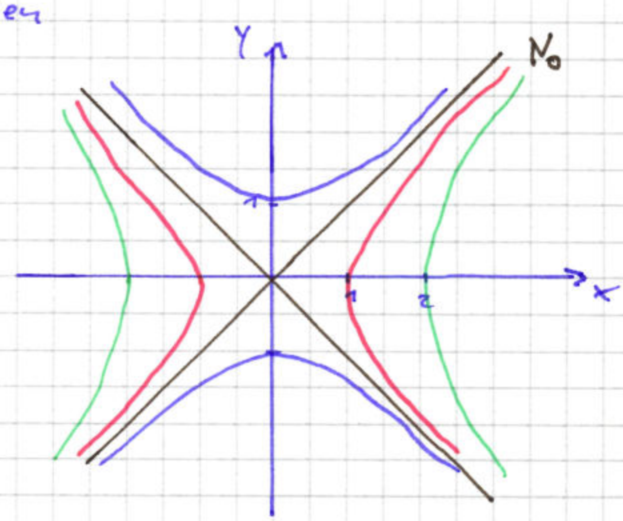
(b) Niveaumengen von f

$N_c(f) := \{ \underline{x} \in D_f \mid f(\underline{x}) = c \}$ $c \in \mathbb{R}$ Konstante $N_c(f) \subseteq \mathbb{R}^n$

Bsp: $n = 2$ $N_c(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ Höhenlinien

- $f(x,y) = x^2 - y^2$
- $f(x,y) = c \Leftrightarrow x^2 - y^2 = c \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - c}$

Hyperbeln



$N_0(f) = \{ (x,y) \mid y = \pm x \}$

$N_1(f) = \{ (x,y) \mid x^2 - y^2 = 1 \}$

$N_4(f) = \{ (x,y) \mid \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \}$

$N_{-1}(f) = \{ (x,y) \mid y^2 - x^2 = 1 \}$

(c) Schnittkurven von f

Funktion $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

Punkt $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$

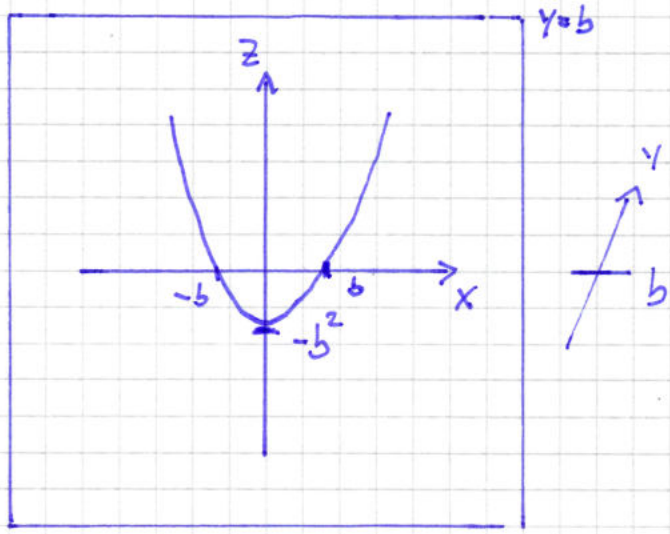
Schnittkurve von f im Punkt $\underline{a}$ in x_i-Richtung

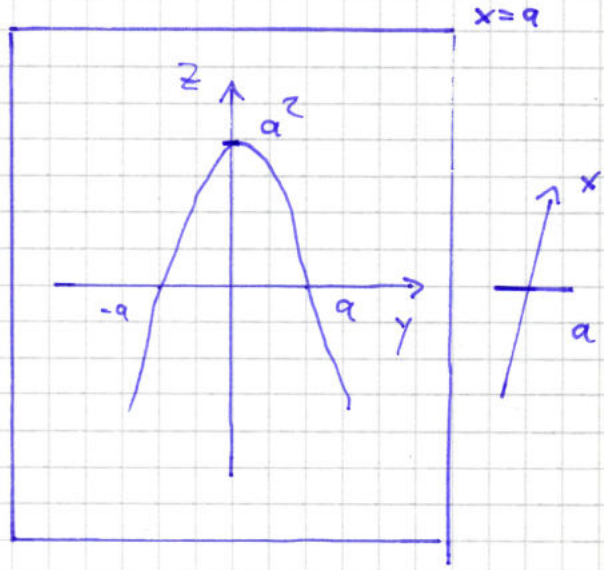
$x_i \in D' \subseteq \mathbb{R} \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$

Beispiel $(n = 2)$ $f(x,y) = x^2 - y^2$ $D = \mathbb{R}^2$ $\underline{a} = (a, b)$

Schnittkurve in x-Richtung

$x \in \mathbb{R} \mapsto z = f(x, b) = x^2 - b^2$

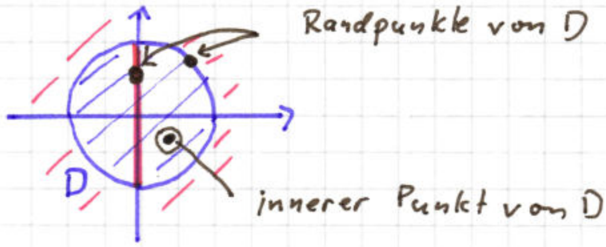




(1.2) Punktmengen des $\mathbb{R}^n$

(1) Bsp $(n=2)$ $\quad f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x} \quad D_f \subseteq \mathbb{R}^2$

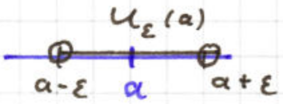
$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \ , \ x \neq 0\}$$



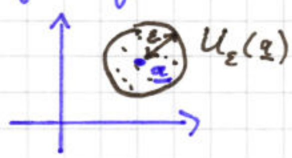
(2) Abstand ε-Umgebung

- $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \quad \underline{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$
- $\| \underline{a} - \underline{b} \| := \sqrt{(a_1-b_1)^2 + \dots + (a_n-b_n)^2}$ euklidischer Abstand
- $U_\varepsilon(\underline{a}) := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \varepsilon \}$ (offene) ε-Umgebung von $\underline{a}$

$n=1$



$n=2$



(3) Definitionen

(a) $\underline{a}$ heißt <u>innerer Punkt</u> von D, falls es eine ε-Umgebung von $\underline{a}$ gibt, die nur Punkte aus D enthält. Insbesondere muss $\underline{a} \in D$ sein. $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\underline{a}) \subseteq D$

b) $\underline{a}$ heißt <u>Randpunkt</u> von D, falls jede ε-Umgebung von $\underline{a}$ sowohl Punkte aus D als auch Punkte aus $\mathbb{R}^n \setminus D$ enthält
$\forall \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(\underline{a}) \cap D \neq \emptyset \ \wedge \ U_\varepsilon(\underline{a}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus D) \neq \emptyset$

c) ∂D : Menge aller Randpunkte von D (<u>Rand</u> von D) auch $bd(D)$

d) $int(D)$ Menge aller inneren Punkte von D (<u>Inneres</u> von D)

e) D heißt <u>offen</u>, falls D keine Randpunkte von D enthält, d.h. $\partial D \cap D = \emptyset$

f) D heißt <u>abgeschlossen</u>, falls D alle seine Randpunkte enthält, d.h. $\partial D \subseteq D$

g) $\underline{a}$ heißt <u>Häufungspunkt</u> von D, falls jede ε-Umgebung von $\underline{a}$ unendlich viele Punkte aus D enthält

Bemerkung

D offen $\Leftrightarrow$ $\partial D \cap D = \emptyset$ $\Leftrightarrow$ $D = \mathrm{int}(D)$

D abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\partial D \subseteq D$ $\Leftrightarrow$ $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Häufungspunkte von } D}}{hp(D)} \subseteq D$ $\Leftrightarrow$ $\underset{\substack{\uparrow \\ = \mathbb{R}^n \setminus D}}{\bar{D}}$ ist abgeschlossen

Komplement von D

Beispiele

(a) $D = (1,3) \subseteq \mathbb{R}$ Intervall $\partial D = \{1,3\}$ $D \cap \partial D = \emptyset \Rightarrow$ offen

(b) $D = \mathbb{R}^2$ $\partial D = \emptyset$ keine Randpunkte

$\Rightarrow$ $D \cap \partial D = \emptyset$ $\Rightarrow$ D offen

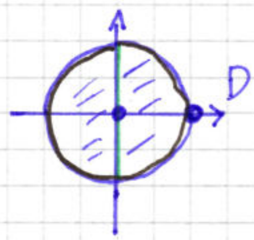
$\partial D \subseteq D$ $\Rightarrow$ D auch abgeschlossen

$D = \emptyset$ $\Rightarrow$ $\partial D = \emptyset$ offen und abgeschlossen

Beobachtung D offen und abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\partial D = \emptyset$

(c) $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ x \neq 0\}$

$\partial D = \{\underline{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1}\} \cup \{\underline{(x,y) \mid x=0\ \ -1<y<1}\}$



- $D \cap \partial D \neq \emptyset$ z.B. $(1,0) \in D \cap \partial D$ $\Rightarrow$ D nicht offen
- $\partial D \not\subseteq D$ z.B. $(0,0) \in \partial D \setminus D$ $\Rightarrow$ D nicht abgeschlossen

2. Grenzwerte und Stetigkeit

(2.1) Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$

Punktfolge $\quad k \in \mathbb{N} \mapsto \underline{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $\quad \underline{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$

Punkt $\quad \underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

(1) Grenzwert von $\underline{x}^{(k)}$

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{a} \quad \underset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{k\to\infty} \| \underline{x}^{(k)} - \underline{a} \| = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

(2) Beispiele $\quad n = 2$

- $\underline{x}^{(k)} = \Big(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}_{\to e}, \underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0} \Big) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)} = (e, 0) \in \mathbb{R}^2$

- $\underline{x}^{(k)} = \Big(\underbrace{1 + \frac{1}{k}}_{\to 1}, \underbrace{k}_{\to\infty} \Big) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)} = (1, \infty) \notin \mathbb{R}^2$

(2.2) Grenzwert von Funktionen, Stetigkeit

Gegeben

- Funktion f aus $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, $\quad D = D_f \subseteq \mathbb{R}^n$
- Punkt $\quad \underline{a} \in D \cup \partial D$

(1) Definition : $\quad g \in \mathbb{R}$ oder $g = \pm\infty$

(a) $\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = g$, falls für alle Punktfolgen $\underline{x}^{(k)}$ mit $\underline{x}^{(k)} \neq \underline{a}$ aus D und $\lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{a}$ gilt $\lim_{k\to\infty} f(\underline{x}^{(k)}) = g$

(b) f heißt stetig in $\underline{a}$, falls gilt $\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$

c) f heißt stetig auf D, falls für alle $\underline{a} \in D$ gilt f ist stetig in $\underline{a}$

Bemerkung $\quad$ Genau wie im 1-Variablen-Fall können Grenzwerte auf äquivalente Weise durch ε-δ Definition erklärt werden

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = g \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \| \underline{x} - \underline{a} \| < \delta \Rightarrow |f(\underline{x}) - g| < \varepsilon$$

(2) Satz

Für Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen aus $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ gelten die analogen Regeln wie für Funktionen aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Insbesondere sind Summe, Differenz, Quotient, Produkt, Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig.

(3) Beispiele $(n=2)$

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad D = D_f = \mathbb{R}^2$

- Projektionsfunktionen p_1, p_2 mit $p_1(x,y) = x$, $p_2(x,y) = y$ sind stetig
- $g(t) = t^2$ $\quad$ g stetig für alle t

$\Rightarrow h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = g(p_1(x,y)) + g(p_2(x,y)) = x^2+y^2$ stetig $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

- $k(z) = \sqrt{z}$ $\quad$ k stetig für alle $z \geq 0$

$\Rightarrow f(x,y) = k(h(x,y))$ $\quad$ f stetig $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ da $h(x,y) \geq 0$

b) $f(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\quad \partial D_f = \{(0,0)\}$

- f stetig auf D_f
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \, ?$ $\quad$ „$\frac{0}{0}$"

$$\underline{x}^{(k)} = \left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0) \qquad f(\underline{x}^{(k)}) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2}$$

$$\underline{x}^{(k)} = \left(\tfrac{1}{k}, -\tfrac{1}{k}\right) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0) \qquad f(\underline{x}^{(k)}) = \frac{-\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{k\to\infty} -\frac{1}{2}$$

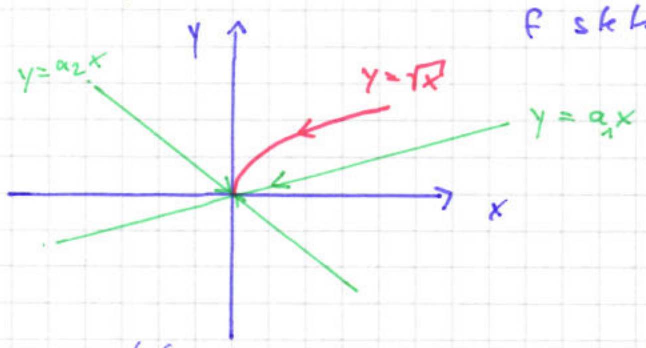
$\Rightarrow \lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} f(\underline{x})$ existiert nicht

- $f(x, y=ax) = \dfrac{ax^2}{x^2+a^2x^2} = \dfrac{a}{1+a^2}$

$\Rightarrow$ Die Gerade $y = ax$ gehört zur Niveaumenge $N_c(f)$ für $c = \frac{a}{1+a^2}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x y^2}{x^2+y^4} = ?$ $\qquad f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

f stetig für $(x,y) \neq (0,0)$



1) Punktfolge entlang y-Achse $(x=0)$

$$\lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y^2}{0+y^4} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

2) Punktfolge entlang Geraden $y = ax$

$$\lim_{x\to 0} f(x, ax) = \lim_{x\to 0} \frac{a^2x^3}{x^2+a^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{a^2x}{1+a^4x^2} = \frac{0}{1} = 0$$

3) Punktfolge entlang $y = \sqrt{x}$

$$\lim_{x\to +0} f(x, \sqrt{x}) = \lim_{x\to +0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to +0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Grenzwert existiert nicht

d) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ stetig auf $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

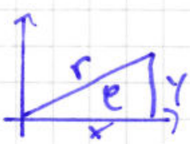
y-Achse: $f(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0 \xrightarrow{y\to 0} 0$

$y=ax$ $\qquad f(x, ax) = \frac{a^2x^4}{x^2+a^2x^2} = \frac{a^2x^2}{1+a^2} \xrightarrow{x\to 0} \frac{0}{1+a^2} = 0$

$y=\sqrt{x}$ $\qquad f(x,\sqrt{x}) = \frac{x^3}{x^2+x} = \frac{x^2}{1+x} \xrightarrow{x\to 0} \frac{0}{1} = 0$

$\Rightarrow$ nichts

Lösung: Polarkoordinaten



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$(x,y) \to (0,0) \iff r \to 0 \quad \varphi$ egal

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^2\cos^2\varphi \cdot r^2\sin^2\varphi}{r^2} = r^2 \underbrace{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}_{\text{beschränkt}} \xrightarrow{r\to 0} 0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

3. Ableitung, Gradient, Differential

(3.1.) Partielle Ableitung, Gradient

Gegeben

- Fkt $\underline{x} = (x_1, .., x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$
- Pkt $\underline{a} = (a_1, .., a_n) \in D$

(1) Partielle Ableitungen

Definition:

Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$ von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$ nach x_i ist die Ableitung der Funktion

$$x_i \in D' \subseteq \mathbb{R} \mapsto f(a_1, .., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, .., a_n) \in \mathbb{R}$$

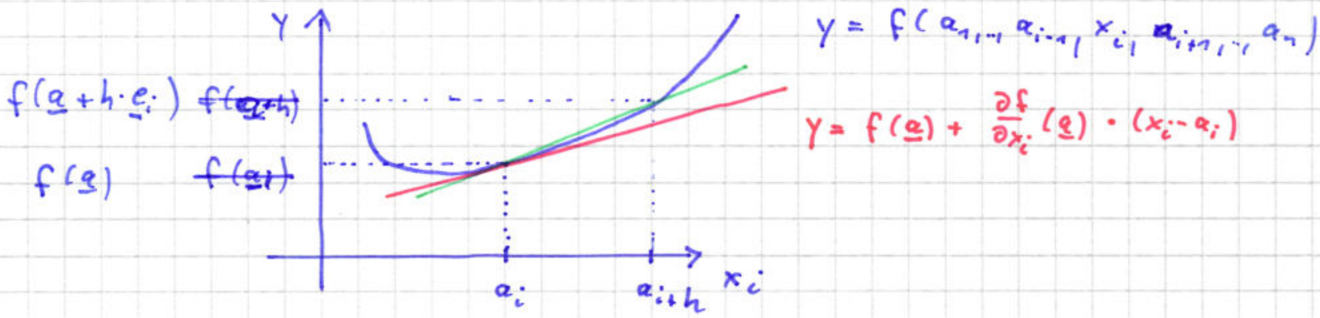
nach x_i an der Stelle $x_i = a_i$, d.h.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{a} + h \cdot \underline{e}_i) - f(\underline{a})}{h}}$$

sofern der GW existiert und endlich ist

Geometrische Interpretation

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$ ist der Anstieg der Tangenten an die Schnittkurve von f in x_i-Richtung im Punkt $\underline{x} = \underline{a}$.



Linearer Zuwachs von f in Punkt $\underline{x} = \underline{a}$ in x_i-Richtung

Für sehr kleine Werte von h gilt näherungsweise

$$f(\underline{a} + h \cdot \underline{e}_i) \approx f(\underline{a}) + h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$$

Somit beschreibt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$ den linearen Zuwachs von f im Punkt $\underline{x} = \underline{a}$ in x_i-Richtung.

Definition

Man nennt $\operatorname{grad} f(\underline{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a}) \right)$

den Gradienten von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$. Die Fkt. f heißt stetig differenzierbar auf der Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, falls für alle Punkte $\underline{x} \in D$ die partiellen Ableitungen nach sämtlichen Variablen x_i an der Stelle $\underline{x}$ existieren und dort stetig sind.

Bemerkungen

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$ wird wie normale Ableitung von f nach x_i gebildet, wobei alle $x_j \neq x_i$ wie Konstanten behandelt werden
- Für partielle Ableitungen von f nach x_i gelten die üblichen Regeln

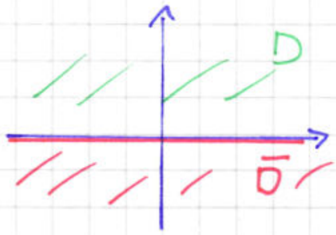
$$\frac{\partial(f \pm g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \pm \frac{\partial g}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial(c \cdot f)}{\partial x_i} = c \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (c \in \mathbb{R} \text{ konstant}) \qquad \text{usw.}$$

- statt $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ schreibt man auch f_{x_i}
- In der Physik wird der Gradient meist als Spaltenvektor der partiellen Ableitungen definiert und mit ∇f abgekürzt (∇: Nabla)

$$\nabla f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\underline{a}) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\underline{a}) \end{pmatrix}$$

Bsp 1 ($n=2$)



- $f(x,y) = x^2\sqrt{y}$ $\qquad D = \{(x,y) \mid y > 0\}$
- $\underline{a} = (2,4)$
- $f(x,4) = 2x^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2,4) = \frac{d(2x^2)}{dx}\Big|_{x=2} = 4x\Big|_{x=2} = 8$

  $f(2,y) = 4\sqrt{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,4) = \frac{d(4\sqrt{y})}{dy}\Big|_{y=4} = \frac{2}{\sqrt{y}}\Big|_{y=4} = 1$

  $\Rightarrow \operatorname{grad} f(2,4) = (8,1)$
- $f_x(x,y) = 2x\sqrt{y}, \quad f_y(x,y) = \frac{x^2}{2\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y) = \left(2x\sqrt{y}, \frac{x^2}{2\sqrt{y}}\right)$
- f stetig diff'bar auf D

Bsp2

- $h(x_1,\dots,x_n) = m_1(x_1-a_1) + \dots + m_n(x_n-a_n) + b \qquad D = D_h = \mathbb{R}^n$
- $x_{n+1} = h(x_1,\dots,x_n)$ ist Gleichung einer Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$

  Normalenvektor $(m_1,\dots,m_n,-1)^T$, $(a_1,\dots,a_n,b)^T \in$ Ebene

  $n=1$ Gerade im $\mathbb{R}^2$, $n=2$ Ebene im $\mathbb{R}^3$
- $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = m_i$

(2) Tangentialraum von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$

Der Tangentialraum ist die Hyperebene $x_{n+1} = h(x_1,\dots,x_n)$ mit $h(\underline{a}) = f(\underline{a})$ und Anstieg m_i in x_i-Richtung wie bei f in $\underline{x} = \underline{a}$ also $m_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$

Gleichung des Tangentialraumes

$$\boxed{x_{n+1} = f(\underline{a}) + f_{x_1}(\underline{a})(x_1-a_1) + \dots + f_{x_n}(\underline{a})(x_n-a_n)}$$

Spezialfälle $\quad n=1$ Tangente $\quad n=2$ Tangentialebene

Bsp: $n=2$

- $f(x,y) = x^2\sqrt{y} \qquad \underline{a} = (2,4)$
- $f(2,4) = 8 \qquad f_x(2,4) = 8 \qquad f_y(2,4) = 1$
- Tangentialebene von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$

$$z = f(\underline{a}) + f_x(\underline{a})(x-a_1) + f_y(\underline{a})(y-a_2)$$

$$z = 8 + 8(x-2) + 1(y-4)$$

$$z = 8x + y - 12$$

Merke:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \rightarrow \quad z = f(x_0,y_0) + \operatorname{grad} f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

Tangente $(n=1)$ an den Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$

Tangentialebene $(n=2)$ an den Graphen von f in $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ $(n=2)$

$\downarrow$

$$x_{n+1} = f(\underline{a}) + \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot (\underline{x}-\underline{a})^T$$

Tangentialraum von f durch $(\underline{a}, f(\underline{a}))$

(3) Richtungsableitung von f

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{a} + h \cdot \underline{v}_0) - f(\underline{a})}{h}$$

heißt, falls der GW existiert und endlich ist, Richtungsableitung von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$ in Richtung $\underline{v}$ mit $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ $\underline{v} \neq \underline{0}$. Dabei ist $\underline{v}_0 = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v}$ der Einheitsvektor in Richtung $\underline{v}$

Bemerkung

- $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a})$ = Anstieg von f im Punkt $\underline{a}$ in $\underline{v}$-Richtung
- $\underline{v} = \underline{e}_i \Rightarrow \underline{v}_0 = \underline{e}_i = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$

(partielle Ableitungen sind spezielle Richtungsableitungen)

Satz (ohne Beweis)

Ist die Funktion f stetig diff'bar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ so gilt für alle $\underline{a} \in D$ und alle Richtungen $\underline{v} \neq \underline{0}$ aus $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v} \rangle}$$

Bsp: $\cdot\ f(x,y) = x^2\sqrt{y}$ $\quad \underline{a} = (2,4)$ $\quad \underline{v} = (1,1)$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

$$\left.\begin{aligned} \cdot\ f_x(x,y) &= 2x\sqrt{y} \\ f_y(x,y) &= \frac{x^2}{2\sqrt{y}} \end{aligned}\right\} \operatorname{grad} f(x,y) = \left(2x\sqrt{y}, \frac{x^2}{2\sqrt{y}}\right), \operatorname{grad} f(2,4) = (8,1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(2,4) = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \langle \operatorname{grad} f(2,4), \underline{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (8,1), (1,1) \rangle = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

Folgerung 1

- $$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \langle \operatorname{grad} f, \underline{v} \rangle = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \|\operatorname{grad} f(\underline{a})\| \cdot \|\underline{v}\| \cdot \cos \sphericalangle(\operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v})$$
$$= \|\operatorname{grad} f(\underline{a})\| \cdot \cos \sphericalangle(\operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v})$$

- Für festes $\underline{a}$ gilt $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a})$ maximal $\Leftrightarrow \cos \sphericalangle(\operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v}) = 1$
$\Leftrightarrow \underline{v}$ gleichgerichtet zu $\operatorname{grad} f(\underline{a})$

Somit gilt

(a) $\operatorname{grad} f(\underline{a})$ zeigt in Richtung des größten Anstiegs von f im Punkt $\underline{x} = \underline{a}$

(b) Für $\underline{v} = \operatorname{grad} f(\underline{a})$ ist also $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a})$ am größten mit

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \| \operatorname{grad} f(\underline{a}) \|$$

falls $\underline{v} = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \neq \underline{o}$ ist.

c) Ist $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{o}$ so gilt für alle Richtungen $\underline{v} \neq \underline{o} \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v} \rangle = 0$$

Folgerung 2

$$f(\underline{a} + \underline{v}) - f(\underline{a}) \approx \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) \cdot \|\underline{v}\| = \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v} \rangle$$

Bemerkung

Folgerungen 1 und 2 gelten nur für stetig diff'bare Fkt. f

(3.2) Differential einer Funktion f

Gegeben
- Fkt $\underline{x} = (x_1, .., x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$
- $D \subseteq D_f$ sei offene Menge

(1) Differential von f

$$\boxed{df(\underline{x}, d\underline{x}) = \langle \operatorname{grad} f(\underline{x}), d\underline{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\underline{x})\, dx_i}$$

wird (totales) Differential von f genannt

Das Differential df ist abhängig von

$\underline{x} = (x_1, .., x_n)$ und $d\underline{x} = (dx_1, .., dx_n)$

Argumentevonf
x_i reelle Zahlen

Argumentdifferentiale
dx_i reelle Zahlen

Kurzschreibweise

$$df = f_{x_1}\,dx_1 + \ldots + f_{x_n}\,dx_n$$

Bemerkung $\quad df$ ist linear in $d\underline{x}$, d.h.

$$df(\underline{x}, d\underline{\tilde{x}} + d\underline{\hat{x}}) = df(\underline{x}, d\underline{\tilde{x}}) + df(\underline{x}, d\underline{\hat{x}})$$

$$df(\underline{x}, \alpha \cdot d\underline{x}) = \alpha \cdot df(\underline{x}, d\underline{x}) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

(2) Funktionswertdifferenz

$$\boxed{\Delta f(\underline{x}, d\underline{x}) := f(\underline{x} + d\underline{x}) - f(\underline{x})}$$

Definition

Die Funktion f heißt an der Stelle $\underline{x} = \underline{a} \in D$ vollständig differenzierbar bzw. total differenzierbar, falls gilt:

$$\lim_{\|d\underline{x}\| \to 0} \frac{\Delta f(\underline{x}, d\underline{x}) - df(\underline{x}, d\underline{x})}{\|d\underline{x}\|} = 0$$

Bemerkung

- $\|d\underline{x}\| = \sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2} \to 0 \iff d\underline{x} = (dx_1, \ldots, dx_n) \to \underline{0}$
- Für $\|d\underline{x}\|$ nahe 0 gilt dann $\Delta f(\underline{x}, d\underline{x}) \approx df(\underline{x}, d\underline{x})$

Beispiel

- $f(x,y) = x \cdot y \qquad D = \mathbb{R}^2$
- $df(x, y, dx, dy) = f_x(x,y) \cdot dx + f_y(x,y) \cdot dy = y\,dx + x\,dy$
- $\Delta f(x, y, dx, dy) = f(x+dx, y+dy) - f(x,y) = (x+dx)(y+dy) - xy$
  $= xy + x\,dy + y\,dx + dx\,dy - xy = x\,dy + y\,dx + dx\,dy$
- $\dfrac{\Delta f(x,y,dx,dy) - df(x,y,dx,dy)}{\|(dx,dy)\|} = \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \xrightarrow{(dx,dy) \to (0,0)} 0$

$\Rightarrow f$ für alle $\underline{x} \in D = \mathbb{R}^2$ total diff'bar

Satz: Ist f stetig diff'bar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist f für alle $\underline{x} \in D$ total differenzierbar

(3) Anwendungen

(a) Fehlerrechnung (Fehlerfortpflanzung)

- exakte Werte $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad z = f(\underline{x})$
- Näherungswerte $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ $\quad \hat{z} = f(\underline{a})$
- Abweichungen $d\underline{x} = \Delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{a}$ $\quad \Delta z = z - \hat{z} = f(\underline{x}) - f(\underline{a})$

  $\Delta z = \Delta f(\underline{a}, d\underline{x})$
- absolute Fehler $|dx_i| = |x_i - a_i|$ $\quad |\Delta z| = |\Delta f(\underline{a}, d\underline{x})|$
- Näherungsweise gilt

$$\Delta z = \Delta f(\underline{a}, d\underline{x}) \approx df(\underline{a}, d\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\underline{a})\, dx_i$$

$$\Rightarrow |\Delta z| \leq S \qquad \text{mit } S \approx \sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}(\underline{a})| \cdot |dx_i|$$

Bsp: Fehler bei Multiplikation

- $z = f(x,y) = x \cdot y$
- $dz = df = f_x\, dx + f_y\, dy = y\, dx + x\, dy$
- $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{df}{xy} = \dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y}$

$\left|\dfrac{dz}{z}\right| \leq \left|\dfrac{dx}{x}\right| + \left|\dfrac{dy}{y}\right|$ relative Fehler addieren sich

(b) Lineare Approximation von $f(\underline{x})$ für $\underline{x}$ nahe $\underline{a}$

- bekannt : $f(\underline{a})$, $\quad f_{x_i}(\underline{a})$
- gesucht : $f(\underline{x}) = f(\underline{a} + d\underline{x})$ $\qquad d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a}$
- Dann gilt: $\Delta f(\underline{a}, d\underline{x}) = f(\underline{a} + d\underline{x}) - f(\underline{a}) = f(\underline{x}) - f(\underline{a})$

$$\Rightarrow f(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \Delta f(\underline{a}, d\underline{x})$$

- Näherungsweise gilt dann:

$$f(\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + df(\underline{a}, d\underline{x}) \qquad \text{mit } d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a}$$

$$f(\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\underline{a})\,(x_i - a_i)$$

Bemerkungen

- $T(\underline{x}) = f(\underline{a}) + df(\underline{a}, d\underline{x})$ mit $d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a}$ heißt 1. Taylorpolynom von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$
- $x_{n+1} = T(\underline{x})$ ist Gleichung des Tangentialraumes von f a.d. Stelle $\underline{x} = \underline{a}$

(4) Regeln für das Differential

(a) $d(\alpha f) = \alpha \cdot df \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

(b) $d(f \pm g) = df \pm dg$

(c) $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$

Beweis von (a)

$$d(\alpha \cdot f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\alpha \cdot f)}{\partial x_i} \cdot dx_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i$$

$$= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i$$

$$= \alpha \cdot df$$

Beweise von (b) und (c) analog mit Hilfe der Summen-, Produktregel für partielle Ableitungen

Bemerkung

Aus (a) und (b) folgt: Das totale Differential ist ein linearer Operator.

(3.3) Kettenregel

Gegebene Funktionen

- $f = f(x_1, .., x_n)$ $\quad \underline{x} = (x_1, .., x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$
- $x_1 = g_1(u_1, .., u_m)$

  $\vdots$

  $x_n = g_n(u_1, .., u_m)$ $\quad \underline{u} = (u_1, .., u_m) \in D' \subseteq \mathbb{R}^m$

Verkettete Funktion

- $H(u_1, .., u_m) = f(g_1(u_1, .., u_m), ..., g_n(u_1, .., u_m))$

  $H(\underline{u}) = f(g_1(\underline{u}), .., g_n(\underline{u}))$

Dann gilt

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_k} + .. + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial u_k} = \operatorname{grad} f \cdot \begin{pmatrix} x_{1_{u_k}} \\ \vdots \\ x_{n_{u_k}} \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f \cdot \begin{pmatrix} g_{1_{u_k}} \\ \vdots \\ g_{n_{u_k}} \end{pmatrix}$$

(äußere Ableitung · innere Ableitung)

Bsp 1

- $f(x,y) = x \cdot y \qquad x = u + v \qquad y = u - v$
- $H(u,v) = f(u+v, u-v) = (u+v) \cdot (u-v) = u^2 - v^2$

  $\Rightarrow H_u = 2u \qquad H_v = -2v$

- $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = y \cdot 1 + x \cdot 1 \Big|_{\substack{x = u+v \\ y = u-v}} = u + v + u - v = 2u$

  $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = y \cdot 1 + x \cdot (-1) \Big|_{\substack{x = u+v \\ y = u-v}} = u - v - (u+v) = -2v$

Bsp 2 $(n=2, m=1)$

- $f = f(x,y)$
- $x = x(t) \qquad y = y(t)$
- $H(t) = f(x(t), y(t))$

$$\Rightarrow H'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \Bigg|_{\substack{x = x(t) \\ y = y(t)}}$$

$$= f_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)$$

$$= \operatorname{grad} f(x(t), y(t)) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation

Sind die Fkt $x = x(t) \quad y = y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ stetig, so beschreibt die Abbildung

$$\underline{r} : \quad t \in I \mapsto \underline{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

eine Kurve in Parameterform bzw eine Bewegung in der Ebene (Zeitpunkt $t \longmapsto$ Ort $\underline{r}(t)$, $I = [a,b]$ Zeitintervall)

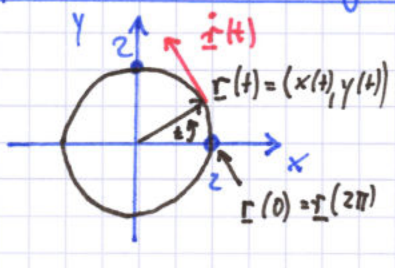
Man nennt $K = \{\underline{r}(t) \mid t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Spur der Kurve.

Weiterhin ist

$$\dot{\underline{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

der Tangentialvektor an die Kurve im Punkt $\underline{r}(t)$ bzw der Geschwindigkeitsvektor ($\dot{\underline{r}}(t)$ zeigt in Richtung der Bewegung, $\|\dot{\underline{r}}(t)\|$ = Geschwindigkeit zum Zeitpunkt)

Beispiel Kreisbewegung



$x = x(t) = 2\cos t \qquad t \in [0, 2\pi]$

$y = y(t) = 2\sin t$

$\underline{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$

- $K = \{\underline{r}(t) \mid t \in [0, 2\pi]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$
- $\dot{x}(t) = -2\sin t \qquad \dot{y}(t) = 2\cos t \qquad \dot{\underline{r}}(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \qquad \|\dot{\underline{r}}(t)\| = 2$
- $\langle \underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{r}(t) \perp \dot{\underline{r}}(t)$

Folgerung

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine diff'bare Fkt und sei $K = \{\underline{r}(t) \mid t \in I\}$ die Spur der Kurve $\underline{r}$ mit $\underline{r}(t) = (x(t), y(t))$. Für die Fkt.

$$H(t) = f(\underline{r}(t)) = f(x(t), y(t))$$

gilt dann

$$H'(t) = \langle \operatorname{grad} f(\underline{r}(t)), \dot{\underline{r}}(t) \rangle$$

Ist K eine Höhenlinie von f, d.h. es gilt

$$H(t) = c \qquad \forall\, t \in I$$

so ist $H'(t) = 0 \quad \forall\, t \in I$ und somit ist

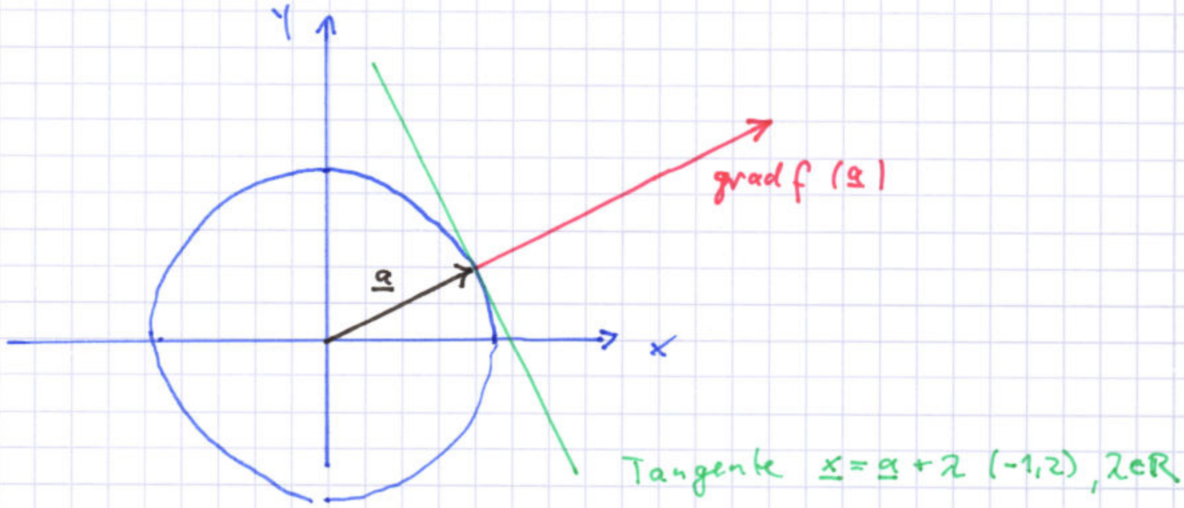
$$\operatorname{grad} f(\underline{r}(t)) \perp \dot{\underline{r}}(t)$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Der Gradientenvektor } \operatorname{grad} f(\underline{a}) \text{ steht im Punkt } \underline{x} = \underline{a} \text{ senkrecht auf der Höhenlinie der Fkt. } f \text{, die durch den Punkt } \underline{a} \text{ geht. (genauer: } \perp \text{ auf Tangente an Höhenlinie)}}$

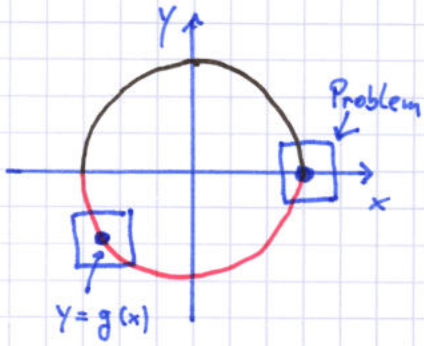
Beispiel

- $f(x,y) = x^2 + y^2$ Höhenlinien $f(x,y) = c$ sind Kreise
- $f_x = 2x \qquad f_y = 2y \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 2y)$
- Punkt $\underline{a} = (2,1) \qquad f(2,1) = 5$

Höhenlinie $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 5\} = N_5(f) \qquad \operatorname{grad} f(\underline{a}) = (4,2)$



(3.4.) Implizite Funktionen (Auflösungssatz)



Bsp: $\underbrace{x^2+y^2=4}_{\text{Gleichung}} \iff \underbrace{y = \pm\sqrt{4-x^2}}_{\text{Auflösung nach } y \text{ nicht eindeutig}}$

Gegeben

- Gleichung $F(x,y)=c$ mit $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad c \in \mathbb{R}$
- eine Lösung $F(x_0,y_0)=c$ $\quad \underline{x_0} = (x_0,y_0) \in D$

Dann gilt

Ist F in einer Umgebung von $\underline{x_0}$ stetig diff'bar und ist $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$, so gibt es Intervalle I, J derart, dass

$$\boxed{\forall x \in I \ \forall y \in J \ : \quad F(x,y)=c \iff y = g(x)} \qquad (*)$$

wobei $g: I \subseteq \mathbb{R} \to J \subseteq \mathbb{R}$ eine Fkt. ist. Man sagt dann, dass die Fkt g implizit definiert ist durch die Gleichung $F(x,y)=c$ mit $g(x_0)=y_0$. Für die Ableitung von g an der Stelle $x \in I$ gilt dann

$$g'(x) = -\frac{F_x(x,g(x))}{F_y(x,g(x))}$$

Beweis der Formel

$$(*) \implies F(x,g(x)) = c \quad \forall x \in I$$

$$\implies 0 = F'(x,g(x))$$

$$= F_x(x,g(x)) \cdot 1 + F_y(x,g(x)) \cdot g'(x) \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$$\implies g'(x) = -\frac{F_x(x,g(x))}{F_y(x,g(x))}$$

Wozu?

<u>Beispiel</u>

- Gleichung $y e^{2x} + 20 \ln y = 1$

  $\rightarrow F(x,y) = y e^{2x} + 20 \ln y$

- Lösung $(x_0, y_0) = (0,1)$

  Probe: $1 \cdot e^0 + 20 \ln 1 = 1$

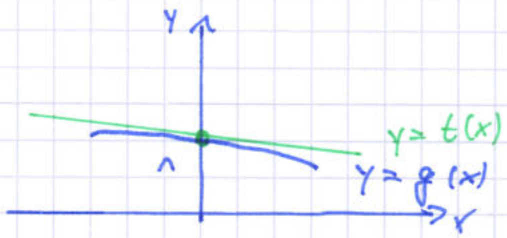
- $F_x(x,y) = 2y e^{2x}$ $\quad F_y(x,y) = e^{2x} + \frac{20}{y}$

- $F_y(0,1) = 1 + \frac{20}{1} = 21 \neq 0$

  $\Rightarrow$ $F(x,y) = 1$ definiert implizit eine Fkt $y = g(x)$

  mit $g(x_0) = y_0$ also $g(0) = 1$

  $F(x,y) = 1 \Leftrightarrow y = g(x) \quad \forall x \in I \ \forall y \in J \qquad (0,1) \in I \times J$



- $$g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))} = \frac{-2 g(x) e^{2x}}{e^{2x} + \frac{20}{g(x)}}$$

  $$g'(0) = \frac{-2 \cdot 1 \cdot 1}{1 + \frac{20}{1}} = -\frac{2}{21}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{t(x) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) = 1 - \frac{2}{21}(x - 0)}}$$

<u>Bemerkungen</u>

- Man kann höhere Ableitungen von g an der Stelle x_0 bestimmen

  $\Rightarrow$ Möglichkeit zur Taylorapproximation von g

$$F(x, g(x)) = c$$

$\frac{d}{dx}$

$$0 = F_x(x, g(x)) \cdot 1 + F_y(x, g(x)) \cdot g'(x) \qquad \rightarrow g'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$$

$\frac{d}{dx}$

$$0 = F_{xx}(x, g(x)) \cdot 1 + F_{xy}(x, g(x)) \cdot g'(x) + \left(F_{yx}(x, g(x)) \cdot 1 + F_{yy}(x, g(x)) \cdot g'(x) \right) \cdot g'(x)$$
$$+ F_y(x, g(x)) \cdot g''(x)$$

Umstellen nach g''

(3.5.) Ableitungen höherer Ordnung

Fkt $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

(1) Partielle Ableitung k-ter Ordnung

Bsp: $f(x,y) = x^2 e^y + x$

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^y + 1$ $\qquad$ $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y$

$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = 2e^y$ $\qquad$ $f_{xy} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = 2x e^y$ $\qquad$ $f_{yx} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = 2x e^y$ $\qquad$ $f_{yy} = \frac{\partial f_y}{\partial y} = x^2 e^y$

$f_{xxx} = 0$ $\quad$ $f_{xxy} = 2e^y$ $\quad$ $f_{xyx} = 2e^y$ $\quad$ $f_{xyy} = 2xe^y$ $\quad$ $f_{yxx} = 2e^y$ $\quad$ $f_{yxy} = 2xe^y$ $\quad$ $f_{yyx} = 2xe^y$ $\quad$ $f_{yyy} = x^2 e^y$

Allgemein

$$\underset{\longrightarrow}{f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}} := \underset{\longleftarrow}{\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\dots \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \dots \right)$$

heißt partielle Ableitung k-ter Ordnung von f nach $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$.
Dabei gibt $\rightarrow$ die Reihenfolge an. ($\rightarrow$ wird nicht mitgeschrieben)

$$\text{z.B.:} \quad f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Definition

Die Funktion f heißt k-mal stetig differenzierbar auf der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, falls für alle $\underline{x} \in D$ sämtliche partiellen Ableitungen von f bis zur k-ten Ordnung existieren und in $\underline{x}$ stetig sind.

Satz von Schwarz

Ist f auf der Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen) 2 mal stetig differenzierbar so gilt für alle $\underline{x} \in D$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \text{für } 1 \le i, j \le n}$$

(2) Differential k-ter Ordnung

- $df = f_{x_1}dx_1 + \dots + f_{x_n}dx_n \qquad df = df(\underline{x}, d\underline{x})$
- $d^k f = d(d^{k-1}f) \quad k \geq 2 \qquad d^k f = d^k f(\underline{x}, d\underline{x})$

Beispiel $(n=2)$

- $f = f(x,y)$
- $df = f_x\,dx + f_y\,dy$
- $d^2f = d(f_x\,dx + f_y\,dy)$

$$= d(f_x\,dx) + d(f_y\,dy) \qquad \text{Summenregel}$$

$$= df_x \cdot dx + df_y\,dy \qquad dx, dy \text{ wie Konstanten}$$

$$= (f_{xx}\,dx + f_{xy}\,dy)\,dx + (f_{yx}\,dx + f_{yy}\,dy)\,dy$$

$$= f_{xx}(dx)^2 + f_{xy}\,dy\,dx + f_{yx}\,dx\,dy + f_{yy}(dy)^2$$

$$= (dx, dy) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}}_{\text{Hessematrix } H_f} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

(3) Hessematrix der Fkt f an der Stelle $\underline{x}$

$$H_f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\underline{x}) & \dots & f_{x_1x_n}(\underline{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\underline{x}) & \dots & f_{x_nx_n}(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Eigenschaften

Ist f 2× stetig diff'bar auf der offenen Menge $D \in \mathbb{R}^n$, dann gilt für alle $\underline{x} \in D$:

(a) $H_f(\underline{x}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist symmetrisch (Satz von Schwarz)

(b) $d^2f(\underline{x}) = d\underline{x}\; H_f(\underline{x})\; d\underline{x}^T$

(c) $f(\underline{x} + d\underline{x}) = f(\underline{x}) + df(\underline{x}, d\underline{x}) + \frac{1}{2}d^2f(\underline{x}, d\underline{x}) + R(\underline{x}, d\underline{x})$

$$\text{mit} \lim_{\|d\underline{x}\| \to 0} \frac{R(\underline{x}, d\underline{x})}{\|d\underline{x}\|^2} = 0$$

(4) Quadratische Approximation von $f(\underline{x})$ für $\underline{x}$ nahe $\underline{a}$

Gegeben $\quad f(\underline{a})\,,\ \operatorname{grad} f(\underline{a})\,,\ H_f(\underline{a})$

Gesucht $\quad f(\underline{x})$ für $\underline{x}$ nahe $\underline{a}$

Lösung $\quad$ Setzen $d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a}$ also $\underline{x} = \underline{a} + d\underline{x}$

$\Rightarrow f(\underline{x}) = f(\underline{a} + d\underline{x})$ und für $\|d\underline{x}\|$ nahe 0 gilt näherungsweise

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &\approx f(\underline{a}) + df(\underline{a}, d\underline{x}) + \tfrac{1}{2}\, d^2 f(\underline{a}, d\underline{x}) \\ f(\underline{x}) &\approx f(\underline{a}) + \underbrace{\langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), d\underline{x} \rangle}_{\text{linearer Zuwachs}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\, d\underline{x}\, H_f(\underline{a})\, d\underline{x}^T}_{\text{quadratischer Zuwachs}} \end{aligned}}$$

$T_{f,1,\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot (\underline{x} - \underline{a})^T$ $\qquad$ 1. Taylorpolynom

$T_{f,2,\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \operatorname{grad} f(\underline{a})\,(\underline{x} - \underline{a})^T + \frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{a})\, H_f(\underline{a})\,(\underline{x} - \underline{a})^T$ $\qquad$ 2. Taylorpolynom

$T_{f,n,\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\, d^k f(\underline{a}, d\underline{x})$ $\qquad$ n-tes Taylorpolynom von f

$(d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a})$ $\qquad$ an der Entwicklungsstelle $\underline{a}$

Anwendung

Ist $\underline{a}$ extremwertverdächtige Stelle von f, so ist $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$

und es gilt $f(\underline{x}) = f(\underline{a} + d\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + \frac{1}{2}\, d\underline{x}\, H_f(\underline{a})\, d\underline{x}^T$ für $\underline{x}$ nahe $\underline{a}$

Bsp: $f(x,y) = x e^y - x - y + 1 \qquad \underline{a} = (1,0)$

- $f(\underline{a}) = 1 \qquad d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a} = (x-1, y-0) = (x-1, y)$
- $\left.\begin{aligned} f_x &= e^y - 1 \\ f_y &= x e^y - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y) = (e^y - 1, x e^y - 1) \Rightarrow \operatorname{grad} f(\underline{a}) = (0,0)$

  $\Rightarrow \underline{a} = (1,0)$ extremwertverdächtig
- $\left.\begin{aligned} f_{xx} &= 0 & f_{xy} &= e^y \\ f_{yx} &= e^y & f_{yy} &= x e^y \end{aligned}\right\} \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & e^y \\ e^y & x e^y \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $T_{f,2,\underline{a}}(x,y) = f(\underline{a}) + \operatorname{grad} f(\underline{a})\, d\underline{x}^T + \frac{1}{2}\, d\underline{x}\, H_f(\underline{a})\, d\underline{x}^T = 1 + (0,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$

  $= 1 + \frac{1}{2}\left(0 \cdot (x-1)^2 + 2(x-1)y + 1\, y^2\right) = 1 + (x-1)y + \frac{1}{2} y^2$

$\Rightarrow f(x,y) \approx 1 + (x-1)y + \frac{1}{2} y^2$ für (x,y) nahe $(1,0)$

$(x,y) = (1{,}01\,,\ 0{,}01) \Rightarrow f(x,y) \approx 1 + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}\right)^2 > 1 = f(\underline{a})$

$(x,y) = (1{,}01\,,\ -0{,}01) \Rightarrow f(x,y) \approx 1 - \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}\right)^2 < 1 = f(\underline{a})$

$\underline{a}$ keine Extremstelle

(3.6) Positiv bzw negativ definite Matrizen

Gegeben

$S = (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrische Matrix der Ordnung n

Wir betrachten die quadratische Form $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$q(\underline{u}) = \underline{u}\, S\, \underline{u}^T = \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij} \cdot u_i \cdot u_j$$

Definition

Falls für alle $\underline{u} \neq \underline{0}$ aus $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\underline{u} \cdot S\, \underline{u}^T \left\{ \begin{matrix} >0 \\ \geq 0 \\ <0 \\ \leq 0 \end{matrix} \right\} \text{ so nennt man } S \left\{ \begin{matrix} \underline{\text{positiv definit}} \\ \underline{\text{positiv semidefinit}} \\ \underline{\text{negativ definit}} \\ \underline{\text{negativ semidefinit}} \end{matrix} \right\}$$

Beobachtung S ist genau dann negativ (semi)definit wenn $-S$ positiv (semi) definit ist.

Eigenwertkriterium:

Die symmetrische Matrix S ist $\left\{ \begin{matrix} \text{positiv definit} \\ \text{positiv semidefinit} \\ \text{negativ definit} \\ \text{negativ semidefinit} \end{matrix} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{alle EW} >0 \\ \text{alle EW} \geq 0 \\ \text{alle EW} <0 \\ \text{alle EW} \leq 0 \end{matrix} \right\}$

Determinantenkriterium

Es sei $S^{(k)} := \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1k} \\ \vdots & & \\ s_{k1} & \cdots & s_{kk} \end{pmatrix}$ die sogenannte <u>Hauptuntermatrix</u> k-ter Ordnung (Hauptminor). Dann gilt

(a) S ist positiv definit $\Longleftrightarrow$ $\det(S^{(k)}) > 0$ für $k = 1, \ldots, n$

(b) S ist negativ definit $\Longleftrightarrow$ $\det(S^{(k)}) \left\{ \begin{matrix} <0 & \text{für ungerade } k \\ >0 & \text{für gerade } k \end{matrix} \right.$

Bsp:

$$\begin{array}{cccc} & S^{(1)} & S^{(2)} & S^{(3)} \\ S = & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}} \end{array}$$

- $q(\underline{u}) = \underline{u} \cdot S\, \underline{u}^T = 5u_1^2 + 6u_2^2 + 4u_3^2 - 4u_1u_2 + 4u_1u_3 - 2u_2u_3$
- $S^{(1)} = (5) \Rightarrow \det(S^{(1)}) = 5 > 0$
- $S^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(S^{(2)}) = 30 - 4 = 26 > 0$
- $S^{(3)} = S \Rightarrow \det(S^{(3)}) = \ldots = 83 > 0$

$\Rightarrow S$ positiv definit

$\Rightarrow \forall\, \underline{u} \neq \underline{0} \in \mathbb{R}^n$ gilt $q(\underline{u}) > 0$

4. Extremwerte

(4.1) Globale und lokale Extremwerte

Geg.: • Fkt. $\underline{x} \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

• Menge $D \subseteq D_f$

Globale Extremwerte von f auf D

Suchen $\max\{f(\underline{x}) \mid x \in D\}$ bzw. $\min\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\}$ sofern diese Werte existieren. Ist $\underline{a} \in D$ und gilt

$f(\underline{a}) = \max\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\}$ bzw. $f(\underline{a}) = \min\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\}$ so heißt

- $\underline{x} = \underline{a}$ globale Maximalstelle bzw. globale Minimalstelle von f auf D
- $f(\underline{a})$ globales Maximum bzw. globales Minimum von f auf D

Lokale Extremwerte von f auf D

Man nennt $\underline{x} = \underline{a}$ lokale Maximalstelle bzw lokale Minimalstelle von f auf D, falls es eine Umgebung $U_\varepsilon(\underline{a})$ gibt, mit

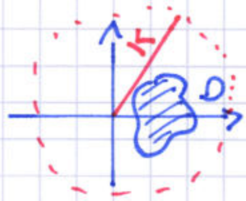
$$f(\underline{a}) = \max\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in U_\varepsilon(\underline{a}) \cap D\} \quad \text{bzw} \quad f(\underline{a}) = \min\{f(\underline{x}) \mid x \in U_\varepsilon(\underline{a}) \cap D\}$$

Dabei ist $U_\varepsilon(\underline{a}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x} - \underline{a}\| < \varepsilon\}$

(4.2) Existenz globaler Extremwerte

Definition Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt

falls $\exists K \in \mathbb{R} \ \forall \underline{x} \in D: \ \|x\| < K$



Satz von Weierstraß (ohne Beweis)

Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Fkt. und $D \subseteq D_f$ eine abgeschlossene und beschränkte Menge. Dann besitzt f auf D ein globales Maximum und ein globales Minimum.

d.h. $\exists \underline{a}, \underline{b} \in D$ mit
- $\forall \underline{x} \in D: \ f(\underline{a}) \le f(\underline{x}) \le f(\underline{b})$
- $f(\underline{a}) = \min\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\}$
- $f(\underline{b}) = \max\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\}$

$\underline{a}$ und $\underline{b}$ sind dann lokale Extremstellen im Inneren von D oder liegen auf dem Rand.

(4.3) Lokale Extremwerte im Inneren von D

(1) Notwendige Bedingung

<u>Voraussetzung</u>
- f stetig diff'bar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\underline{a} \in D$ sei innerer Punkt von D

<u>Dann gilt:</u>

$$\boxed{\underline{a} \text{ lokale Extremstelle von } f \text{ auf } D \Rightarrow \operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}, \text{ d.h. } \forall i: f_{x_i}(\underline{a}) = 0}$$

Ist $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ so gilt näherungsweise

$$f(\underline{a} + d\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + \underline{0} \cdot d\underline{x}^T + \frac{1}{2}\, d\underline{x}\, H_f(\underline{a})\, d\underline{x}^T$$

woraus folgt

(2) Hinreichende Bedingung

<u>Voraussetzung</u>
- f $2\times$ stetig diff'bar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\underline{a} \in D$ innerer Punkt
- $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ d.h. $\underline{a}$ ist extremwertverdächtig

<u>Dann gilt</u>

a) $H_f(\underline{a})$ positiv definit	$\Rightarrow$ $\underline{a}$ ist lokale Minimalstelle von f auf D
b) $H_f(\underline{a})$ negativ definit	$\Rightarrow$ $\underline{a}$ ist lokale Maximalstelle von f auf D

<u>Spezialfall $(n=2)$ $f = f(x,y)$</u>

- f $2\times$ stetig diff'bar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\underline{a} \in D$ innerer Punkt mit $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$
- $H_f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\underline{a}) & f_{xy}(\underline{a}) \\ f_{yx}(\underline{a}) & f_{yy}(\underline{a}) \end{pmatrix}$

und es gilt:

a) $\left.\begin{array}{l} \det(H_f(\underline{a})) > 0 \\ f_{xx}(\underline{a}) > 0 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow H_f(\underline{a})$ positiv definit $\Rightarrow \underline{a}$ ist lokale Minimalstelle

b) $\left.\begin{array}{l} \det(H_f(\underline{a})) > 0 \\ f_{xx}(\underline{a}) < 0 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow H_f(\underline{a})$ negativ definit $\Rightarrow \underline{a}$ ist lokale Maximalstelle

c) $\det(H_f(\underline{a})) < 0$ $\Rightarrow H_f(\underline{a})$ indefinit $\Rightarrow \underline{a}$ keine Extremstelle (Sattelpunkt)

d) $\det(H_f(\underline{a})) = 0$ $\Rightarrow$ keine Aussage zusammengefasst:

$$\det(H_f(\underline{a})) \begin{cases} >0 & \begin{cases} f_{xx}(\underline{a})>0 \longrightarrow \text{lokale Minimalstelle} \\ f_{xx}(\underline{a})<0 \longrightarrow \text{lokale Maximalstelle} \end{cases} \\ =0 & \rightarrow \text{keine Aussage} \\ <0 & \rightarrow \text{Sattelpunkt} \end{cases}$$

Beispiel

- $f(x,y) = xy - x^3 - y^3 \qquad D = \mathbb{R}^2 \qquad$ Rand $\partial D = \emptyset \Rightarrow$ offen und abgeschlossen

- Notwendige Bedingung

$\text{I} \quad f_x(x,y) = y - 3x^2 \overset{!}{=} 0$

$\text{II} \quad f_y(x,y) = x - 3y^2 \overset{!}{=} 0$

$\overset{\text{I}}{\Rightarrow} \; y = 3x^2 \overset{\text{in II}}{\Longrightarrow} x - 3\cdot 9x^4 = 0 \Leftrightarrow x\cdot(1-27x^3) = 0 \Leftrightarrow x=0$ oder $\frac{1}{3}$

Lösungen:

$(x_1,y_1) = (0,0) =: \underline{a} \qquad (x_2,y_2) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3}) =: \underline{b}$ extremwertverdächtig

- Hinreichende Bedingung

$$\left.\begin{array}{ll} f_{xx}(x,y) = -6x & f_{xy}(x,y) = 1 \\ f_{yx}(x,y) = 1 & f_{yy}(x,y) = -6y \end{array}\right\} \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 1 \\ 1 & -6y \end{pmatrix}$$

a) $H_f(\underline{a}) = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(H_f(\underline{a})) = -1 < 0 \Rightarrow \underline{a}$ ist Sattelpunkt (keine Extremstelle)

b) $H_f(\underline{b}) = H_f(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{ll} \det H_f(\underline{b}) = 3 & >0 \\ f_{xx}(\underline{b}) = -2 & <0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{b} \text{ ist lokale Maximalstelle von } f$$

$$f(\underline{b}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} = \frac{1}{27}$$

(4.4.) Extremwerte mit (Gleichungs-) Nebenbedingungen

(1) Aufgabenstellung

<u>Gegeben</u>

- Fkt $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Zielfunktion
- Fkt $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

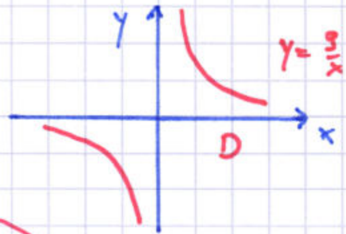
$$D = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\underline{x}) = 0 \}$$

<u>Gesucht</u> Lokale bzw globale Extremwerte von f auf D

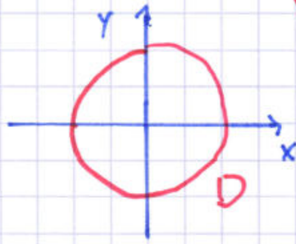
kurz: Extremwerte von f mit Nebenbedingung $g(\underline{x}) = 0$

<u>Beispiele ($n=2$)</u>

a) $f(x,y) = x+y$ mit $x \cdot y = 9$ (d.h. $g(x,y) = 9 - xy$)



b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$ $\left(g(x,y) = 1 - x^2 - y^2\right)$



(2) Eigenschaften von $D = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\underline{x}) = 0 \}$

Ist g stetig diff'bar auf $\mathbb{R}^n$ und $\operatorname{grad} g(\underline{x}) \neq \underline{0}$ für $\underline{x} \in D$, dann gilt

(a) D hat keine inneren Punkte, d.h. $\partial D = D$

(b) D ist abgeschlossen

(c) Ist D beschränkt (d.h. $\|\underline{x}\| < K$ für alle $\underline{x} \in D$ und ein $K \in \mathbb{R}$) dann besitzt f auf D ein globales Maximum und ein globales Minimum.

(3) Lösungsmethoden für (1)

(a) Auflösung der Gleichung $g(\underline{x}) = 0$

- Lösen Gleichung $g(x_1, .., x_n) = 0$ nach einer Variablen auf etwa $x_n = h(x_1, .., x_{n-1})$
- Einsetzen in Zielfunktion ergibt neue Fkt. $\tilde{f}$ aus $\mathbb{R}^{n-1}$ in $\mathbb{R}$ mit
  $\tilde{f}(x_1, .., x_{n-1}) = f(x_1, .., x_{n-1}, h(x_1, .., x_{n-1}))$

- Ist dann $(x_1, \dots, x_{n-1})$ lokale Extremstelle von $\tilde{f}$ so ist $(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$ lokale Extremstelle von f mit NB $g(\underline{x}) = 0$

<u>Beispiel</u> $f(x,y) = x + y$ NB $xy = 9$

- auflösen $y = \frac{9}{x}$ $x \neq 0$
- einsetzen $\tilde{f}(x) = x + \frac{9}{x}$ $\tilde{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$\tilde{f}'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} \overset{!}{=} 0 \iff x = \pm 3$

$\tilde{f}''(x) = \frac{18}{x^3}$

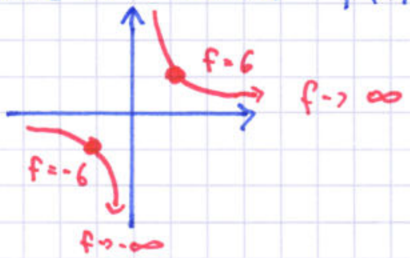
$\tilde{f}''(-3) = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow x = -3$ lok. Maximalstelle von $\tilde{f}$ $(y = \frac{9}{x} = -3)$

$f''(3) = +\frac{2}{3} > 0 \Rightarrow x = 3$ lok. Minimalstelle von $\tilde{f}$ $(y = \frac{9}{x} = 3)$

$\Rightarrow$ lokale Extremstellen von $f(\underline{x})$ mit NB $g(\underline{x}) = 0$

$(x,y) = (-3,-3)$ lok. Maximalstelle $f(-3,-3) = -6$ lokales Maximum

$(x,y) = (3,3)$ lokale Minimalstelle $f(3,3) = 6$ lokales Minimum

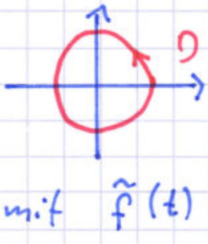


- f hat auf D keine globalen Extremwerte

<u>b) Parametrisierung der Menge $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$</u>

<u>Beispiel</u> $f(x,y) = x^2 - y^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{(x,y) \mid x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]\}$



betrachten $\tilde{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t$

$\tilde{f}'(t) = -2\cos t \sin t - 2 \sin t \cos t = -4 \cos t \sin t \overset{!}{=} 0$

$f'(t) = 0 \iff t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ oder 2π

Rand ist $t = 0$ bzw $t = 2\pi$

$\tilde{f}(0) = f(1,0) = 1$, $\tilde{f}(\frac{\pi}{2}) = f(0,1) = -1$, $\tilde{f}(\pi) = f(-1,0) = 1$, $\tilde{f}(\frac{3}{2}\pi) = -1$

$\Rightarrow \quad \max\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\} = \max\{\tilde{f}(t),\ t \in [0,2\pi]\} = 1$ für $(x,y) = (1,0)$ oder $(x,y) = (-1,0)$

$\min\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\} = \min\{\tilde{f}(t),\ t \in [0,2\pi]\} = -1$ für $(x,y) = (0,1)$ oder $(x,y) = (0,-1)$

(c) Multiplikatorenregel von Lagrange

1. Betrachten Ersatzfunktion L aus $\mathbb{R}^{n+1}$ in $\mathbb{R}$

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda) := \underbrace{f(x_1,\dots,x_n)}_{\text{Zielfunktion}} + \lambda \cdot \underbrace{g(x_1,\dots,x_n)}_{\text{NB } g(\underline{x}) = 0}$$

L heißt Lagrange-Funktion und λ Lagrange-Multiplikator

2. Notwendige Bedingung

Bestimmen extremwertverdächtige Stellen $(x_1,\dots,x_n,\lambda)$ von L, d.h. die Lösungen von $\operatorname{grad} L = \underline{0}$, d.h.

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= f_{x_1} + \lambda g_{x_1} \overset{!}{=} 0 \\ &\ \vdots \\ L_{x_n} &= f_{x_n} + \lambda g_{x_n} \overset{!}{=} 0 \\ L_\lambda &= g \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Dann sind die $(x_1,\dots,x_n)$ extremwertverdächtige Stellen von f mit NB $g(\underline{x}) = \underline{0}$. Weitere extremwertverdächtige Stellen gibt es nicht.

Vor: $\operatorname{grad} g(\underline{x}) \neq \underline{0}$ für alle $\underline{x}$ mit $g(\underline{x}) = 0$

3. Hinreichende Bedingung zu kompliziert

Beispiel $f(x,y) = x^2 - y^2$ NB $x^2 + y^2 = 1$ $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2 = 0$

- $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ abgeschlossen und beschränkt
- f stetig auf D $\xRightarrow{\text{Weierstraß}}$ $\exists$ glob. Maximum und glob. Minimum
- $\operatorname{grad} g(\underline{x}) = (-2x, -2y) \neq (0,0) \quad \forall (x,y) \in D$
- $L(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$

$\Rightarrow$ notwend. Bedingung

I $\quad L_x = 2x - 2\lambda x \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x\,(1-\lambda) = 0$

II $\quad L_y = -2y - 2\lambda y \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2y\,(1+\lambda) = 0$

III $\quad L_\lambda = 1 - x^2 - y^2 \overset{!}{=} 0$

I $\quad$ <u>Fall 1</u>: $x = 0$

$\overset{\text{II}}{\Rightarrow} \quad y = 0$ (Widerspruch zu III) oder $\lambda = -1$

$\overset{\text{III}}{\Rightarrow} \quad y = \pm 1 \quad$ also $(x,y) = (0,1)$ oder $(0,-1) \quad \lambda = -1$

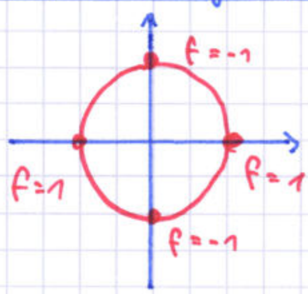
<u>Fall 2</u> $\quad x \neq 0 \overset{\text{I}}{\Rightarrow} \lambda = 1 \overset{\text{II}}{\Rightarrow} y = 0 \overset{\text{III}}{\Rightarrow} x = \pm 1$

also $(x,y) = (1,0)$ oder $(-1,0) \quad \lambda = 1$

<u>Extremwertverdächtige Stellen von f mit NB $g(\underline{x}) = 0$</u>

$\left.\begin{array}{l}(x,y) = (1,0) \\ (x,y) = (-1,0)\end{array}\right\} \quad f(x,y) = 1$

$\left.\begin{array}{l}(x,y) = (0,1) \\ (x,y) = (0,-1)\end{array}\right\} \quad f(x,y) = -1$



f hat auf $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ glob. Max und Min. Kann nur an einem der 4 Punkte passieren

$\Rightarrow f(1,0) = f(-1,0) = 1$ globales Maximum von f auf D

$f(0,1) = f(0,-1) = -1$ globales Minimum von f auf D

(4) <u>Mehrere Nebenbedingungen</u>

<u>Geg:</u> $\cdot$ Zielfkt. $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\cdot$ NB $\quad g_1(\underline{x}) = 0, \dots, g_p(\underline{x}) = 0 \quad (p < n, \quad g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$

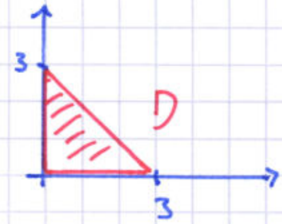
<u>Ges:</u> Extremwerte von f auf $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\underline{x}) = \dots = g_p(\underline{x}) = 0\}$

<u>Lagrange-Funktion</u> $\quad L(x_1,\dots,x_n, \lambda_1,\dots,\lambda_p) = f(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, g_i(\underline{x})$

Vorgehensweise analog zu d), d.h.

Lösungen von $\quad L_{x_1} = L_{x_2} = \dots = L_{x_n} = L_{\lambda_1} = \dots = L_{\lambda_p} = 0$ sind extremwertverdächtig

(4.5) Globale Extremwerte von f auf D



Geg:
- Zielfunktion $f(x,y) = xy$
- Menge $D = \{(x,y) \mid 0 \le x,y \wedge x+y \le 3\}$

Ges:
- globale Extremwerte von f auf D

Lösung:

a) $\left.\begin{array}{l} D \text{ abgeschlossen und beschränkt} \\ f \text{ stetig auf } D \end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ globale Extremwerte auf D

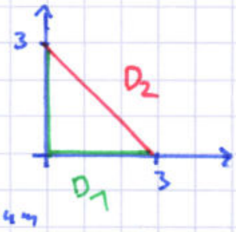
Jede globale Extremstelle von f auf D ist lokale Extremstelle von f auf D

b) innere Punkte

- notw. Bed. $\left.\begin{array}{l} f_x = y \stackrel{!}{=} 0 \\ f_y = x \stackrel{!}{=} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ kein innerer Punkt von D

$\Rightarrow$ f hat in $\text{int}(D)$ keine lokalen also auch keine globalen Extremstellen

c) Rand ∂D von D



- $D_1 = \{(x,y) \in \partial D \mid x = 0 \text{ oder } y = 0\}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(x,y) = 0 \\ f(x,y) \ge 0 \ \forall x \in D \end{array}\right\} \Rightarrow$ $f = 0$ globales Minimum von f auf D, alle $(x,y) \in D_1$ globale Minimalstellen

- $D_2 = \{(x,y) \in \partial D \mid x,y > 0\} = \{(x,y) \mid 0 < x < 3,\ y = 3-x\}$

$$\tilde{f}(x) = f(x, 3-x) = x(3-x) = 3x - x^2$$

$$\tilde{f}'(x) = 3 - 2x \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow x = 3/2 \qquad (y = 3-x = 3/2)$$

$$\tilde{f}''(x) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \tilde{f}''(\tfrac{3}{2}) < 0 \Rightarrow \quad x = 3/2 \text{ lok. Maximalstelle von } \tilde{f}$$

$\Rightarrow (3/2, 3/2)$ lokale Maximalstelle von f auf D

d) Auswertung

- lokale Minimalstellen von f auf D höchstens Punkte aus D_1
- lokale Maximalstellen von f auf D höchstens in $(x,y) = (3/2, 3/2)$

$\Rightarrow$ $f = 0$ globales Minimum globale Minimalstellen $= D_1$

$f = \frac{9}{4} = f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ globales Maximum globale Maximalstelle $(3/2, 3/2)$

Kapitel V: Gewöhnliche Differentialgleichungen

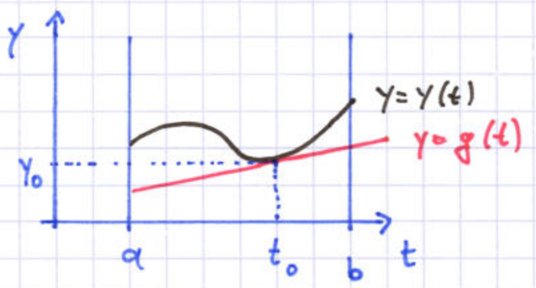
1. Grundbegriffe

(1.1) Ableitung einer Funktion

- Funktion $\quad y: I \to \mathbb{R} \quad I = [a,b] \quad y = y(t)$
- Ableitung $\quad y': I \to \mathbb{R} \quad y' = y'(t) \quad y' = \frac{dy}{dt}$
- Tangente $\quad$ Punkt $t_0 \in I \quad y(t_0) = y_0 \quad y'(t_0) = y_1$

$$g(t) = y_0 + y_1 (t - t_0)$$

$$\Rightarrow g'(t) = y_1 \qquad g(t_0) = y_0 = y(t_0)$$



- $y'(t)$ Anstieg, Zuwachs, Geschwindigkeit zum ZP t
- $y''(t)$ Beschleunigung zum ZP t

Problem: $\quad y$ unbekannt, Zusammenhang zwischen $y, y', y'' \dots$ bekannt

(1.2) Wachstum der Erdbevölkerung

- $y(t)$ = Bevölkerung der Erde in Mrd. zum ZP t in Jahren $t \in I = (-\infty, \infty)$
- $y(0) = 7{,}8$ $\quad$ (7,8 Mrd. Menschen zum ZP 0, Juni 2020)
- Modell für das Bevölkerungswachstum:

  Zuwachs y' proportional zur Bevölkerung y

  also $\quad y'(t) = \alpha \cdot y(t) \quad$ mit $\alpha > 0$

  sehr einfaches Modell (zu einfach)

$\Rightarrow$ Gesucht ist eine Funktion $y: I \to \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{y'(t) = \alpha \cdot y(t) \quad \text{und} \quad y(0) = 7{,}8}$$

gewöhnliche Differentialgleichung — Anfangsbedingung

- $y(t) = e^{\alpha t}$ $\quad y'(t) = \alpha \cdot e^{\alpha t}$ $\quad y(0) = 1$

  DGL erfüllt — Anfangsbed. nicht erfüllt

- $y(t) = 7{,}8\, e^{\alpha t}$ $\quad y'(t) = \alpha \cdot 7{,}8 e^{\alpha t}$ $\quad y(0) = 7{,}8$

  DGL erfüllt — Anfangsbed. erfüllt

  ist die einzige Lösung

- Bestimmung von α

  Alle 50 Jahre verdoppelt sich die Erdbevölkerung

  $\Rightarrow y(50) = 15{,}6$

  $\Rightarrow 7{,}8 \cdot e^{\alpha \cdot 50} = 15{,}6$

  $\Rightarrow e^{\alpha \cdot 50} = 2$

  $\Rightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{50} \approx 0{,}01386$

$\Rightarrow y(t) = 7{,}8 \cdot e^{\frac{\ln 2}{50} t}$

$y(0) = 7{,}8 \qquad y(1) \approx 7{,}9 \qquad y(20) \approx 10{,}3 \qquad y(30) \approx 11{,}8$

(1.3) Definition

(a) Eine Gleichung der Form

$$\boxed{F(t, y, y', y'', \ldots) = 0} \quad (*)$$

für eine Fkt. $y = y(t)$ heißt gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) für $y = y(t)$

(b) Die höchste auftretende Ableitungsordnung von y heißt Ordnung der DGL

(c) Eine Fkt $y: I \to \mathbb{R}$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall heißt explizite Lösung der DGL $(*)$, falls y auf I n-mal differenzierbar ist (n = Ordnung) und falls für alle Argumente $t \in I$ gilt:

$$\boxed{F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0}$$

Beispiele

(a) $y' = e^t$ DGL 1. Ordnung für $y = y(t)$

Lösung $y = \int y' \, dt = \int e^t \, dt = e^t + c \quad c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad \boxed{y = e^t + c, \; c \in \mathbb{R}}$ Kurvenschar

Funktionsschar $y = y(t,c)$ ergibt für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine explizite Lsg.

(b) $y'' = e^t$ DGL 2. Ordnung für $y = y(t)$

Lösung $y' = \int y'' \, dt = \int e^t \, dt = e^t + c_1$

$y = \int y' \, dt = \int e^t + c_1 \, dt = e^t + c_1 t + c_2$

$\Rightarrow \quad \boxed{y = e^t + c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$

Kurvenschar $y = y(t, c_1, c_2) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Bezeichnung

Lösung $y = y(t)$ einer DGL n-ter Ordnung

spezielle Lösung

$y = y(t)$ ist konkrete Fkt. ohne frei wählbare Konstante

Bsp: $y(t) = e^t + 17t + 42$

allgemeine Lösung

$y = y(t, c_1, \dots, c_n)$ ist Kurvenschar mit n frei wählbaren Konstanten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

(Bsp: $y(t) = e^t + c_1 t + c_2 \quad (n=2)$)

(1.4) Anfangswertproblem (AWP) n-ter Ordnung

Gesucht sind alle Fkt $y = y(t)$ $t \in I$ mit

$\boxed{F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0}$ ODGL n-ter Ordnung

und

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{array}}\right\}$$

n Anfangsbedingungen für $y = y(t)$ an der Stelle $t_0 \in I$

<u>Beispiel</u>

ODGL: $y'' = e^t$, $y = y(t)$

AB: $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

- allg. Lsg. der ODGL: $y(t) = e^t + c_1 t + c_2$

  $\Rightarrow y'(t) = e^t + c_1$

- $y(0) = e^0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \overset{!}{=} 2 \Rightarrow 1 + c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 1$

  $y'(0) = e^0 + c_1 \overset{!}{=} 1 \Rightarrow 1 + c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0$

$\Rightarrow$ AWP hat die Lösung $y_{AWP}(t) = e^t + 1$

<u>Bemerkung</u>

Ein AWP besitzt (bei uns) meist genau eine Lsg.

2. Gewöhnliche DGLen 1. Ordnung

(2.1) Explizite DGL 1. Ordnung

Betrachten eine explizite DGL 1. Ordnung der Form

$$\boxed{y' = f(t,y)} \quad (*)$$

für die Funktion $y = y(t)$ sowie ein Rechteck $D \subseteq \mathbb{R}^2$ der Form

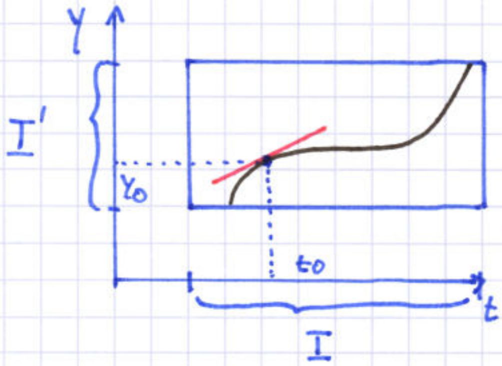
$$D = \{ (t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I, \; y \in I' \}$$

Bemerkung

Ist $y = y(t)$ Lösung von $(*)$ mit $y(t_0) = y_0$, so gilt

$$y'(t_0) = f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, y_0)$$

d.h. $f(t_0, y_0)$ gibt den Anstieg der Lösungskurve im Punkt (t_0, y_0) an



Lösungskurve $y = y(t)$

mit $y(t_0) = y_0$

$f(t_0, y_0)$ = Anstieg der Tangenten

$\Rightarrow \quad T(t) = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot (t - t_0)$ Gleichung der Tangenten

$\Rightarrow$ Näherungslösung bestimmbar

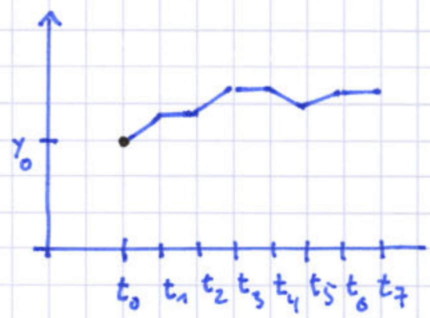
Eulersches Polygonzugverfahren mit Schrittweite h

Geg. AWP $\quad y' = f(t,y) \quad y(t_0) = y_0$

Für $i = 0 \ldots m$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \cdot h$$



Existenz von Lösungen (hinreichende Bedingung)

Satz (Peano)

Ist f stetig auf D, so verläuft durch jeden inneren Punkt $(t_0, y_0) \in D$ mindestens eine Lösung von (*), d.h. das AWP

$$\boxed{y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0}$$

hat wenigstens eine Lösung $y = y(t)$ die nach beiden Seiten bis zum Rand von D verläuft.

Eindeutigkeit der Lösung (hinreichende Bedingung)

Ist sowohl f als auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig auf D, so verläuft durch jeden inneren Punkt $(t_0, y_0) \in D$ genau eine Lösung, die nach beiden Seiten bis zum Rand verläuft.

Beispiel 1 $\quad y' = 2\sqrt{y} \quad y(1) = 1$

- $D = \{(t,y) \mid a \le t \le b,\ 0 \le y \le c\}$
- f stetig auf D $\quad f_y = \frac{1}{\sqrt{y}}$ unstetig in $(t, 0)$
- AWP $y' = 2\sqrt{y} \quad y(1) = 1 \quad (t_0, y_0) = (1,1)$ innerer Punkt
- Lsg: $y_1(t) = t^2 \quad t > 0 \qquad y_2(t) = \begin{cases} t^2 & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

Probe $\quad y_1'(t) = 2t \quad y_1(1) = 1 \qquad y_2'(t) = \begin{cases} 2t & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$2\sqrt{y_1(t)} = 2t \quad \forall t \ge 0 \qquad 2\sqrt{y_2(t)} = y_2'(t) \quad \forall t$

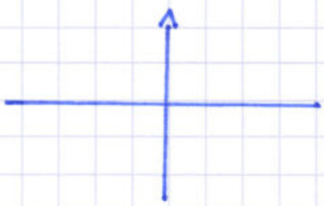
Beispiel 2 $\quad y' = 2\sqrt{|y|} \quad y(0) = 0$

- $D = \{(t,y) \mid -a \le t \le a,\ -b \le t \le b\}$ (oder $D = \mathbb{R}^2$)

Lösung $\quad \bullet\ y_c(t) = \begin{cases} (t-c)^2 & t \ge c \\ 0 & t < c \end{cases} \quad \Rightarrow y_c'(t) = \begin{cases} 2(t-c) & t \ge c \\ 0 & t < c \end{cases}$

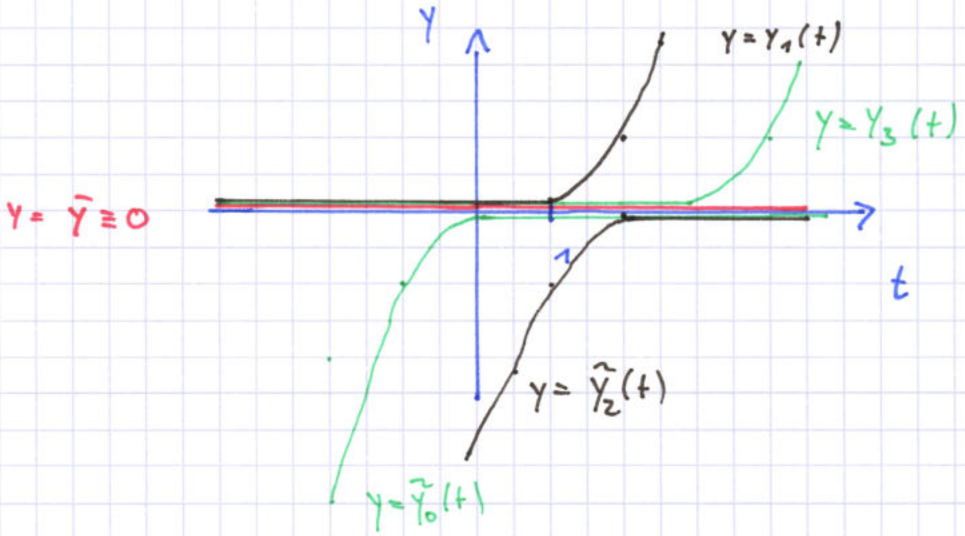
$y_c'(t) = 2\sqrt{|y_c(t)|} \qquad y_c(0) = 0$ für $c > 0$

- $\bar{y}(t) \equiv 0 \qquad \bar{y}(0) = 0$



$$\bullet \quad \tilde{y}_c(t) = \begin{cases} -(t-c)^2 & t \le c \\ 0 & t > c \end{cases} \Rightarrow \tilde{y}_c'(t) = \begin{cases} -2(t-c) & t \le c \\ 0 & t > c \end{cases}$$

$$2\sqrt{|\tilde{y}_c(t)|} = \begin{cases} 2|t-c| & t \le c \\ 0 & t > c \end{cases} = \begin{cases} -2(t-c) & t \le c \\ 0 & t > c \end{cases}$$



$y' = 2\sqrt{|y|}$

(2.2.) Spezielle Typen von DGL 1. Ordnung

(I) DGL mit getrennten Variablen

Normalform $\quad y' = g(t) \cdot h(y) \quad (t, y) \in D$

(1) Nullstellen von h bestimmen

Ist $h(y_0) = 0$, so ist $y \equiv y_0$ eine spezielle Lösung der DGL (konstante Lösung)

(2) Trennung der Variablen zur Bestimmung der restlichen Lösungen $(h(y) \neq 0)$

$$\frac{1}{h(y)} \cdot y' = g(t)$$

$$\int \underbrace{\frac{1}{h(y)}}_{\substack{\text{äußere} \\ \text{Ableitung}}} \cdot \underbrace{y'}_{\substack{\text{innere} \\ \text{Ableitung}}} dt = \int g(t)\, dt$$

Umkehrung der Kettenregel

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(t)\, dt$$

Ausrechnen und nach y auflösen

Kurzform für (2) $\quad y' = \frac{dy}{dt} = g(t) \cdot h(y)$

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t)\, dt \quad \text{fertig}$$

Bsp I:

- $y' = y \cdot \cos t \qquad (t, y) \in \mathbb{R}^2$
- $h(y) = y \qquad g(t) = \cos t$
- $h(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow$ spezielle Lösung $y(t) \equiv 0 \quad t \in \mathbb{R}$
- Im Folgenden $y \neq 0 \Rightarrow h(y) \neq 0$

$$y' = \frac{dy}{dt} = y \cos t$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \cos t\, dt$$

$$\ln|y| = \sin t + C_1 \qquad c_1 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

$$\Rightarrow \quad |y| = e^{\sin t + c_1}$$

$$|y| = e^{\sin t} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{>0}$$

$$y = \underbrace{\pm e^{c_1}}_{=: c_2 \neq 0} \cdot e^{\sin t}$$

$$y = c_2 \, e^{\sin t} \qquad c_2 \in \mathbb{R} \quad c_2 \neq 0$$

- Zusammen mit Sonderlösung $y \equiv 0$ ergibt sich als allgemeine Lösung $y = y(c,t)$

$$\underline{\underline{y = c \cdot e^{\sin t}}} \qquad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

- Anfangswertproblem $\quad y' = y \cdot \cos t \qquad y(0) = -4$

  allg. Lsg der DGL: $\quad y(t) = c\, e^{\sin t}$

  Anfangsbedingung $\quad -4 = y(0) = c \cdot e^{\sin 0} = c$

  $\Rightarrow \quad \underline{\underline{y_{AWP}(t) = -4\, e^{\sin t} \qquad t \in \mathbb{R}}}$

<u>Bemerkung</u>

- $y' = f(t,y) = y \cdot \cos t \qquad f_y = \cos t$
- f und f_y stetig auf $D = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Durch jeden Punkt $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ verläuft genau 1 Lsg der DGL

  $\Rightarrow$ AWP $\quad y' = y \cdot \cos t \quad y(t_0) = y_0$ hat genau 1 Lsg.

<u>Bsp 2</u>

- $y' = \cos^2 y \cdot t \qquad h(y) = \cos^2 y \quad g(t) = t$
- $f_y = -2 \cos y \sin y \cdot t \qquad \Rightarrow f, f_y$ stetig auf $D = \mathbb{R}^2$

  $\Rightarrow$ jedes AWP eindeutig lösbar
- $h(y) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 y = 0 \Leftrightarrow \cos y = 0 \Leftrightarrow y = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

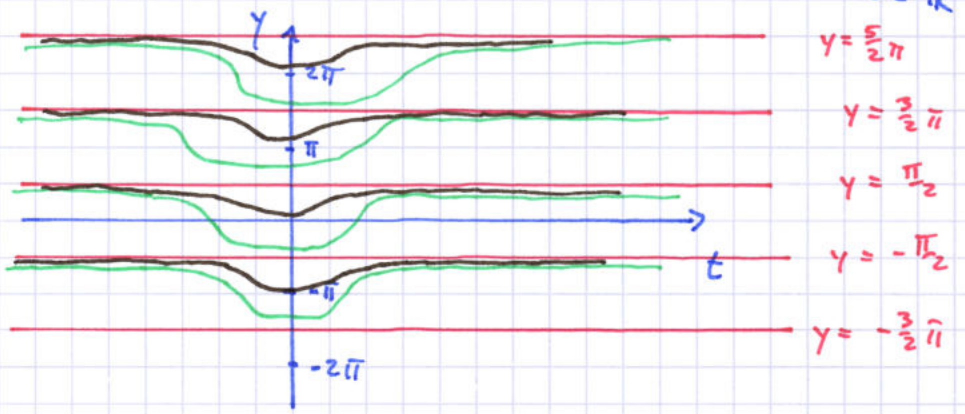
  $\Rightarrow$ konstante Sonderlösungen $\underline{\underline{y_k = \frac{\pi}{2} + k\pi}}$
- restliche Lösungen

$$\frac{dy}{dt} = \cos^2 y \cdot t$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 y}\, dy = \int t\, dt$$

$$\tan y = \frac{1}{2} t^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \quad y_\ell(t) = \arctan\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right) + \ell \cdot \pi \qquad \ell \in \mathbb{Z}, \; c \in \mathbb{R}$



II Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Normalform: $\quad y' = h\left(\frac{y}{t}\right) \qquad (t, y) \in D \qquad t \neq 0$

Bsp: a) $y' = \dfrac{t^2 + y^2}{ty} = \dfrac{t^2\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right)}{t^2\left(\frac{y}{t}\right)} = \dfrac{1 + \frac{y^2}{t^2}}{\frac{y}{t}} \Rightarrow h(z) = \dfrac{1+z^2}{z}$

b) $y' = \dfrac{t^2 y + y^3}{t^2 y^2} = \dfrac{t^3\left(\frac{y}{t} + \frac{y^3}{t^3}\right)}{t^3\left(\frac{y^2}{t}\right)} = \dfrac{y/t + \left(\frac{y}{t}\right)^3}{y^2/t}$ keine Ähnlichkeits-DGL

c) $y' = \frac{y}{t} \cdot \cos\frac{y}{t} \Rightarrow \quad h(z) = z \cdot \cos z$

Lösungsalgorithmus

1. Schritt

Substitution	$z = \frac{y}{t}$	$y = y(t)$
Rücksubstitution	$y = z \cdot t$	$z = z(t)$
Ableitung	$y' = z' \cdot t + z$	Produktregel

2. Schritt

Einsetzen in Ausgangsgleichung

$$y' = h\left(\frac{y}{t}\right)$$

ergibt DGL für $z = z(t)$

$$z' t + z = h(z)$$

$$z' = \frac{1}{t}\left(h(z) - z\right)$$

$\Rightarrow$ DGL mit getrennten Variablen. Bestimmen $z = z(t)$ und erhalten durch Rücksubst. $y = tz$ Lösungen der Original DGL

Beispiel: $\quad y' = \dfrac{t^2+y^2}{ty} = \dfrac{1+\frac{y^2}{t^2}}{\frac{y}{t}} \qquad t, y \neq 0$

1. Schritt $\quad z = \dfrac{y}{t} \qquad y = tz \qquad y' = z + tz'$

2. Schritt Einsetzen in Ausgangs-DGL

$$z + tz' = \frac{1+z^2}{z} = \frac{1}{z} + z$$

$$\Rightarrow z' = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{dz}{dt} = \underbrace{\frac{1}{t}}_{g(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{z}}_{h(z)}$$

$h(z)$ hat keine NS

$\Rightarrow$ keine Sonderlösung

$$\int z\,dz = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$\frac{1}{2} z^2 = \ln|t| + c$$

$$z^2 = 2\ln|t| + 2c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$z = \pm\sqrt{\ln t^2 + 2c} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{y = tz = \pm t\sqrt{\ln t^2 + 2c}}}$$

III Exakte DGL

Betrachten DGL 1. Ordnung für Fkt $y = y(x)$ der Form

$$\boxed{\begin{aligned} &P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0 \\ &P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad y' = \frac{dy}{dx} \end{aligned}} \qquad (*)$$

Voraussetzung

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei Rechteck. Die Fkt. $P = P(x,y)$ und $Q = Q(x,y)$ seien stetig diff'bar auf D

Definition

DGL $(*)$ heißt exakte DGL auf D, falls es eine Funktion $F = F(x,y)$ gibt mit

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

für alle $(x,y) \in D$.

Dann gilt für das Differential von F

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = P\,dx + Q\,dy$$

und man nennt F Stammfunktion von (P, Q) auf D.

$$\operatorname{grad} F = (P, Q)$$

Allgemeine Lösung von (*)

Ist (*) eine exakte DGL und F eine Stammfunktion von (P, Q), so erhalten wir aus der DGL (*)

$$\forall (x,y) \in D: \quad dF = P\,dx + Q\,dy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F(x,y) = c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Die Kurvenschar

$$\boxed{F(x,y) = c \qquad c \in \mathbb{R}}$$

ist damit die Lösung von (*) in impliziter Form.

Integrabilitätsbedingung

Die DGL (*) $P\,dx + Q\,dy = 0$ ist genau dann eine exakte DGL, wenn für alle $(x,y) \in D$ gilt

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Bestimmung einer Stammfunktion F

Bestimmungsgleichung $\quad F_x = P \qquad F_y = Q$

- $F_x = P \quad \Rightarrow \quad F = \int F_x\,dx = \int P(x,y)\,dx = \tilde{P}(x,y) + c(y)$ mit $\tilde{P}_x = P$
- $F_y = Q \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{P}(x,y) + c(y)\right) = Q(x,y)$

$$\tilde{P}_y + c'(y) = Q$$

$\Rightarrow$ Gleichung für c' $\Rightarrow$ $c(y) = \int c'(y)\,dy$

$\Rightarrow$ F bestimmt

Beispiel

DGL für $y = y(x)$: $\quad y' = -\dfrac{2x + 3\cos y}{2y - 3x\sin y} \qquad y = y(x) \qquad y' = \dfrac{dy}{dx}$

umformen
$$2x + 3\cos y + (2y - 3x\sin y)\, y' = 0$$
$$\underbrace{(2x + 3\cos y)}_{P}\, dx + \underbrace{(2y - 3x\sin y)}_{Q}\, dy = 0$$

Integrabilitätsbedingung

$$\left.\begin{array}{l} P_y(x,y) = -3\sin y \\ Q_x(x,y) = -3\sin y \end{array}\right\} \Rightarrow P_y(x,y) = Q_x(x,y) \quad \forall (x,y) \in D = \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow$ $P\,dx + Q\,dy$ ist exakte DGL auf $D = \mathbb{R}^2$

Stammfunktion $F = F(x,y)$

- $F_x = P = 2x + 3\cos y \qquad F_y = Q = 2y - 3x\sin y$
- $F = \int F_x\, dx = \int (2x + 3\cos y)\, dx = x^2 + 3x\cos y + c(y)$
- $F_y = -3x\sin y + c'(y) \overset{!}{=} Q(x,y) = 2y - 3x\sin y$

  $\Rightarrow c'(y) = 2y \quad \Rightarrow c(y) = \int 2y\, dy = y^2 + \tilde{c} \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}$

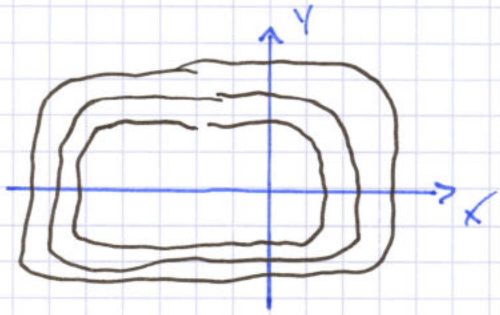
$\Rightarrow F(x,y) = x^2 + 3x\cos y + y^2$ ist eine Stammfkt $\quad (\tilde{c} = 0)$

- F eindeutig bestimmt bis auf additive Konstante

Allgemeine Lösung der DGL $P\,dx + Q\,dy = 0$

$$F(x,y) = c$$

$$x^2 + 3x\cos y + y^2 = c \qquad \text{Kurvenschar in } x\text{-}y\text{-Ebene}$$



3. Lineare Differentialgleichungen

(3.1) Lineare DGL n-ter Ordnung für $y = y(t)$

(1) Normalform

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b} \qquad (*)$$

- $a_k = a_k(t)$: Koeffizientenfunktionen
- $b = b(t)$: Störfunktion / Inhomogenität
- Die lineare DGL (*) heißt <u>homogen</u>, falls $b(t) \equiv 0$ sonst <u>inhomogen</u>

<u>Bsp:</u>

- $y'' - t^2 y' + 3y = e^t - 5$: inhomogene LDGL 2. Ordnung
- $y'' - 2y' + 6y = e^t$: inhomogene LDGL 2. Ordnung mit konst. Koeff.
- $y' = \sin t \cdot y + t^2$: inhomogene LDGL 1. Ordnung

(2) Anfangswertproblem

Sind die Koeffizientenfunktionen $a_k = a_k(t)$ und die Störfunktion $b = b(t)$ stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, so besitzt das AWP

$$\boxed{\begin{array}{l} y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{array}}$$

mit $t_0 \in I$ und $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$

(3.2) Lösungsstruktur

Geg: LDGL $\quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b \qquad (*)$

- $y \in V = C^{(n)}(I, \mathbb{R}) = \{ y : I \to \mathbb{R} \mid y$ n mal stetig diff'bar auf $I \}$

  V ist Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ (siehe Kapitel III)
- $W = C^0(I, \mathbb{R}) = \{ b : I \to \mathbb{R} \mid b$ stetig auf $I \}$

  W ist $\mathbb{R}$ - VR
- Betrachten Abb $L : V \to W$ mit $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$

  mit $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in C^0(I, \mathbb{R})$

Behauptung: L ist eine lineare Abbildung

Beweis: Seien $y_1, y_2, y \in V$ $\quad c \in \mathbb{R}$

$$\bullet\ L(y_1+y_2) = (y_1+y_2)^{(n)} + a_{n-1}(y_1+y_2)^{(n-1)} + \ldots + a_1(y_1+y_2)' + a_0(y_1+y_2)$$
$$= \left(y_1^{(n)} + a_{n-1}y_1^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_1' + a_0 y_1\right) + \left(y_2^{(n)} + a_{n-1}y_2^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_2' + a_0 y_2\right)$$
$$= L(y_1) + L(y_2)$$

$$\bullet\ L(c\cdot y) = (cy)^{(n)} + a_{n-1}\cdot(cy)^{(n-1)} + \ldots + a_1(cy)' + a_0\cdot(cy)$$
$$= c\cdot\left(y^{(n)} + a_{n-1}\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y\right)$$
$$= c \cdot L(y)$$

■

Damit ist die LDGL (*) eine Gleichung der Form $L(y) = b$ mit $L: V \to W$ linear also eine lineare Gleichung. Aus dem Hauptsatz über lineare Gleichungen (Kap III) folgt unmittelbar folgender Satz:

Satz (Lösungsstruktur linearer Differentialgleichungen)

Sei $\Gamma = \{ y \in C^{(n)}(I, \mathbb{R}) \mid y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b \}$

die Lösungsmenge der inhomogenen LDGL (*) und

$$\mathcal{U} = \{ y \in C^{(n)}(I, \mathbb{R}) \mid y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \}$$

die Lösungsmenge der zugehörigen homogenen LDGL. Dann gilt:

(1) $\mathcal{U}$ ist ein linearer UR von $C^{(n)}(I, \mathbb{R})$

(2) $\Gamma = y_s + \mathcal{U}$ ist affiner UR von $C^{(n)}(I, \mathbb{R})$

wobei y_s eine spezielle Lsg. der inhomogenen LDGL (*) ist.

Bemerkungen

- Kurzform von (2): $\boxed{y_{allg} = y_s + y_h}$

  y_{allg}: allgemeine Lsg der inhomogenen LDGL

  y_s: eine spezielle Lsg der inhomogenen LDGL

  y_h: allg. Lsg der zugehörigen homogenen LDGL

- statt spezielle Lsg auch partikuläre Lsg

- $\dim(\mathcal{U}) = n =$ Ordnung der LDGL $\Rightarrow$ sind $y_1, \ldots, y_n$ lin. unabh. Lösungen der homogenen LDGL so ist $y_h = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$

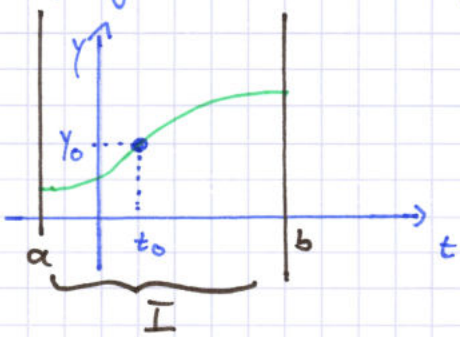
(3.3) Lineare DGL 1. Ordnung

Normalform

$$\boxed{y' + a(t)\cdot y = b(t)} \qquad (*)$$

Existenz und Eindeutigkeit

Ist $D = \{(t,y)\in\mathbb{R}^2 \mid t\in I,\ y\in\mathbb{R}\}$ ein Streifen mit $I\subseteq\mathbb{R}$ Intervall und sind a, b stetige Funktionen auf I, so verläuft durch jeden Punkt $(t_0, y_0)\in D$ genau eine Lösungskurve der LDGL $(*)$, die auf ganz I definiert ist.



Beweis folgt aus allgemeinem Existenz und Eindeutigkeitssatz für DGL 1. Ordnung

Lösungsalgorithmus

a) Allgemeine Lösung der homogenen LDGL $y' + a(t)y = 0$ (+)

(+) ist eine DGL mit getrennten Variablen und die Lösung y_h hat die Form $y_h(t) = c\cdot y_1(t)$ $\quad c\in\mathbb{R}$

$$y' + a(t)y = 0$$

$$y' = \underbrace{-a(t)}_{g(t)}\cdot\underbrace{y}_{h(y)} \qquad y' = \frac{dy}{dt}$$

$\underline{y\equiv 0 \text{ ist konstante Lösung von } (+)}$

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dt} = -a(t)\,y$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -a(t)\,dt \qquad \text{Sei } A(t) \text{ Stammfkt. von } -a(t)$$

$$\Rightarrow \ln|y| = A(t) + c_1 \qquad c_1\in\mathbb{R}$$

$$|y| = e^{A(t)+c_1} = e^{A(t)}\cdot e^{c_1}$$

$$y = \pm e^{c_1}e^{A(t)} = c_2\, e^{A(t)} \qquad c_2\neq 0$$

mit Sonderlösung $\Longrightarrow$ $\quad \underline{y_h = c\,\underbrace{e^{A(t)}}_{y_1}} \qquad c\in\mathbb{R}$ beliebig

(b) Spezielle Lösung y_s der inhomogenen LDGL $y' + a(t)y = b(t)$ (*)

Bestimmen eine spezielle Lösung $y_s = y_s(t)$ durch die Methode der Variation der Konstanten.

- Ansatz: $y_s = c(t) \cdot y_1(t)$

  Lsg. der homogenen DGL

- Ableitung: $y_s' = c'(t) \cdot y_1 + c(t) \cdot y_1'$

- Einsetzen in $y_s' + a(t) y_s = b(t)$

$$c'(t) y_1 + \underbrace{c(t) y_1' + a(t) \cdot c(t) \cdot y_1}_{= 0 \text{ da } y_1' + a(t) y_1 = 0} = b(t)$$

$$\Rightarrow c'(t) = b(t)/y_1$$

$$c(t) = \int c'(t)\, dt$$

- Ergebnis in Ansatz einsetzen $y_s = c(t) \cdot y_1$

(c) Allgemeine Lösung y_{in} der inhomogenen LDGL $y' + a(t)y = b(t)$

$$y_{in} = y_s + y_h$$

allg. Lsg der inhomogenen LDGL

eine spezielle Lsg der inhomogenen LDGL

allgemeine Lösung der homogenen LDGL

Beispiel $\quad y' + \frac{1}{t} y = t^3 \qquad D = \{ (t,y) \mid t>0, y \in \mathbb{R} \}$ oder $\{ (t,y) \mid t<0, y \in \mathbb{R} \}$

a) allgemeine Lösung der homogenen LDGL $\quad y' + \frac{1}{t} y = 0$

$$\frac{dy}{dt} = y' = -\frac{1}{t} y \qquad \Rightarrow \text{ konstante Lösung } y \equiv 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{t} dt$$

$$\ln|y| = -\ln|t| + c_1$$

$$|y| = e^{-\ln|t| + c_1} = e^{\ln \frac{1}{|t|}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = \pm e^{c_1} \cdot \frac{1}{|t|}$$

$$y = c_2 \cdot \frac{1}{t} \qquad c_2 \neq 0$$

mit konst. Lsg $\quad \underline{\underline{y_h = c \cdot \frac{1}{t}}} \qquad c \in \mathbb{R}$ beliebig

b) spezielle Lösung y_s der inhomogenen LDGL $\quad y' + \frac{1}{t} y = t^3$

- Ansatz: $\quad y_s = c(t) \cdot \frac{1}{t}$
- Ableitung: $\quad y_s' = c'(t) \cdot \frac{1}{t} + c(t) \cdot -\frac{1}{t^2}$
- Einsetzen in $\quad y_s' + \frac{1}{t} y_s = t^3$

$$c'(t) \cdot \frac{1}{t} - \frac{c(t)}{t^2} + \frac{c(t)}{t^2} = t^3$$

$$c'(t) \cdot \frac{1}{t} = t^3$$

$$c'(t) = t^4$$

$$c(t) = \frac{1}{5} t^5 + \tilde{c}$$

- Einsetzen in Ansatz: $\quad \underline{\underline{y_s = \frac{1}{5} t^5 \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{5} t^4}}$

c) allgemeine Lösung y_{in} der inhomogenen Gleichung $\quad y' + \frac{1}{t} y = t^3$

$$y_{in} = y_s + y_h$$

$$\underline{\underline{y_{in} = \frac{1}{5} t^4 + c \cdot \frac{1}{t}}} \qquad t \in I, \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

$$I = (-\infty, 0) \text{ oder } (0, \infty)$$

(3.4.) Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

<u>Gegeben</u> $\quad y_1, \dots, y_n \in C^{(4)}(I, \mathbb{R}) \quad n$ Funktionen

Die Fkt. sind linear unabhängig, wenn keine der Fkt. Linearkombination der anderen ist

<u>Kriterium I</u>

Die Fkt. $y_1, \dots, y_n$ sind genau dann linear unabhängig wenn die Gleichung

$$\boxed{c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0 \quad , \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}} \qquad (\diamond)$$

nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ hat. Die Gleichung $(\diamond)$ ist eine Gleichung für Funktionen und äquivalent zu

$$\forall t: \quad c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0$$

Durch Differentiation erhält man für die k-te Ableitung:

$$c_1 y_1^{(k)} + \dots + c_n y_n^{(k)}$$

<u>Kriterium II</u>

Aus $(\diamond)$ folgt für jedes t:

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) &= 0 \\ c_1 y_1'(t) + \dots + c_n y_n'(t) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}}_{=: W(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wronski-Matrix

- Die Fkt. sind linear unabhängig genau dann wenn $\det(W(t)) \neq 0$ für ein $t \in I$.
- Sind $y_1, \dots, y_n$ Lösungen einer homogenen LDGL, gilt sogar
  $y_1, \dots, y_n$ lin unabh $\Leftrightarrow \exists t \in I : \det(W(t)) \neq 0 \Leftrightarrow \forall t \in I : \det(W(t)) \neq 0$

(3.5) Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Geg: LDGL

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + .. + a_1 y' + a_0 y = b} \qquad (*)$$

mit $a_{n-1}, ..., a_0 \in \mathbb{R}$ konstante Koeffizienten

(A) Allgemeine Lösung der homogenen LDGL

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0} \qquad (+)$$

(3.2) $\Rightarrow$ Lösungsmenge ist lin UR von $C^{(n)}(I, \mathbb{R})$ der Dimension n

$\Rightarrow$ Sind $y_1, ..., y_n$ lin. unabh. Lsg. von (+) dann sind sie Basis des Lösungsraumes, d.h. für die allg. Lsg y_h von (+) gilt:

$$\boxed{y_h = c_1 y_1 + ... + c_n y_n \,, \quad c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}}$$

<u>Bestimmung einer Basis des Lösungsraumes von (+)</u>

- Ansatz: $y = e^{\lambda t}$ (suchen Lösungen von (+) dieser Form), $\lambda \in \mathbb{R}$
- Ableitungen: $y' = \lambda e^{\lambda t}, \; y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}, \; ..., \; y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t}$
- Einsetzen in (+):

$$\lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + ... + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

$:e^{\lambda t}$

$$\boxed{\underbrace{\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + ... + a_1 \lambda + a_0}_{=: P(\lambda) \text{ charakteristisches Polynom}} = 0}$$

- Auswertung:
  - Für jede NS λ von $P(\lambda)$ erhalten wir eine Lösung $y = e^{\lambda t}$ von (+)
  - $P(\lambda)$ hat n Nullstellen in $\mathbb{C}$ gezählt mit ihren algebraischen Vielfachheiten

Erhalten n Basislösungen von $(+)$ wie folgt:

- Ist $\lambda = a$ reelle NS von $P(\lambda)$ der Vielfachheit $r > 0$ so erhalten wir r linear unabhängige Lösungen
$$y_1 = e^{at}, \quad y_2 = t e^{at}, \ldots, \quad y_r = t^{r-1} e^{at}$$

- Ist $\lambda = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0)$ komplexe NS von $P(\lambda)$ mit Vfh $r \geq 1$ so ist $a - ib$ ebenfalls komplexe r-fache NS. Wir erhalten komplexe Lösungen
$$t^\alpha e^{\lambda t} = t^\alpha e^{(a+ib)t} = t^\alpha e^{at} e^{ibt} = t^\alpha e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$$
$$t^\alpha e^{\bar{\lambda} t} = t^\alpha e^{(a-ib)t} = t^\alpha e^{at} e^{-ibt} = t^\alpha e^{at}(\cos bt - i \sin(bt))$$
$$\alpha \in \{0, \ldots, r-1\}$$

Dann sind auch die (komplexen) Linearkombinationen
$$\tfrac{1}{2}\left(t^\alpha e^{\lambda t} + t^\alpha e^{\bar{\lambda} t}\right) = t^\alpha e^{at} \cos bt$$
$$\tfrac{1}{2i}\left(t^\alpha e^{\lambda t} - t^\alpha e^{\bar{\lambda} t}\right) = t^\alpha e^{at} \sin bt$$
Lösungen von $(+)$, da die Lösungsmenge ein lin UR ist

$\Rightarrow$ $2r$ linear unabhängige Lösungen von $(+)$
$$y_{11} = e^{at} \cos bt, \quad y_{12} = t e^{at} \cos bt, \ldots, y_{1r} = t^{r-1} e^{at} \cos bt$$
$$y_{21} = e^{at} \sin bt, \quad y_{22} = t e^{at} \sin bt, \ldots, y_{2r} = t^{r-1} e^{at} \sin bt$$

<u>Beispiel</u>

a) $y'' - 2y' - 3y = 0 \qquad y = y(t)$

- Ansatz $\quad y = e^{\lambda t}$
- Ableitungen $\quad y' = \lambda e^{\lambda t}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$
- Einsetzen in $\quad y'' - 2y' - 3y = 0$
$$\lambda^2 e^{\lambda t} - 2\lambda e^{\lambda t} - 3 e^{\lambda t} = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \text{NS } \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3$$
$\Rightarrow y_1 = e^{-t}, \ y_2 = e^{3t} \quad \Rightarrow$ allg Lsg: $\quad \underline{\underline{y_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}}$

b) $y'' + 4y = 0$

- Ansatz $y = e^{\lambda t}$ $\quad (y' = \lambda e^{\lambda t},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda t})$
- Einsetzen $\lambda^2 e^{\lambda t} + 4e^{\lambda t} = 0$

$\lambda^2 + 4 = 0 \qquad$ NS $\lambda = \pm 2i$

komplexe Lsg $\left.\begin{aligned} e^{2it} &= \cos 2t + i\sin 2t \\ e^{-2it} &= \cos 2t - i\sin 2t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= \cos 2t \\ y_2 &= \sin 2t \end{aligned}$

allg. Lsg $\underline{\underline{=: y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t}} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

c) $y'' - 2y' + y = 0$

- Ansatz $y = e^{\lambda t}$
- Einsetzen $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$
- Nullstellen $\lambda_{1/2} = 1$ doppelte NS
- Basis $y_1 = e^t,\ y_2 = t \cdot e^t$
- allg. Lsg $\underline{\underline{=: y_h = c_1 e^t + c_2 t e^t}}$

d) $y'' + 4y' + 13 = 0$

- Ansatz $y = e^{\lambda t}$
- Einsetzen $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$
- Nullstellen $\lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13}$

$\lambda_{1/2} = -2 \pm 3i$

- Basis $y_1 = e^{-2t} \cdot \cos 3t,\ y_2 = e^{-2t} \cdot \sin 3t$
- allg. Lsg $y_h = c_1 e^{-2t} \cos 3t + c_2 e^{-2t} \sin 3t \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\underline{\underline{y_h = e^{-2t}\left(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t\right)}} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(B) Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen LDGL

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b}$$

1. Methode: Variation der Konstanten

Vorteil: • funktioniert auch bei LDGL mit nicht konstanten Koeffizienten $a_k = a_k(t)$

Nachteil: Rechenaufwand

Ausgangspunkt: allgemeine Lsg der homogenen LDGL

$$y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \qquad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

Ansatz für y_s: $\quad y_s = c_1(t) y_1 + \dots + c_n(t) \cdot y_n$

Bestimmen Ableitungen mit Produktregel

$$y_s = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \qquad \cdot a_0$$

$$y_s' = c_1 y_1' + \dots + c_n y_n' + \underbrace{c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n}_{\equiv 0 \text{ willkürlich festgelegt}} \qquad \cdot a_1$$

$$y_s'' = c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n'' + \underbrace{c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n'}_{\equiv 0} \qquad \cdot a_2$$

$$\vdots$$

$$y_s^{(n-1)} = c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} + \underbrace{c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)}}_{\equiv 0} \qquad \cdot a^{(n-1)}$$

$$y_s^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} + c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} \qquad +$$

$$b = 0 + \dots + 0 + \underline{c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ LGS für $c_1', \dots, c_n'$

Bestimmen Lösung z.B. mit Cramerscher Regel

$c_k = \int c_k' \, dt \qquad \Rightarrow y_s$

<u>Beispiel</u> $\qquad y'' - 2y' - 3y = -6e^{2t}$

- allg. Lsg der homogenen LDGL $y'' - 2y' - 3y = 0$

$$\Rightarrow y_h = \underline{\underline{c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}}} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \qquad \text{(siehe 1)}$$

- Ansatz für y_s

$$y_s = c_1(t)\, y_1 + c_2(t)\, y_2 \qquad y_1 = e^{-t},\ y_2 = e^{3t}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & 3e^{3t} \end{pmatrix}}_{W(t)} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6e^{2t} \end{pmatrix}$$

- $\det(W(t)) = 3e^{2t} + e^{2t} = 4e^{2t}$

- $c_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3t} \\ -6e^{2t} & 3e^{3t} \end{vmatrix}}{\det W} = \dfrac{6e^{5t}}{4e^{2t}} = \dfrac{3}{2} e^{3t} \qquad \Rightarrow c_1(t) = \dfrac{1}{2} e^{3t}$

- $c_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ -e^{-t} & -6e^{2t} \end{vmatrix}}{\det W} = \dfrac{-6e^{t}}{4e^{2t}} = -\dfrac{3}{2} e^{-t} \qquad \Rightarrow c_2(t) = \dfrac{3}{2} e^{-t}$

$$\Rightarrow y_s = c_1(t)\, e^{-t} + c_2(t)\, e^{3t} = \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{3}{2} e^{2t} = 2e^{2t}$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung der inhomogenen LDGL

$$\underline{\underline{y_{in} = y_s + y_h = 2e^{2t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}}} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. Methode : Spezielle Ansätze nach Typ der Inhomogenität

Vorteil : · leichter als Variation der Konstanten

Nachteil · geht nur bei LDGL mit konstanten Koeffizienten und speziellen Störfunktionen $b(t)$

· evtl. Resonanzfall

Bsp: $y'' - 2y' - 3y = 6t + 1$

· allg. Lsg der homogenen Gleichung : $y_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

· spezieller Ansatz für y_s :

Ansatz: $y_s = At + B \qquad A, B \in \mathbb{R}$

Ableitung: $y_s' = A \qquad y_s'' = 0$

Einsetzen in $y_s'' - 2y_s' - 3y_s = 6t + 1$

$0 - 2A - 3(At + B) = 6t + 1$

$-3At + (-2A - 3B) = 6t + 1$

Koeffizientenvgl. $\left.\begin{array}{l} t^1: \ -3A = 6 \\ t^0: \ -2A - 3B = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -2, B = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{y_s = -2t + 1}}$

· allg. Lsg der inhomogenen LDGL

$\underline{\underline{y_{in} = y_s + y_h = -2t + 1 + c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}}} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Ansätze :

Störfunktion $b(t)$	Ansatz für y_s (ohne Resonanz)
$b(t) = Q(t)$ Polynom vom Grad m	$y_s = A_m t^m + \ldots + A_1 t + A_0$ (allgemeines Polynom m-ten Grades)
$b(t) = Q(t) \cdot e^{at}$	$y_s = (A_m t^m + \ldots + A_1 t + A_0)\, e^{at}$
$b(t) = Q(t) \cos bt$ oder $Q(t) \sin bt$	$y_s = (A_m t^m + \ldots + A_0) \cos bt + (B_m t^m + \ldots + B_0) \sin bt$
$b(t) = Q(t)\, e^{at} \cos bt$ oder $b(t) = Q(t)\, e^{at} \sin bt$	$y_s = (A_m t^m + \ldots + A_0)\, e^{at} \cos bt + (B_m t^m + \ldots + B_0)\, e^{at} \sin bt$

Bemerkung

Ist $b(t) = b_1(t) + b_2(t) + \ldots$ so kann man für jeden Summanden $b_i(t)$ einen eigenen Ansatz machen

$\Rightarrow$ $y_{s_1}, \ldots$ $\qquad y_s = y_{s_1} + y_{s_2} + \ldots$ (Superpositionsprinzip)

Bsp: $\quad b(t) = \underline{4t^2} + \underline{t\,e^{2t}} + \underline{5} + \underline{2\cos 4t}$

$$y_s = \underbrace{At^2 + Bt + C}_{y_{s_1}} + \underbrace{(Dt+E)\,e^{2t}}_{y_{s_2}} + \underbrace{F\cos 4t + G\sin 4t}_{y_{s_3}}$$

Resonanzfall

Teile (Summanden) der Störfunktion $b(t)$ sind Lösungen der homogenen LDGL (lassen sich damit einer NS des char. Pol. zuordnen)

Bsp1 $y'' - 2y' - 3y = 5e^{3t}$

- allg. Lsg der homogenen DGL

  $y_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- spezielle Lösung y_s der inhomogenen LDGL

  1. Ansatz ohne Resonanz : $b(t) = 5e^{3t} \Rightarrow y_s = A e^{3t}$

     - Ableitungen : $y_s' = 3A e^{3t}$, $y_s'' = 9A e^{3t}$
     - Einsetzen in $y_s'' - 2y_s' - 3y_s = 5e^{3t}$

     $$9Ae^{3t} - 6Ae^{3t} - 3Ae^{3t} = 5e^{3t}$$

     $$0 = 5e^{3t} \qquad \text{Widerspruch}$$

     kein Wunder

     y_s ist Lsg. der homogenen Gl

  2. Neuer Ansatz $y_s = t \cdot Ae^{3t}$

     - Ableitungen $y_s' = Ae^{3t} + 3Ate^{3t}$

       $y_s'' = 3Ae^{3t} + 3Ae^{3t} + 9Ate^{3t} = 6Ae^{3t} + 9Ate^{3t}$

     - Einsetzen in $y_s'' - 2y_s' - 3y_s = 5e^{3t}$

     $$\underline{6Ae^{3t}} + \underline{9Ate^{3t}} - \underline{2Ae^{3t}} - \underline{6Ate^{3t}} - \underline{3Ate^{3t}} = \underline{5e^{3t}}$$

     $$4Ae^{3t} = 5e^{3t}$$

     $$\Rightarrow A = \frac{5}{4}$$

$\Rightarrow y_s = \frac{5}{4} t e^{3t}$

- allg. Lsg. der inhomogenen LDGL

$$\underline{\underline{y_{in} = y_s + y_h = \frac{5}{4} t e^{3t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}}}$$

Bsp 2 $\quad y''' - y'' = t+1$

- allg. Lsg der homogenen LDGL $y''' - y'' = 0$
  - Ansatz: $y = e^{\lambda t} \Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda t},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda t},\ y''' = \lambda^3 e^{\lambda t}$
  - Einsetzen in $y''' - y'' = 0$

$$\lambda^3 e^{\lambda t} - \lambda^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \qquad \text{NS } \lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 1$$

  - Basis: $y_1 = e^{0t} = 1,\ y_2 = t \cdot e^{0t} = t,\ y_3 = e^t$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_h = c_1 + c_2 t + c_3 e^t}} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

- spezielle Lsg der inhomogenen LDGL
  - Ansatz ohne Beachtung des Resonanzfalls $y_s = At + B$.

$\Rightarrow y_s' = A \quad y_s'' = 0 = y_s''' \qquad$ Einsetzen $\quad 0 - 0 = t + 1 \quad ↯$

  - neuer Ansatz: $y_s = t \cdot (At + B) = At^2 + Bt$

$\Rightarrow y_s' = 2At + B \quad y_s'' = 2A \quad y_s''' = 0$

Einsetzen in $y_s''' - y_s'' = t+1$ ergibt $\quad 0 - 2A = t + 1 \quad ↯$

Koeffizientenvergleich ergibt nichts

  - richtiger Ansatz: $y_s = t^2(At + B) = At^3 + Bt^2$

$\Rightarrow y_s' = 3At^2 + 2Bt,\ y_s'' = 6At + 2B \quad y_s''' = 6A$

Einsetzen ergibt $\quad 6A - 6At - 2B = t + 1$

Koeffizientenvergleich: $\left.\begin{array}{l} t^1: \ -6A = 1 \\ t^0: \ -6A - 2B = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{6},\ B = -1$

$$\Rightarrow y_s = -\frac{1}{6}t^3 - t^2$$

- allg. Lsg der inhomogenen LDGL

$$\underline{\underline{y_{in} = y_s + y_h = -\frac{1}{6}t^3 - t^2 + c_1 + c_2 t + c_3 e^t \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}}}$$

Resonanzfall erkennen

Inhomogenität	Resonanz, falls λ NS von $P(\lambda)$
$e^{at}(Q_1(t)\cos bt + Q_2(t)\sin bt)$	$\lambda = a+ib$
$Q(t)\cdot e^{at}$	$\lambda = a$
$Q(t)\cos bt$ oder $Q(t)\sin bt$	$\lambda = ib$
$Q(t)$	$\lambda = 0$

Merke: Ansatz mit Resonanz = Ansatz ohne Resonanz $\cdot\, t^{\alpha}$

α = Vielfachheit der NS λ die für den Resonanzfall sorgt

Beispiel Warum dürfen Soldaten nicht im Gleichschritt über eine Brücke marschieren?

Brücke als linearer Feder-Masse-Schwinger

$y = y(t)$ vertikale Auslenkung der Brücke = Ortskoordinate des Brückenmittelpunktes

$y'(t) \hat{=}$ Geschwindigkeit v des Punktes $\quad y''(t)$ = Beschleunigung

$F = -k\cdot y \qquad k$ = Federkonstante der Brücke (Hookesches Gesetz)

$F = m\cdot a = m\cdot y''$

$\Rightarrow \quad m\cdot y'' = -k\cdot y \quad$ bzw $\quad y'' + \frac{k}{m}\cdot y = 0$

homogene LDGL

$\frac{k}{m} > 0 \qquad$ Setzen $\frac{k}{m} = \alpha^2$

$\Rightarrow \quad y'' + \alpha^2 y = 0$

char. Pol. $\quad \lambda^2 + \alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda^2 = -\alpha^2 \quad \Rightarrow \lambda = \pm \alpha i$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y_h = c_1\cos\alpha t + c_2\sin\alpha t}} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y(0) = y'(0) = 0 \Rightarrow y \equiv 0$

Jetzt: $F(t) = -k \cdot y(t) + f(t)$

äußere Kraft

$$m \cdot y'' = -ky + f(t)$$
$$y'' + \frac{k}{m} y = \frac{f(t)}{m}$$
$$y'' + \alpha^2 y = \beta \cdot \sin \omega t$$

periodische Kraft

$$y_h = c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t$$

kein Problem, falls $\alpha \neq \omega$ denn $y_s = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

$\Rightarrow \quad y_{in} = A \cos \omega t + B \sin \omega t + c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t$

aber Resonanzfall, falls $\omega = \alpha$ (Resonanzfrequenz)

$$y_s = At \cos \alpha t + Bt \sin \alpha t$$
$$y_s' = A \cos \alpha t - At\alpha \sin \alpha t + B \sin \alpha t + Bt\alpha \cos \alpha t$$
$$= (A + Bt\alpha) \cos \alpha t + (B - At\alpha) \sin \alpha t$$
$$y_s'' = B\alpha \cos \alpha t - (A + Bt\alpha)\alpha \sin \alpha t + -A\alpha \sin \alpha t + (B - At\alpha)\alpha \cos \alpha t$$
$$= (2B\alpha - At\alpha^2) \cos \alpha t + (-2A\alpha - Bt\alpha^2) \sin \alpha t$$

$$y_s'' + \alpha^2 y_s = 2B\alpha \cos \alpha t - 2A\alpha \sin \alpha t \overset{!}{=} \beta \cdot \sin \alpha t$$
$$\Rightarrow B = 0, \ A = -\frac{\beta}{2\alpha}$$
$$\Rightarrow y_s = -\frac{\beta}{2\alpha} t \cos \alpha t$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_{in} = \underbrace{-\frac{\beta}{2\alpha} \cdot t \cdot \cos \alpha t}_{\to \pm\infty} + c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t}} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Brücke kann einbrechen

(3.6) Eulersche Differentialgleichungen

Eine lineare DGL n-ter Ordnung vom Typ

$$\boxed{t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 t y' + a_0 y = b}$$

mit $y = y(t)$, $b = b(t)$, $a_k \in \mathbb{R}$ $\quad k = 0,\ldots,n-1$

heißt <u>Eulersche DGL</u>

<u>Bemerkung</u>:

Eine Eulersche DGL ist eine spezielle LDGL mit nichtkonstanten Koeff.

(A) Allgemeine Lösung der homogenen Euler DGL

Bestimmen eine Basis des Lösungsraumes von

$$t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 t y' + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

mit dem Ansatz

$$\boxed{y(t) = t^{\lambda} \qquad t \neq 0}$$

Sind $y_1, \ldots, y_n$ lin. unabh. Lsg dieser Form, dann gilt

$$\underline{\underline{y_h = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n}}$$

<u>Bestimmung einer Basis $\{y_1, y_2\}$ im Fall $n=2$</u>

$$y(t) = t^{\lambda} \qquad y' = \lambda t^{\lambda - 1} \qquad y'' = \lambda(\lambda - 1) t^{\lambda - 2}$$

Einsetzen in DGL $(*)$ $\qquad t^2 y'' + t a_1 y' + a_0 y = 0$

$$\Rightarrow \quad t^2 \cdot \lambda(\lambda-1) t^{\lambda-2} + t a_1 \lambda t^{\lambda-1} + a_0 t^{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \quad t^{\lambda} \cdot \left(\lambda(\lambda-1) + a_1 \lambda + a_0 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\lambda(\lambda-1) + a_1 \lambda + a_0}_{\text{char. Polynom}} = 0$$

Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ NS des char. Polynoms, so ist $y = t^{\lambda}$ reelle bzw. komplexe Lsg. der homogenen Euler DGL $(*)$

Seien λ_1, λ_2 NS des char. Polynoms

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + a_1 \lambda + a_0 = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$

$$\lambda^2 + (a_1-1)\lambda + a_0 = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$

$$\Rightarrow a_1 = 1-\lambda_1-\lambda_2$$

$$a_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

Wurzelsatz von Vieta

<u>1. Fall</u> $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reell $\Rightarrow y_1 = t^{\lambda_1}, \; y_2 = t^{\lambda_2}$ bilden Basis

<u>2. Fall</u> $\lambda_1 = \lambda_2$ reell $\Rightarrow y_1 = t^{\lambda_1}, \; y_2 = t^{\lambda_1} \cdot \ln t$

<u>3. Fall</u> $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$

$$\Rightarrow \tilde{y}_1 = t^{\alpha+i\beta} \quad \tilde{y}_2 = t^{\alpha-i\beta}$$

komplexe Lsg

$$\tilde{y}_1 = t^\alpha \cdot t^{i\beta} = t^\alpha \cdot e^{i\beta \ln t} = t^\alpha\left(\cos(\beta \ln t) + i \sin(\beta \ln t)\right)$$

$$\tilde{y}_2 = t^\alpha \cdot t^{-i\beta} = t^\alpha \cdot e^{-i\beta \ln t} = t^\alpha\left(\cos(\beta \ln t) - i \sin(\beta \ln t)\right)$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = t^\alpha \cos(\beta \ln t)$$

$$y_2 = \frac{1}{2i}(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = t^\alpha \sin(\beta \ln t)$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reell : $y_h = c_1 t^{\lambda_1} + c_2 t^{\lambda_2}$

$\lambda_1 = \lambda_2$ reell $\quad y_h = c_1 t^{\lambda_1} + c_2 t^{\lambda_1} \cdot \ln t$

$\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta \quad y_h = c_1 t^\alpha \cos(\beta \ln t) + c_2 t^\alpha \sin(\beta \ln t)$

<u>Beispiele</u>

(1) $t^2 y'' + 3t y' - 3y = 0$

$y = t^\lambda$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \qquad \lambda_1 = +1 \qquad \lambda_2 = -3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_h = c_1 t + c_2 t^{-3} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}}$$

(2) $t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0$

$y = t^\lambda$

$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \lambda_{1/2} = 2$

$\Rightarrow \underline{\underline{y_h = c_1 \cdot t^2 + c_2 \cdot t^2 \cdot \ln t}}$

(3) $t^2 y'' - ty' + 2y = 0$

$y = t^\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1 \pm i$

$\Rightarrow \underline{\underline{y_h = c_1\, t \cos \ln|t| + c_2\, t \sin \ln|t|}}$

<u>Hintergrund zum Ansatz</u>

Substitution $\qquad y(t) = z(\ln t) \qquad (x = \ln t)$

$\Rightarrow y'(t) = z'(\ln t) \cdot \frac{1}{t}$

$y''(t) = z''(\ln t) \cdot \frac{1}{t^2} + z'(\ln(t)) \cdot -\frac{1}{t^2}$

Insgesamt kürzen sich die t's raus

$\Rightarrow$ homogene LDGL für $z = z(x)$ mit $x = \ln t$ mit konstanten Koeffizienten

Lösungen $\quad e^{\lambda x} \rightarrow e^{\lambda \ln t} \rightarrow t^\lambda$

$\cos bx \rightarrow \cos b \ln t$

$x^2 e^{\lambda x} \rightarrow (\ln t)^2 e^{\lambda \ln t} = (\ln t)^2 \cdot t^\lambda$

(B) Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Euler DGL

Man verwendet Variation der Konstanten

Ansatz $y_s = c_1(t)\, y_1 + c_2(t)\, y_2$

Beispiel

$$t^2 y'' + 3t y' - 3y = t \qquad (*)$$

$$y_h = C_1 t + c_2 t^{-3}$$

VdK-Ansatz $y_s = c_1(t)\cdot t + c_2(t)\cdot t^{-3}$

führt (siehe (3.5)) auf $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$

aber Vorsicht! LDGL (*) hat nicht Normalform

Normalform von (*) ist: $y'' + \frac{3}{t} y' - \frac{3}{t^2} y = \frac{1}{t} \Rightarrow b(t) = \frac{1}{t}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} t & t^{-3} \\ 1 & -3t^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t^{-3} \\ t^{-1} & -3t^{-4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^{-3} \\ 1 & -3t^{-4} \end{vmatrix}} = \frac{-t^{-4}}{-4t^{-3}} = \frac{1}{4} t^{-1} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4} \ln t$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & t^{-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^{-3} \\ 1 & -3t^{-4} \end{vmatrix}} = \frac{1}{-4t^{-3}} = -\frac{1}{4} t^3 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{16} t^4$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{1}{4} \ln t \cdot t - \frac{1}{16} t$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_{in} = y_s + y_h = \frac{1}{4} \ln t \cdot t \left(-\frac{1}{16} t\right) + c_1 t + c_2 c^{-3}}}$$

4. Differentialgleichungssysteme

(4.1) Räuber-Beute Modell (Volterra 1928)

Betrachten biologisches System aus Räubern und Beute mit

- $x = x(t)$ Anzahl der Räuber zum Zeitpunkt t
- $y = y(t)$ Anzahl der Beute zum Zeitpunkt t

Die Räuber wachsen negativ korreliert mit dem eigenen Bestand (Sterberate α) und positiv korreliert mit dem eigenen Bestand und dem Bestand der Beute, etwa

- $\dot{x} = -\alpha x + \beta \cdot xy = -(\alpha - \beta y)\, x \qquad (\alpha, \beta > 0)$

Die Beute wächst positiv korreliert mit dem eigenen Bestand (Geburtenrate γ) und negativ korreliert mit dem eigenen Bestand und dem Bestand der Räuber, etwa

- $\dot{y} = \gamma \cdot y - \delta xy = (\gamma - \delta x)\, y \qquad (\gamma, \delta > 0)$

Somit erhalten wir für die Funktionen $x = x(t)$ und $y = y(t)$ ein System aus 2 Differentialgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= -(\alpha - \beta y)\, x \\ \dot{y} &= (\gamma - \delta x)\, y \end{aligned}}$$

In Vektorform erhalten wir eine Differentialgleichung

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\alpha - \beta y)x \\ (\gamma - \delta x)y \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}} = \vec{v}(\vec{r}) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

(4.2) Abbildungen $\vec{r}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

(1) Definition

Betrachten Abbildung

$$\vec{r}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

und $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall. Die Abbildungen $x_1, \ldots, x_n: I \to \mathbb{R}$ heißen dann <u>Komponentenabbildungen</u> von $\vec{r}$. Weiterhin ist

$$\operatorname{Spur}(\vec{r}) := \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \}$$

die <u>Spur</u> der Abbildung $\vec{r}$.

(2) Stetigkeit / Differenzierbarkeit

Die Abbildung $\vec{r}$ ist <u>stetig</u> / <u>diff'bar</u> für $t \in I$, falls sämtliche Komponentenabbildungen x_i stetig / diff'bar für $t \in I$ sind. Für die Ableitung $\dot{\vec{r}}$ gilt dann:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

<u>Bemerkung 1</u>

Ist $\vec{r}$ stetig für alle $t \in I$, so heißt die Abbildung $\vec{r}$ <u>Kurve</u> (in Parameterform)

<u>Bemerkung 2</u>

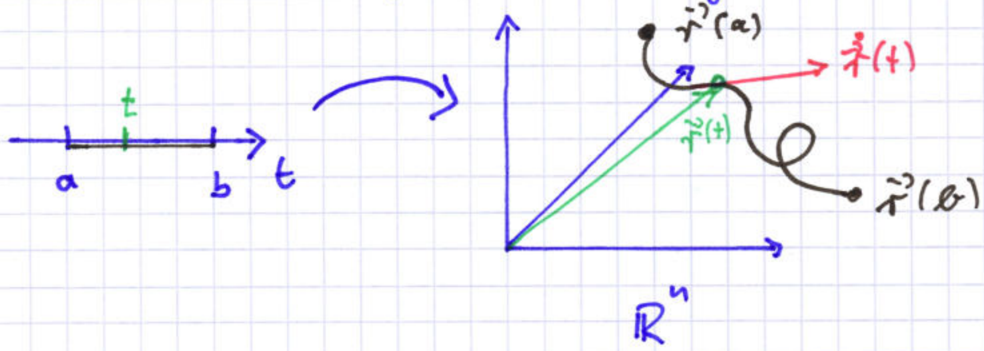
$$C^1(I, \mathbb{R}^n) := \left\{ \vec{r}: I \to \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} \vec{r} \text{ diff'bar} & \text{für alle } t \in I \\ \dot{\vec{r}} \text{ stetig} & \text{für alle } t \in I \end{array} \right\}$$

ist ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ (siehe Kapitel III)

Physikalische Interpretation

$\vec{r} = \vec{r}(t)$: Bewegung Zeit $t \mapsto$ Ort $\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$

$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$: Geschwindigkeitsvektor : $\dot{\vec{r}}(t)$ zeigt in Richtung der Bewegung (Tangentialvektor im Punkt $\vec{r}(t)$) und $\|\dot{\vec{r}}(t)\|$ = Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t



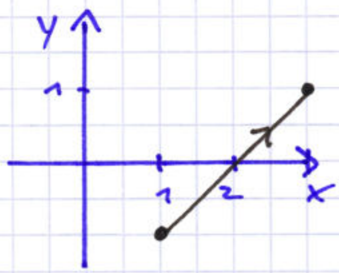
Satz

Ist $\vec{r} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine Kurve mit $I = [a,b]$, so gilt für die Länge L der Kurve

$$L = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| \, dt$$

Beispiele

① $\cdot\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -1+t \end{pmatrix} \quad t \in I = [0,2]$



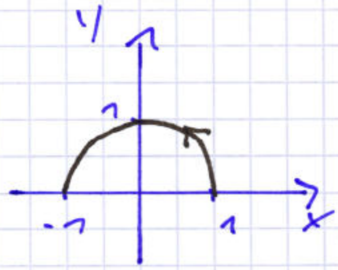
$\cdot\ \vec{r} \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$, $\vec{r}$ stetig $\quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stetig $\forall t \in I$

$\cdot\ \mathrm{spur}(\vec{r}) = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = x-2,\ 1 \le x \le 3 \right\}$ Strecke

$\cdot\ \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad L = \int_0^2 \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2}\, t \Big|_0^2 = 2\sqrt{2}$

② $\cdot\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in I = [0, \pi]$



$\cdot\ \vec{r} \in C^1(I, \mathbb{R})$

$\cdot\ \mathrm{spur}(\vec{r}) = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 = 1 \quad y \ge 0 \right\}$ Halbkreis

$\cdot\ \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1} = 1$

$\Rightarrow \quad L = \int_0^\pi 1 \, dt = \pi$

(4.3) Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

(1) Normalform

DGL-System 1. Ordnung für gesuchte Funktionen

$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$

Skalare Form

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= v_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}}$$

mit $v_1, \dots, v_n : G \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

Vektorform

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \vec{v}(t, \vec{r})} \quad (*)$$

für $\vec{r} = \vec{r}(t)$ mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} : G \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$

(2) Lösung / AWP

Eine Kurve $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n$ heißt Lösungskurve von $(*)$ falls für alle $t \in I$ gilt $(t, \vec{r}(t)) \in G$ und

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t, \vec{r}(t))$$

Gilt außerdem noch $\vec{r}(t_0) = \vec{a}$ mit $t_0 \in I$ und $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ so heißt $\vec{r} = \vec{r}(t)$ Lösung des Anfangswertproblems

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \vec{v}(t, \vec{r}) \quad , \quad \vec{r}(t_0) = a}$$

Unter der allgemeinen Lösung von $(*)$ versteht man eine Kurvenschar $\vec{r} = \vec{r}(t, c_1, \dots, c_n)$ mit Parametern $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, die aus lauter Lösungskurven (allen) von $(*)$ besteht.

(3) Beispiel $\quad n=2 \quad x_1 = x \quad x_2 = y$

DGL System

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{t}x + 2ty \\ \dot{y} &= \frac{1}{t}y \end{aligned}}$$

$t \neq 0 \qquad I = (-\infty, 0)$ oder $(0, \infty)$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}} = v(t, x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t}x + 2ty \\ \frac{1}{t}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 2t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lösung

$\dot{y} = \frac{1}{t} \cdot y \qquad$ DGL mit getrennten Variablen bzw lineare homogene DGL

Lösung $\quad y = d \cdot t \qquad d \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{1}{t} \cdot x + 2 \cdot d \cdot t^2$

$\dot{x} - \frac{1}{t}x = 2d \cdot t^2 \qquad$ lineare inhomogene DGL

$x_h = c \cdot t \qquad c \in \mathbb{R}$

Ansatz für x_s : $\quad x_s = c(t) \cdot t \quad \Rightarrow \dot{x}_s = c'(t) \cdot t + c(t)$

Einsetzen in $\dot{x} - \frac{1}{t}x = 2d \cdot t^2$

$c'(t) \cdot t + c(t) - c(t) = 2d \cdot t^2$

$c' = 2 \cdot d \cdot t \quad \Rightarrow c = d \cdot t^2$

$\Rightarrow x_s = d \cdot t^3$

$\Rightarrow \quad x = x_s + x_h = d \cdot t^3 + c \cdot t$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \cdot t^3 + c \cdot t \\ d \cdot t \end{pmatrix} \qquad c, d \in \mathbb{R}$

Betrachten 2 Lösungen

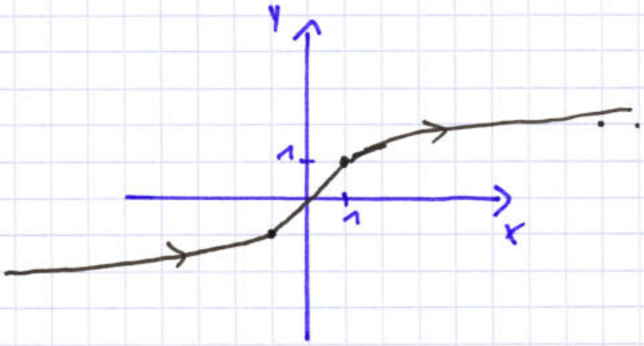
Lösung 1 ($d = 1, c = 0$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{Spur}(\vec{r}) = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \middle| t \in I \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in I \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{matrix} x = y^3 \\ x \neq 0 \end{matrix} \right\}$$



$$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

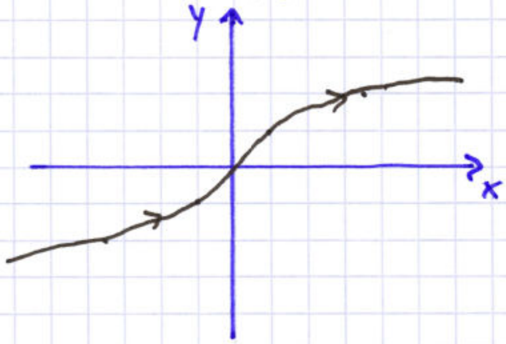
Lösung 2 ($d = 2, c = 3/2$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^3 + \frac{3}{2}t \\ 2t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{Spur}(\vec{r}) = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \middle| t \in I \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2t^3 + \frac{3}{2}t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \middle| t \in I \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x = \frac{1}{4}y^3 + \frac{3}{4}y \\ x \neq 0 \end{matrix} \right\}$$



$$\vec{r}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Spuren beider Kurven gehen durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aber mit unterschiedlichem Anstieg

(4) DGL n-ter Ordnung $\longrightarrow$ DGL-System 1. Ordnung

gew. DGL n-ter Ordnung

$$\Big\downarrow$$

DGL-System 1. Ordnung

$$\boxed{x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})}$$

$x_1 = x, \; x_2 = \dot{x}, \; x_3 = \ddot{x}, \dots, \; x_n = x^{(n-1)}$

$\Rightarrow \dot{x}_1 = x_2, \; \dot{x}_2 = \ddot{x} = x_3, \dots, \; \dot{x}_{n-1} = x_n$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}}$$

Beispiel $\quad \ddot{x} = -2x + t^2, \; x = x(t)$

$$\begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{matrix} \; \left| \; \begin{matrix} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = -2x_1 + t^2 \end{matrix} \right.$$

$$\longrightarrow \quad \begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + t^2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

(4.4.) Lineare DGL-Systeme 1. Ordnung

Ein DGL-System der Form

$$\dot{\vec{r}}(t) = A(t)\cdot\vec{r}(t) + \vec{b}(t) \qquad (*)$$

heißt lineares DGL-System 1. Ordnung, wobei

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ gesuchte Größe ist

$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j\in\{1,..,n\}}$ Koeffizientenmatrix

$\vec{b} = \vec{b}(t)$ Störfunktion, falls $\vec{b} \equiv \vec{0}$ heißt das System homogen

<u>Satz:</u> Seien

$$\Gamma = \{ \vec{r} \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{\vec{r}}(t) = A(t)\cdot\vec{r}(t) + \vec{b}(t),\ \forall t\in I \}$$

die Lösungsmenge des inhomogenen LDGL-Systems (*) und

$$U = \{ \vec{r} \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{\vec{r}}(t) = A(t)\cdot\vec{r}(t) \}$$

die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems.

Dann gilt:

(1) U ist lin. UR von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ der Dimension n

(2) $\{\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n\} \subseteq U$ ist Basisis des Lösungsraumes U des homogen LDGL-Systems

$\Leftrightarrow \det(W(t)) := \det(\vec{r}_1(t), .., \vec{r}_n(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I$

$\Leftrightarrow \det(W(t)) \neq 0$ für ein $t \in I$

(3) $\Gamma = \emptyset$ oder $\Gamma = \vec{r}_s + U$ wobei $\vec{r}_s \in \Gamma$ beliebig

d.h. $\vec{r}_{in} = \vec{r}_s + \vec{r}_h$

<u>Beweisidee</u> • $L : C^1(I, \mathbb{R}^n) \to C^0(I, \mathbb{R}^n)$ mit $L(\vec{r}) = \dot{\vec{r}} - A(t)\cdot\vec{r}$ ist lin. Abb

$\Rightarrow L(\vec{r}) = \dot{\vec{r}} - A(t)\vec{r} = \vec{b}(t)$ ist lin. Gleichung

$\Rightarrow$ (1) und (3) folgt aus Hauptsatz über lin. Gleichungen

(2) analog zu (3.4)

Bestimmung der Lösungsmenge des homogenen Systems für konstante Koeffizientenmatrizen

$$\dot{\vec{r}} = A\vec{r}$$

Ansatz: $\vec{r}(t) = e^{\lambda t} \cdot \vec{v}$ $\qquad \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ konstanter Vektor

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = \lambda e^{\lambda t} \cdot \vec{v}$$

Einsetzen in $\dot{\vec{r}} = A\vec{r}$

$$\lambda e^{\lambda t} \cdot \vec{v} = A\vec{v}\, e^{\lambda t} \qquad \| : e^{\lambda t}$$

$$\lambda \vec{v} = A\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} \text{ ist EV zum EW } \lambda \text{ von } A$$

Beispiel: $\begin{array}{l} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

EV: $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ $\quad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)^2 - 1 \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3$$

EW zu $\lambda_1 = 1$: $(A - E)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{r}_1(t) = e^{1t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}}$$

EW zu $\lambda_2 = 3$: A symm $\Rightarrow \vec{v} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\vec{r}_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underline{y}_h = \underline{\underline{c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2 mögliche Probleme können auftreten:

1. komplexe Nullstellen des charakteristischen Polynoms
2. $gv(A, \lambda) < av(A, \lambda) \Rightarrow$ zu wenige linear unabhängige Lösungen

zu ①

Bsp: • $\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\vec{r}$

• $A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $|A-\lambda E| = (1-\lambda)^2 + 1 \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1+i, \quad \lambda_2 = 1-i$

• EV zu $\lambda_1 = 1+i$

$(A-(1+i)E)\,\vec{v} = \vec{0}$

$\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = c\cdot\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} \quad c\in\mathbb{C}$

$$\Rightarrow \vec{r}_{\text{komplex}}(t) = e^{(1+i)t}\cdot\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = e^t\cdot e^{it}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$$

$$= e^t(\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-e^t\sin t + i\,e^t\cos t\\ e^t\cos t + i\,e^t\sin t\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}-e^t\sin t\\ e^t\cos t\end{pmatrix}}_{=:\vec{r}_1(t)} + i\,\underbrace{\begin{pmatrix}e^t\cos t\\ e^t\sin t\end{pmatrix}}_{=:\vec{r}_2(t)}$$

(Herleitung analog zu (3.5))

Probe zu $\vec{r}_1$:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \begin{pmatrix}-e^t\sin t - e^t\cos t\\ e^t\cos t - e^t\sin t\end{pmatrix}$$

$$A\vec{r}_1 = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-e^t\sin t\\ e^t\cos t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-e^t\sin t - e^t\cos t\\ -e^t\sin t + e^t\cos t\end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}_1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{y}_h = c_1\begin{pmatrix}-e^t\sin t\\ e^t\cos t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}e^t\cos t\\ e^t\sin t\end{pmatrix}}} \qquad c_1, c_2\in\mathbb{R}$$

$$= \underline{\underline{e^t\begin{pmatrix}-c_1\sin t + c_2\cos t\\ c_1\cos t + c_2\sin t\end{pmatrix}}} \qquad c_1, c_2\in\mathbb{R}$$

zu (2) **Bsp**

- $\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{r}$ $\qquad (A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

- $P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)\cdot(-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \stackrel{!}{=} 0$

  $\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$ doppelter EW $\qquad av(A, \lambda = 1) = 2$

- $(A - 1E)\vec{v} = \vec{0}$

  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad gv(A, \lambda = 1) = 1$

  $\Rightarrow \underline{\underline{\vec{r}_1(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$ $\qquad$ zu wenig

<u>neuer Ansatz</u> $\qquad \vec{r}_2(t) = t \cdot e^{\lambda t} \cdot \vec{a} + e^{\lambda t} \cdot \vec{b}$, $\quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ const

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_2(t) = e^{\lambda t}\vec{a} + \lambda t e^{\lambda t}\vec{a} + \lambda e^{\lambda t} \cdot \vec{b}$$

$$= e^{\lambda t}\left(\vec{a} + \lambda \vec{b} + \lambda t \cdot \vec{a}\right)$$

Einsetzen in $\qquad \dot{\vec{r}}_2 = A\vec{r}_2$

$$e^{\lambda t}(\vec{a} + \lambda\vec{b} + \lambda t \vec{a}) = A t e^{\lambda t}\vec{a} + A e^{\lambda t}\vec{b}$$

$$\underline{\vec{a} + \lambda\vec{b}} + \underline{\lambda\vec{a}} \cdot t = \underline{A\vec{a}} \cdot t + \underline{A\vec{b}}$$

$\Rightarrow \quad A\vec{a} = \lambda\vec{a} \qquad$ d.h. $\vec{a}$ ist EV zum EW λ

$\qquad A\vec{b} = \vec{a} + \lambda\vec{b} \Leftrightarrow (A - \lambda E)\vec{b} = \vec{a}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ siehe oben $\qquad \lambda = 1$

$(A - \lambda E)\,\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

einer reicht

<u>in Ansatz einsetzen</u>

$$\vec{r}_2(t) = t \cdot e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(t+1) \\ e^t \cdot t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_h = \underline{\underline{c_1 \vec{r}_1(t) + c_2 \vec{r}_2(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}}$$

Bestimmung einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems

1. Methode: Variation der Konstanten

$$W(t) = \left(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_n(t)\right)$$ Wronski-Matrix bestehend aus Basislösungen des homogenen Systems

Ansatz: $\vec{r}_s = c_1(t)\,\vec{r}_1(t) + \dots + c_n(t)\cdot\vec{r}_n(t) = W(t)\cdot\vec{c}(t)$

Einsetzen in DGL-System

$$\dot{\vec{r}}_s(t) = \underline{\dot{W}(t)\,\vec{c}(t)} + W(t)\cdot\dot{\vec{c}}(t) = \underline{A\cdot W(t)\cdot\vec{c}(t)} + \vec{b}(t)$$

$$=$$

$$\Rightarrow \quad W(t)\cdot\dot{\vec{c}}(t) = \vec{b}(t)$$

Bsp: $\dot{\vec{r}} = \underbrace{\frac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A(t)}\vec{r} + t^3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

homogenes System: $\dot{\vec{r}} = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{r}$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}}_2 = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad W(t) = \begin{pmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_h = \begin{pmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ansatz $\quad \vec{r}_s = W(t)\cdot\vec{c}(t)$

$$W(t)\cdot\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \vec{b}(t)$$

$$\begin{pmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{c}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3t^3 & t^3 \\ 0 & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{vmatrix}} = \frac{3t^4}{t^2} = 3t^2 \Rightarrow c_1 = t^3$$

$$\dot{c}_2 = \frac{\begin{vmatrix} t & 3t^3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{vmatrix}} = \frac{0}{t^2} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_s = \begin{pmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{r}_{in} = \vec{r}_s + \vec{r}_h = \begin{pmatrix} t^4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}}}$$

$$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = 1 \qquad c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{r}_{AWP}(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4 + t^3 \\ t \end{pmatrix}}}$$

<u>Methode 2</u> spezielle Ansätze nach Typ der Inhomogenität

Bsp: $\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3t-2 \end{pmatrix}$

Ansatz für $\vec{r}_s$: $\quad x = At + B \quad y = Ct + D \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = A \quad \dot{y} = C$

Einsetzen

$$\dot{x} = A = 2(At+B) + Ct + D + 1$$
$$\dot{y} = C = (At+B) + 2(Ct+D) + 3t - 2$$

Koeff-vgl:

$$\begin{aligned} 0 &= 2A + C & &\overset{1}{\Rightarrow} C = -2A \\ A &= 2B + D + 1 & &\overset{3}{\Rightarrow} D = -2B \\ 0 &= A + 2C + 3 & &\overset{2}{\Rightarrow} A = 1 \quad C = -2 \\ C &= B + 2D - 2 & &\overset{4}{\Rightarrow} D = B = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix}$$

(4.5) Autonome DGL-Systeme

Def: Ein DGL-System $\dot{\vec{r}} = \vec{v}(t, \vec{r})$ heißt <u>autonom</u>, wenn die Funktion $\vec{v}$ unabhängig von t ist, d.h.

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}(\vec{r}) \qquad \vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

<u>Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen</u>

Ist $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig auf D, dann besitzt das AWP

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}(\vec{r}), \quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

für jedes $(t_0, \vec{r}_0)$ genau eine Lösung. Die Spur der Lösungskurve ist dabei unabhängig von t_0.

Die Spur einer Lösungskurve wird auch als <u>Phasenkurve</u>, <u>Trajektorie</u> oder <u>Orbit</u> bezeichnet.
Die Gesamtheit aller Phasenkurven eines autonomen DGL-Systems im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet man als <u>Phasenportrait</u>

<u>Bemerkung</u>

Ist $\vec{v}$ stetig auf D, so können sich nach obigem Satz Phasenkurven nicht schneiden.

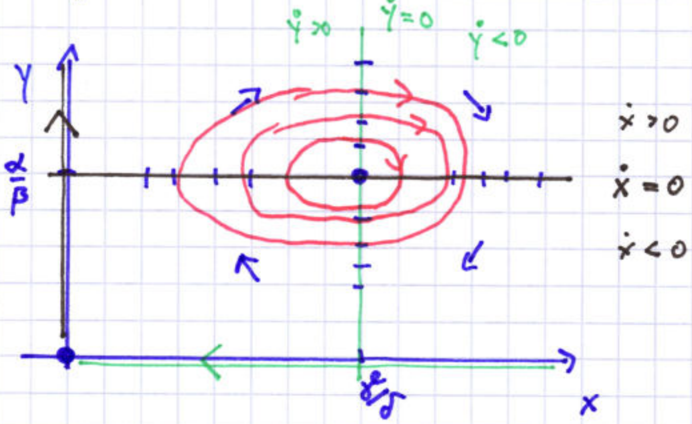
Def: Ein Punkt $\vec{a} \in D$ des Phasenraumes heißt <u>Ruhelage / Gleichgewichtslage / Fixpunkt</u> des DGL-Systems, falls $\vec{v}(\vec{a}) = \vec{0}$. Er korrespondiert zur konstanten Lösung $\vec{r}(t) \equiv \vec{a}$ des DGL Systems

Beispiel Räuber - Beute - Modell

$$\dot{x} = -(\alpha - \beta y)\cdot x \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$
$$\dot{y} = (\gamma - \delta x)\cdot y \qquad x, y \in [0, \infty)$$

$x(t)$ Räuber zum ZP t

$y(t)$ Beute zum ZP t



$$\dot{x} = 0 \iff x = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{\alpha}{\beta}$$
$$\dot{y} = 0 \iff y = 0 \quad \text{oder} \quad x = \frac{\gamma}{\delta}$$

2 Fixpunkte $(0,0)$, $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$

$x = 0 \Rightarrow x \equiv 0$ y wächst exponentiell

$y = 0 \Rightarrow y \equiv 0$ x schrumpft exponentiell

Für den Fall $n = 2$ Phasen-DGL für die Phasenkurven

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$
$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

Kettenregel: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

Am Beispiel: $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(\gamma - \delta x)\,y}{-(\alpha - \beta y)\,x}$ Trennung der Variablen

$y \neq 0$, $y \neq \alpha/\beta$

$$\int \frac{\alpha - \beta y}{y}\,dy = \int \frac{\delta x - \gamma}{x}\,dx$$

$$\int \frac{\alpha}{y} - \beta\,dy = \int \delta - \frac{\gamma}{x}\,dx$$

$$\alpha \ln y - \beta y = \delta x - \gamma \ln x + C$$

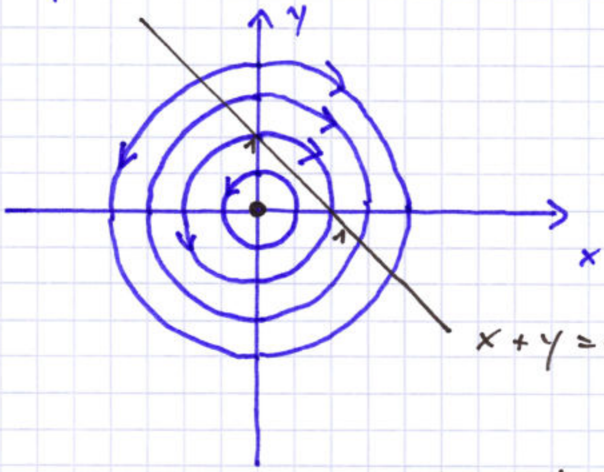
implizite Lsg der DGL

Bsp 2: $\quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\,(x+y-1) \\ x\,(1-x-y) \end{pmatrix}$

$$\dot{x} = 0 \iff y = 0 \quad \text{oder} \quad x+y=1$$
$$\dot{y} = 0 \iff x = 0 \quad \text{oder} \quad x+y=1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{x\,(1-x-y)}{y\,(x+y-1)} = -\frac{x}{y} \qquad x+y \neq 1$$

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + c$$
$$x^2+y^2 = 2c \qquad \rightarrow \text{Kreise}$$



$x+y=1$ Gerade aus Fixpunkten

+ Fixpunkt $(0,0)$

Stabilität von Fixpunkten

Es sei $\dot{\vec{r}} = \vec{v}(\vec{r})$ ein autonomes DGL-System und $\vec{a}$ ein Fixpunkt des Systems, d.h. $\vec{v}(\vec{a}) = \vec{0}$. Mann nennt den Fixpunkt

- <u>stabil</u>, falls es $\varepsilon, \delta > 0$ gibt so dass für alle Lösungskurven $\vec{r}$ des Systems gilt
  $$\vec{r}(t_0) \in U_\delta(\vec{a}) \Rightarrow \vec{r}(t) \in U_\varepsilon(\vec{a}) \quad \text{für alle } t \geq t_0$$
  Ansonsten heißt $\vec{a}$ <u>instabil</u>.
- <u>asymptotisch stabil</u>, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle Lösungskurven $\vec{r}$ gilt: $\vec{r}(t_0) \in U_\varepsilon(\vec{a}) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \vec{r}(t) = \vec{a}$

Lineare autonome Systeme

allgemeines autonomes System

$$\dot{\vec{r}} = A\vec{r} + \vec{b}$$

Hat $A\vec{r} + \vec{b} = \vec{0}$ keine Lösung, so gibt es keine Fixpunkte. Ist $\vec{r} = \vec{a}$ eine Lösung von $A\vec{r} + \vec{b} = 0$ so hat das System den Fixpunkt $\vec{a}$ (konstante Lösung $\vec{r} \equiv \vec{a}$)

substituiere $\quad \vec{r} = \vec{s} + \vec{a} \qquad \vec{s} = \vec{s}(t)$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{s}}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{s}} = A(\vec{s} + \vec{a}) + \vec{b}$$

$$\dot{\vec{s}} = A\vec{s} + A\vec{a} + \vec{b}$$

$$\dot{\vec{s}} = A\vec{s}$$

$\Rightarrow$ Hinsichtlich der Stabilität verhält sich der Fixpunkt $\vec{a}$ des inhomogenen Systems wie der Fixpunkt $\vec{0}$ des zugehörigen homogenen Systems.

$\Rightarrow$ Es genügt, homogene autonome Systeme $\dot{\vec{r}} = A\vec{r}$ zu betrachten.

Satz

Ist $\dot{\vec{r}} = A\vec{r}$ ein autonomes homogenes LDGL-System und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A, dann gilt

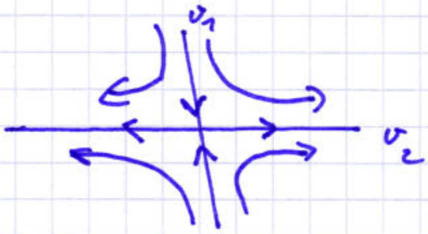
i) $Re(\lambda_k) < 0$ für alle k $\Rightarrow$ Fixpunkt $\vec{0}$ ist asymptotisch stabil

ii) $Re(\lambda_k) > 0$ für ein k $\Rightarrow$ Fixpunkt $\vec{0}$ instabil

iii) $\left\{ \begin{array}{l} Re(\lambda_k) \leq 0 \text{ für alle } k \\ \text{Ist } Re(\lambda_k) = 0 \\ \text{so ist } av(A,\lambda_k) = gv(A,\lambda_k) \end{array} \right\} \Rightarrow$ Fixpunkt $\vec{0}$ stabil

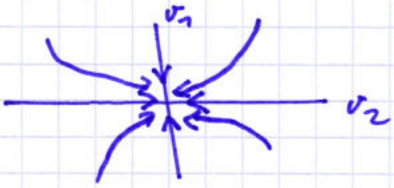
Typen von Fixpunkten von $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ für $n=2$

- 2 verschiedene reelle EW λ_1, λ_2 mit EV v_1 v_2

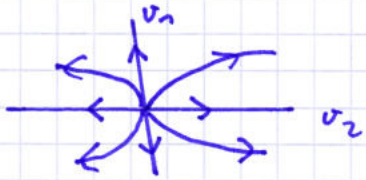


$\lambda_1 < 0$
$\lambda_2 > 0$

Sattelpunkt



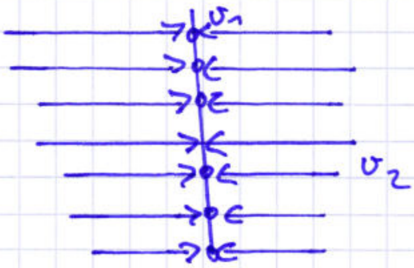
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
asymptotisch stabil



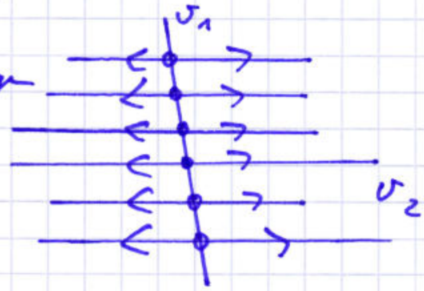
$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$
instabil

} Knoten 2. Art

$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 \neq 0$



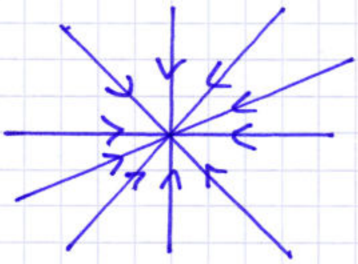
Gerade von Ruhelage

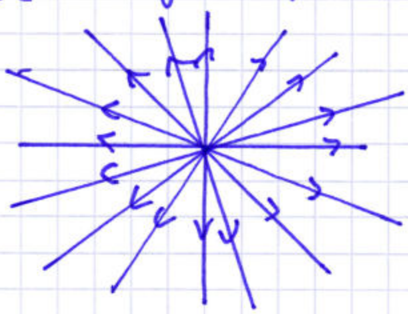


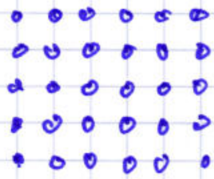
$\lambda_2 < 0$ stabil

$\lambda_2 > 0$ instabil

- doppelter reeller EW λ mit geom. Vfs 2







$\lambda < 0$
asymptotisch stabil

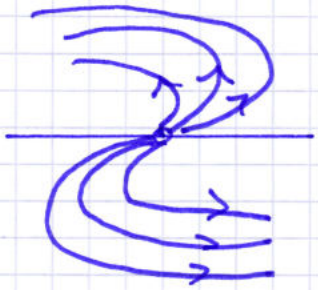
$\lambda > 0$
instabil

$\lambda = 0$
$(\Rightarrow A = 0)$
Ebene von Ruhelage

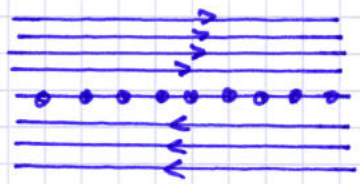
Knoten 1. Art

- doppelte reelle EW λ mit geom. Vfh 1

$\lambda < 0$
asymptotisch
stabil



$\lambda > 0$
instabil

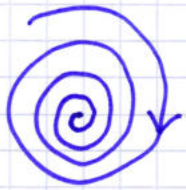


$\lambda = 0$
Gerade von Ruhelagen
instabil

Knoten 3. Art

- komplexe EW $\lambda = \alpha + i\beta$ $\beta \neq 0$

$\alpha = 0$
Zentrum
stabil



$\lambda < 0$
asymptotisch
stabil

$\lambda > 0$
instabil

Strudelpunkt

ENDE