Aufgabe 1

(a)

- Schlupfvariablen: u, v, w
- Neues LOP:

$$
\begin{aligned}
3x + y + u &= 10 \quad (1)\\
4x - y + v &= 5 \quad (2)\\
-x - y + z + w &= 3 \quad (3)\\
x, y, z, u, v, w &\geq 0 \quad (4)
\end{aligned}
$$

- Simplex-Tableau:

$$
\begin{matrix}
3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10\\
4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5\\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3\\
5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix} \tag{5}
$$

- Basislösung: $u = 10,\ v = 5,\ w = 3$

$$
\left|\begin{matrix}
3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10\\
4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5\\
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3\\
5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\right|
\begin{matrix}
\leftarrow + \\
\mid \cdot \frac{1}{4} \quad 1 \quad -3 \quad -6\\
\leftarrow +\\
\leftarrow +
\end{matrix} \tag{6}
$$

$$
\Longrightarrow
\left|\begin{matrix}
0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{55}{4}\\
1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4}\\
0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{10}{2}\\
0 & -\frac{10}{2} & 2 & 0 & ?? & 0 & -\frac{10}{2}
\end{matrix}\right|
\begin{matrix}
\\
\\
-1\\
\leftarrow +
\end{matrix} \tag{7}
$$

(b)

- Minimierungsproblem kann erstmal umgeformt werden in ein duales Maximierungsproblem
- Schritt 1: Umwandlung in Maximierungsproblem

$$
\begin{aligned}
-\max F &= -x + 3y - 2z \quad (8)\\
&\dots \quad (9)\\
& \quad (10)
\end{aligned}
$$

- Schritt 2: Slack-Variablen, Simplex-Tableau $\varepsilon = \min\left\{\frac{12}{4}, \frac{10}{3}\right\}$, also Pivot-Element 4

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & \mathbf{4} & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ -4 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ \mid \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{3}{4} \quad -\frac{3}{4} \\ + \\ + \end{array} \tag{11}$$

$$\left|\begin{array}{ccccccc} \mathbf{\frac{5}{2}} & 0 & 2 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 10 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 3 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 8 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & -9 \end{array}\right| \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \quad \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} \quad \frac{2}{5} \\ + \\ + \\ + \end{array} \tag{12}$$

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & -11 \end{array}\right| \tag{13}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\vec{c}^\top \vec{x} = 11 \tag{15}$$

$$\text{Lösung:} \ -11 \tag{16}$$

(c)

- Wenn man hier die Relationszeichen wie gefordert dreht, werden Elemente von $\vec{b}$ negativ! Daher Schlupfvariablen abziehen statt addieren.
- Schlupfvariablen:

$$x + y - s_1 = 7 \tag{17}$$

$$9x + 5y + s_2 = 45 \tag{18}$$

$$2x + y - s_3 = 8 \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

- Hier kann keine Basislösung abgelesen werden, da hier keine Einheitsmatrix im Simplex-Tableau enthalten ist.

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 7 \\ 9 & 5 & 0 & 1 & 0 & 45 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right| \tag{21}$$

- Hier müsste man normalerweise einen weiteren Vektor $\vec{y}$ einführen und das Hilfsproblem lösen. Es werden hier noch zwei Schlupfvariablen eingeführt. Damit haben wir schonmal eine Basislösung. Jetzt müssen die Schlupfvariablen noch in die Kostenfunktion eingebaut werden. Dabei sollen die Werte der zwei neuen Variablen minimiert werden! Jetzt müssen erstmal Nullen unter die Basisspalten gebracht werden.

$$\begin{array}{cl} \left|\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 9 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 45 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right| & \begin{array}{l} 1 \\ \\ \quad 1 \\ + \quad + \end{array} \end{array} \tag{22}$$

$$\begin{array}{cl} \left|\begin{array}{cccccccc} 1 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 9 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 45 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right| & \begin{array}{l} -5 \quad -1 \quad -3 \\ + \\ \quad + \\ \quad\quad + \end{array} \end{array} \tag{23}$$

Entgegen der Blantschen Regel wird hier nicht mit der ersten Spalte angefangen. Wenn man woanders anfängt, geht die Rechnung leichter.

$$\begin{array}{cl} \left|\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 5 & 1 & 0 & -5 & 0 & 10 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right| & \begin{array}{l} \quad + \\ + \\ -4 \quad -1 \quad -1 \\ \quad\quad + \end{array} \end{array} \tag{24}$$

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & -1 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right| \tag{25}$$

- Das Tableau ist jetzt optimal, da es keinen positiven Wert mehr in der letzten Zeile gibt. Hier kann man jetzt mit der Phase 2 fortfahren.
- Der Teil mit den ursprünglichen Variablen kann aus der bisherigen Basislösung abgelesen werden. Von da an kann wie gewohnt fortgefahren werden.

$$\begin{array}{cl} \left|\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 20 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| & \begin{array}{l} -15 \\ \\ \quad -20 \\ + \quad + \end{array} \end{array} \tag{26}$$

Zunächst wird dafür gesorgt, dass Nullen unter den Basisspalten stehen.

$$\left|\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 5 & -110 \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ + \\ -1 \quad 2 \quad -10 \\ + \end{array} \tag{27}$$

$$\left|\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{5} & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 15 & -120 \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ \cdot \frac{1}{5} \quad 1 \quad 1 \quad -15 \\ + \\ + \end{array} \tag{28}$$

$$\left|\begin{array}{cccccc} \frac{9}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 9 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 1 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 2 \\ -7 & 0 & 0 & -3 & 0 & -135 \end{array}\right| \tag{29}$$

Jetzt lässt sich die Lösung ablesen.

$$x = 0 \tag{30}$$

$$y = 9 \tag{31}$$

(d)

- Wieder Schlupfvariablen benötigt, dieses mal wieder mit negativem Vorzeichen.

$$x + y - 3z + s_1 = 8 \tag{32}$$

$$4x - y + z - s_2 + s_4 = 2 \tag{33}$$

$$2x + 2y - z - s_3 + s_5 = 4 \tag{34}$$

$$x, y, z, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0 \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

- Tableau-Form, hier ist wieder Phase 1 nötig:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \tag{37}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ \mathbf{4} & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \tag{38}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \mathbf{\frac{1}{2}} & -1 & -\frac{3}{2} & 0 & 3 \end{vmatrix} \tag{39}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 6 \\ 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \tag{40}$$

- Jetzt weiter mit Phase 2:

$$\begin{vmatrix} x & y & \mathbf{z} & s_1 & s_2 & s_3 & b \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\mathbf{\frac{5}{2}} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 6 \\ 1 & 3 & -\mathbf{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 7 & -\mathbf{3} & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{41}$$

- Wir haben hier ein positives d_j und alle $t_{k,j}$ dazu sind negativ (Spalte z), also ist das Problem nach oben unbeschränkt.

(e)

- $\min F = x + y \iff \max -F = -x - y$
- benötigen wieder eine negative Schlupfvariable

$$x + y + s_1 = 40 \tag{42}$$
$$-x + y + s_2 = 0 \tag{43}$$
$$-2x + 2y - s_3 = 2 \tag{44}$$
$$x, y, z, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \tag{45}$$

- Keine Basislösung ablesbar, daher Phase 1

$$
\left|\begin{array}{ccccccc}
x & y & s_1 & s_2 & s_3 & h & b \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 40 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right| \tag{46}
$$

$$
\left|\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 40 \\
-1 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
-2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2
\end{array}\right| \tag{47}
$$

$$
\left|\begin{array}{ccccccc}
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 40 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & \mathbf{2}
\end{array}\right| \tag{48}
$$

- Wir haben die optimale Lösung für das Hilfsproblem gefunden, aber der optimale Wert ist 2. Daher hat das originale Problem keine Lösung.

Aufgabe 2

- Transponiere Matrix und erhalte dadurch duales LOP.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{49}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} \tag{50}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{51}$$

Das originale LOP:

$$\max \vec{c}^\top \vec{x} \tag{52}$$

$$A\vec{x} \leq \vec{b} \tag{53}$$

Duales LOP:

$$\min \vec{b}^\top \vec{x} \tag{54}$$

$$A^\top \vec{x} \geq \vec{x} \tag{55}$$

Daraus ergibt sich:

$$\min 120x + 80y \tag{56}$$
$$2x + 2y \geq 3 \tag{57}$$
$$4x + 2y \geq 4 \tag{58}$$
$$\tag{59}$$

- Tableau Phase 1:

$$\begin{vmatrix} x & y & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & b \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ + \quad + \end{array} \tag{60}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ \mathbf{4} & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} + \\ -\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2} \\ + \end{array} \tag{61}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{1} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \quad -1 \\ + \\ + \end{array} \tag{62}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \tag{63}$$

- Zielfunktion:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -120 & -80 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 80 \\ + \quad 120 \\ + \end{array} \tag{64}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 20 & 20 & -140 \end{vmatrix} \tag{65}$$

$$\tag{66}$$

- Lösung kann abgelesen werden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F = 60 + 80 = 140 \tag{67}$$

Aufgabe 3

Die Aufgabenstellung wird ein wenig umformuliert:

Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist der Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underline{a}_i = A^\top \cdot \vec{\alpha} \\ \vec{c}^\top &= \left(A^\top \cdot \vec{\alpha}\right)^\top \\ &= \vec{\alpha}^\top \cdot A \end{aligned}$$

der Zeilenvektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$ der Matrix A darstellbar, so ist der zulässige Bereich entweder leer oder

$$z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i$$

ist der optimale Wert der Zielfunktion, wobei $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)^\top$.

$$\begin{aligned} \vec{c}^\top \vec{x} &= \vec{\alpha}^\top A \vec{x} && (68) \\ &= \vec{\alpha}^\top \vec{b} && (69) \end{aligned}$$