Aufgabe 1

(a)

- Schlupfvariablen: u, v, w
- Neues LOP:

$$3x + y + u = 10 \tag{1}$$
$$4x - y + v = 5 \tag{2}$$
$$-x - y + z + w = 3 \tag{3}$$
$$x, y, z, u, v, w \geq 0 \tag{4}$$

- Simplex-Tableau:

$$\begin{array}{ccccccc}
3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \tag{5}$$

- Basislösung: $u = 10,\ v = 5,\ w = 3$

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right| \begin{array}{l}
\leftarrow + \\
\mid \cdot \frac{1}{4} \quad 1 \quad -3 \quad -6 \\
\leftarrow + \\
\leftarrow +
\end{array} \tag{6}$$

$$\Longrightarrow \left|\begin{array}{ccccccc}
0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{55}{4} \\
1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} \\
0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{10}{2} \\
0 & -\frac{10}{2} & 2 & 0 & ?? & 0 & -\frac{10}{2}
\end{array}\right| \begin{array}{l}
\\
\\
-1 \\
\leftarrow +
\end{array} \tag{7}$$

(b)

- Minimierungsproblem kann erstmal umgeformt werden in ein duales Maximierungsproblem
- Schritt 1: Umwandlung in Maximierungsproblem

$$-\max F = -x + 3y - 2z \tag{8}$$
$$\dots \tag{9}$$
$$\tag{10}$$

- Schritt 2: Slack-Variablen, Simplex-Tableau $\varepsilon = \min\left\{\frac{12}{4}, \frac{10}{3}\right\}$, also Pivot-Element 4

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & \mathbf{4} & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ -4 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{3}{4} \quad -\frac{3}{4} \\ + \\ + \end{array} \tag{11}$$

$$\left|\begin{array}{ccccccc} \mathbf{\frac{5}{2}} & 0 & 2 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 10 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 3 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 8 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & -9 \end{array}\right| \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \quad \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} \quad \frac{2}{5} \\ + \\ + \\ + \end{array} \tag{12}$$

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & -11 \end{array}\right| \tag{13}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\vec{c}^{\top}\vec{x} = 11 \tag{15}$$

$$\text{Lösung:} \; -11 \tag{16}$$

(c)

- Wenn man hier die Relationszeichen wie gefordert dreht, werden Elemente von $\vec{b}$ negativ! Daher Schlupfvariablen abziehen statt addieren.
- Schlupfvariablen:

$$x + y - s_1 = 7 \tag{17}$$

$$9x + 5y + s_2 = 45 \tag{18}$$

$$2x + y - s_3 = 8 \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

- Hier kann keine Basislösung abgelesen werden, da hier keine Einheitsmatrix im Simplex-Tableau enthalten ist.

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 7 \\ 9 & 5 & 0 & 1 & 0 & 45 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right| \tag{21}$$

- Hier müsste man normalerweise einen weiteren Vektor $\vec{y}$ einführen und das Hilfsproblem lösen. Es werden hier noch zwei Schlupfvariablen eingeführt. Damit haben wir schonmal eine Basislösung. Jetzt müssen die Schlupfvariablen noch in die Kostenfunktion eingebaut werden. Dabei sollen die Werte der zwei neuen Variablen minimiert werden! Jetzt müssen erstmal Nullen unter die Basisspalten gebracht werden.

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 9 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 45 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right| \tag{22}$$

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 1 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 9 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 45 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right| \tag{23}$$

Entgegen der Blantschen Regel wird hier nicht mit der ersten Spalte angefangen. Wenn man woanders anfängt, geht die Rechnung leichter.

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 5 & 1 & 0 & -5 & 0 & 10 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right| \tag{24}$$

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & -1 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right| \tag{25}$$

- Das Tableau ist jetzt optimal, da es keinen positiven Wert mehr in der letzten Zeile gibt. Hier kann man jetzt mit der Phase 2 fortfahren.

- Der Teil mit den ursprünglichen Variablen kann aus der bisherigen Basislösung abgelesen werden. Von da an kann wie gewohnt fortgefahren werden.

$$\left|\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 20 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \tag{26}$$

Zunächst wird dafür gesorgt, dass Nullen unter den Basisspalten stehen.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 5 & -110 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ -1 \quad 2 \quad -10 \\ \leftarrow + \end{matrix} \tag{27}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{5} & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 15 & -120 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow + \\ \mid \cdot \frac{1}{5} \quad 1 \quad 1 \quad -15 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \tag{28}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 9 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 1 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 2 \\ -7 & 0 & 0 & -3 & 0 & -135 \end{vmatrix} \tag{29}$$

Jetzt lässt sich die Lösung ablesen.

$$x = 0 \tag{30}$$

$$y = 9 \tag{31}$$

Aufgabe 3

Die Aufgabenstellung wird ein wenig umformuliert:

Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist der Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underline{a}_i = A^\top \cdot \vec{\alpha} \\ \vec{c}^\top &= \left(A^\top \cdot \vec{\alpha}\right)^\top \\ &= \vec{\alpha}^\top \cdot A \end{aligned}$$

der Zeilenvektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$ der Matrix A darstellbar, so ist der zulässige Bereich entweder leer oder

$$z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i$$

ist der optimale Wert der Zielfunktion, wobei $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)^\top$.

$$\vec{c}^\top \vec{x} = \vec{\alpha}^\top A \vec{x} \tag{32}$$

$$= \vec{\alpha}^\top \vec{b} \tag{33}$$