Technische Universität Ilmenau 3. März 2022

Vorlesung

Prozessmess- und Sensortechnik 1

Prof. Thomas Fröhlich

Vorlesungsmitschrift von
Adrian Schollmeyer

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen **4**
1.1. Definitionen . . . 4
1.2. Die SI-Basiseinheiten . . . 7
1.3. Unsicherheitsbetrachungen . . . 9
1.3.1. Wiederholung Wahrscheinlichkeit und Statistik . . . 9
1.3.2. Standardmessunsicherheit . . . 10
1.3.3. Fehlerfortpflanzungsgesetz . . . 10
1.3.4. Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM . . . 12
1.3.5. Ein Beispiel zur Messunsicherheit . . . 13
1.4. Lineare Kennlinien in der Messtechnik . . . 15
1.4.1. Kennlinienverläufe . . . 15
1.4.2. Invertierbarkeit . . . 16
1.5. Vergleichskalibrierung . . . 17

2. Temperaturmesstechnik **18**
2.1. Grundlagen . . . 18
2.2. Temperaturskalen . . . 20
2.3. Mechanische Ausdehnungsthermometer . . . 21
2.3.1. Feststoffe . . . 22
2.3.2. Flüssigkeits- und Gasthermometer . . . 22
2.4. Elektrische Thermometer . . . 23
2.4.1. Widerstandsthermometer . . . 23
2.4.2. Messschaltungen . . . 24
2.4.3. Thermoelemente . . . 28
2.5. Vor- und Nachteile verschiedener Thermometer . . . 29
2.6. Strahlungsthermometer / Pyrometer . . . 30

3. Spannungs- und Dehnungsmesstechnik **34**

4. Längenmesstechnik **43**
4.1. Grundlagen . . . 43
4.2. Das Abbe-Komparator-Prinzip . . . 44
4.3. Michelson-Interferometer . . . 47
4.4. Längen- und Winkelmessung mit Inkrementalverfahren und Absolutwertgebern . . . 52
4.5. Messen kleiner Längen . . . 54
4.5.1. Kapazitive Längenmessung . . . 55

5. Trägheitsmesstechnik **56**
5.1. Prinzipieller Aufbau eines DMS-Beschleunigungssensors 56

6. Durchflussmesstechnik **60**
6.1. Fundamentalverfahren 60
6.2. Wirkdruckverfahren 61
6.2.1. Wirkdruckverfahren mit Blende oder Venturirohr 62
6.2.2. Staurohr-Verfahren 63
6.2.3. Zähler 63
6.2.4. Schwebekörper-Durchflussmessung 64
6.3. Induktive Durchflussmessung 65
6.4. Weitere Verfahren 65
6.4.1. Ultraschall-Durchflussmessung 65
6.4.2. Thermische Durchflussmessung 66

7. Druckmesstechnik **68**
7.1. Mathematischer Zusammenhang 68
7.2. U-Rohr-Manometer 68
7.3. Elektrische Drucksensoren 70
7.3.1. Druckmessung mit Dehnmessstreifen 70
7.4. Mechanische Druckmessgeräte 70
7.5. Kolbenmanometer 71
7.6. Kalibrierung von Drucksensoren 71

A. Praktikum Mess- und Sensortechnik **72**

B. Raumwinkel **73**

C. Laser als Lichtquelle **74**

D. Magnetfeldmessung **76**

E. Gray-Kodierung **77**

Stichwortverzeichnis **80**

1. Grundlagen

1.1. Definitionen

Siehe Foliensatz GMT.

1.1. Metrologie ist die Gesamtheit der theoretischen und methodischen Grundlagen, juristischen und normativ-technischen Regelungen, materiell-technischen Mittel und organisatorischen Maßnahmen zur Sicherung der Einheitlichkeit der Messungen.

1.2. Eine **Physikalische Größe** ist ein Merkmal eines Objektes (Körper, Zustand oder Vorgang), das qualitativ charakterisiert und quantitativ ermittelt werden kann. Für die Größe darf auch die Benennung **Größenart** verwendet werden.
Beispiele für Größenarten: Länge, Zeit, Masse, Temperatur, etc.

1.3. Der **Wert** einer Größe ist das Produkt aus Zahlenwert und Einheit zur qualitativen und quantiativen Charakterisierung einer physikalischen Größe.
Beispiele: $5\,m$, $10\,kg$, $20\,\frac{m}{s^2}$

1.4. Die **Dimension** einer Größe ist ein Ausdruck, der die Beziehung der Größe zu den Basisgrößen eines Systems wiedergibt und die Größe als Potenzprodukt der Basisgrößen dieses Systems mit dem Zahlenfaktor 1 darstellt.
Beispiel: Die Kraft im Größensystem l, m, t hat die Dimension LMT^{-2}.

1.5. Eine **Messung** ist die Ermittlung des Wertes einer physikalischen Größe oder der quantitative Vergleich der zu messenden Größe mit einer vorgegebenen Größe gleicher Art.

1.6. Ein **Messmittel** ist ein technisches Mittel, das zur Ausführung von Messungen dient.

1.7. Eine **Maßverköperung** ist ein Messmittel, das einen Wert oder mehrere Werte einer physikalischen Größe darstellt.
Beispiele: Wägestücke, Parallelendmaß, Strichmaßstab, Normalelement

1.8. Ein **Messgerät** ist ein Messmittel, welches dies zu messende oder eine mit ihr gesetzmäßig verknüpfte Größe in eine Anzeige oder eine der Anzeige gleichwertige Information umwandelt.

1.9. Der **Messwandler** ist ein Messmittel, das die zu messende nichtelektrische Größe in eine elektrische Größe, die zur Übertragung und Weiterverarbeitung, jedoch nicht zur direkten Aufnahme durch den Beobachter geeignet ist, umwandelt.
Synonyme: *Sensor*, *Messfühler*, *Messwertaufnehmer*, *Messzelle*, *Messwertgeber*, *transducer*

1.10. Ein **Normal** (**Standard**, **Etalon**) ist ein Messmittel zur Darstellung einer Einheit einer physikalischen Größe.

1.11. Ein **Primärnormal** ist ein Normal, durch das eine Einheit nach ihrer Definition dargestellt wird und dess metrologische Eigenschaften dem jeweils erreichten Stand von Wissenschaft und Technik entsprechen.

1.12. Ein **Sekundärnormal** ist ein Normal, dessen Wert in der Regel unmittelbar vom Primärnormal abgeleitet ist.

1.13. Ein **Referenznormal** ist ein Normal, das an das Primärnormal oder Sekundärnormal angeschlossen ist und zur Übertragung der Einheit auf Normale niederer Ordnung und/oder auf Arbeitsmessmittel verwendet wird.

1.14. Kalibrieren im Bereich der Messtechnik heißt, die Messabweichungen am fertigen Messgerät festzustellen. Beim Kalibrieren erfolgt *kein* technischer Eingriff am Messgerät. Bei anzeigenden Messgeräten wird durch das Kalibrieren die Messabweichung zwischen der Anzeige und dem richtigen oder als richtig geltenden Wert festgestellt (DIN 1319).
Bei Maßverkörperungen wird durch das Kalibrieren die Messabweichung zwischen der Aufschrift und dem richtigen Wert festgestellt. Bei übertragenden Messgeräten wird durch das Kalibrieren die Messabweichung festgestellt zwischen dem Wert des Ausgangssignals und dem Wert, den dieses Signal bei idealem Übertragungsverhalten und bei gegebenem Eingangswert haben müsste.

1.15. Der **Messwert** ist der durch eine Einzelmessung ermittelte Wert eine Größe als Produkt aus Zahlenwert und Einheit.

1.16. Die **Messabweichung** ist die Differenz zwischen dem Messwert und einem Bezugswert.

1.17. Das **Messergebnis** ist der Messwert oder aus mehreren Messwerten mithilfe einer eindeutigen Beziehung erhaltener Wert der zu ermittelnden Größe.

1.18. Ein **vollständiges Messergebnis** ist der Wert einer Größe zusammen mit der zugeordneten erweiterten Messunsicherheit und dem benutzen Erweiterungsfaktor k.

1.19. Der **Messbereich** ist der Bereich der Werte einer Messgröße, für den die Anzeige des Messmittels innerhalb festgelegter Fehlergrenzen liegt.

1.20. Die **Empfindlichkeit** oder **Sensitivität** eines Messmittels ist der Quotient aus der Änderung der Werte der Ausgangsgröße eines Messmittels und der Änderung der Werte der Messgröße, welche die Änderung der Ausgangsgröße hervorruft.

$$E = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e} = K_p = V \tag{1.1}$$

Die Empfindlichkeit wird in der Automatisierungstechnik (Regelungstechnik) als Übertragungsfaktor (K_p), in der Längenprüftechnik auch als Vergrößerung (V) bezeichnet.

1.21. Ein **Signal** ist die zeitliche Darstellung der Werte von Größen.

1.2. Die SI-Basiseinheiten

1.22. Die **SI-Basiseinheiten** des internationalen Einheitensystems sind sieben (seit 2019 vollständig) über Naturkonstanten definierte Einheiten, aus denen sich sämtliche andere physikalische Einheiten ableiten lassen.

Die Größen und Einheiten der SI-Basiseinheiten sind:

Sekunde in s (Sekunde)

Länge in m (Meter)

Masse in kg (Kilogramm)

Stromstärke in A (Ampere)

Thermodynamische Temperatur in K (Kelvin)

Stoffmenge in mol (mol)

Lichtstärke in cd (Candela)

1.23. Eine **Sekunde** ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der Strahlung, die dem Übergang zwischen beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entspricht.

$$\Delta\nu_{Cs} = 9\,192\,631\,770\,Hz \tag{1.2}$$

$$1\,s = \frac{9\,192\,631\,770}{\Delta\nu_{Cs}} \tag{1.3}$$

1.24. Das **Meter** ist über die **Vakuumlichtgeschwigkeit** c definiert.

$$c = 299\,792\,458\,\frac{m}{s} \tag{1.4}$$

$$1\,m = \frac{1}{299\,792\,458} \cdot c \cdot s \tag{1.5}$$

1.25. Das **Kilogramm** ist definiert, indem für die PLANCK-Konstante h der unten stehende Wert festgelegt wird.

$$h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\,\frac{kg \cdot m^2}{s} \tag{1.6}$$

$$1\,kg = \frac{1}{h \cdot m^2} \cdot 1\,s \tag{1.7}$$

1.26. Ein **Ampere** entspricht einem Fluss von 1 Coulomb pro Sekunde durch den Leiterquerschnitt. Das Coulomb ist über die Elementarladung e festgelegt.

$$e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,As \tag{1.8}$$

$$1\,A = 1\,\frac{C}{s} \tag{1.9}$$

$$= \frac{1}{1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}} \cdot e \cdot \frac{1}{1\,s} \tag{1.10}$$

1.27. Ein **Kelvin** ist diejenige Änderung der thermodynamischen Temperatur, die einer Änderung der thermischen Energie um $1,380\,649 \cdot 10^{-23} J$ entspricht. Dabei wird die BOLTZMANN-Konstante k_B als Naturkonstante festgelegt:

$$k_B = 1,380\,649 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \tag{1.11}$$

$$1\,K = \frac{1}{k_B} \cdot 1,380\,649 \cdot 10^{-23}\,J \tag{1.12}$$

1.28. Ein **Mol** eines Stoffes enthält exakt $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ Teilchen. Diese Zahl entspricht dem Wert der AVOGADRO-Konstante N_A.

1.29. Die **Candela** ist definiert, indem für das photometrische Strahlungsäquivalent K_{cd} der monochromatischen Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}\ Hz$ der Zahlenwert 683 festgelegt wird.

$$K_{cd} = 683\,\frac{lm}{W} = 683\ cd\,sr\,kg^{-1}\ m^{-2}\ s^{3} \tag{1.13}$$

1.3. Unsicherheitsbetrachungen

1.3.1. Wiederholung Wahrscheinlichkeit und Statistik

1.30. Zu N Messwerten $x_i, i = 1, \ldots, N$ lässt sich der **Mittelwert** $\overline{x}$ wie folgt berechnen:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1.14}$$

1.31. Die **Standardabweichung** s ist ein Maß für die Streuung der Werte x_i um ihren Mittelwert $\overline{x}$.

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} \tag{1.15}$$

Üblicherweise wird den Mittelwerten mehr als den Einzelwerten vertraut, da die Standardabweichung der Mittelwerte kleiner ist als die der Einzelwerte.

1.3.2. Standardmessunsicherheit

1.32. Die **Standardmessunsicherheit** u gibt an, in welchem Bereich um das Messergebnis sich der tatsächliche Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 68.3 % befindet. Der Wert kann mit einem **Erweiterungsfaktor** k multipliziert werden, um die **erweiterte Messunsicherheit** oder einfach **Unsicherheit** U einer Größe zu erhalten. Die Standardunsicherheit lässt sich mithilfe der STUDENT-Verteilung berechnen und für große N auch näherungsweise beschreiben:

$$u \approx \frac{s}{\sqrt{N}} \quad \text{für große } N \tag{1.16}$$

$$u = \frac{s \cdot t}{\sqrt{n}} \tag{1.17}$$

Den Parameter t ist u. A. von der Anzahl Messungen abhängig und kann aus Tafelwerken entnommen werden.

Die Messunsicherheit sind sehr wichtige Eigenschaften einer Messung. Sie geben je nach Erweiterungsfaktor unterschiedlich große Intervalle um den Mittelwert an, in denen der genaue Wert liegt. Je größer k, umso größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dem Intervall der genaue Wert liegt, jedoch steigt damit auch die Unsicherheit (d. h. das Intervall wird größer). Tabelle 1.1 zeigt, wie sich die Wahrscheinlichkeit, den korrekten Wert im Intervall zu haben, mit steigendem k entwickelt. Üblicherweise nimmt man $k = 2$, da hier bereits die Wahrscheinlichkeit bei über 95 % liegt.

Bei der Angabe der Unsicherheit ist grundsätzlich zu beachten, dass der Erweiterungsfaktor k immer mit angegeben werden muss, da der Wert von k essentiell ist, um das Ergebnis der Unsicherheitsberechnung korrekt zu interpretieren.

Tabelle 1.1.: Übliche Unsicherheiten mit ihren Erweiterungsfaktoren und Wahrscheinlichkeiten

Erweiterungsfaktor	Wahrscheinlichkeit	
$k = 1$	68.3 %	einfache Standardunsicherheit
$k = 2$	95.5 %	zweifache Standardunsicherheit
$k = 3$	99.7 %	dreifache Standardunsicherheit

1.3.3. Fehlerfortpflanzungsgesetz

Sensitivitätskoeffizienten Häufig ist eine Messgröße y nicht direkt messbar, sondern aus mehreren messbaren Größen x_i zu berechnen.

$$y = y(x_1, x_2, \dots) \tag{1.18}$$

Der Einfluss der Standardunsicherheiten $u(x_i)$ der Eingangsgrößen x_i auf das Ergebnis y kann mittels der Taylorreihe abgeschätzt werden. Der Einfachheit halber werden nur lineare Glieder betrachtet:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \dots \tag{1.19}$$

Diese partiellen Ableitungen heißen **Sensitivitätskoeffizienten**. Sie geben bei der Berechnung von $u(y)$ an, wie stark der Einfluss der einzelnen Unsicherheiten $u(x_i)$ auf die Unsicherheit des Ergebnisses $u(y)$ ist.

Bei der Berechnung wird zunächst die partielle Ableitung aus der Modellgleichung gebildet und anschließend die konkreten Werte für alle darin noch enthaltenen gemessenen Größen eingesetzt.

Fehlerfortpflanzungsgesetz Zur Berechnung der Unsicherheit einer berechneten Größe y aus mehreren Messbaren Größen x_i wird das Fehlerfortpflanzungsgesetz genutzt. Dabei wird grundsätzlich ohne Erweiterungsfaktoren, d. h. mit Standardunsicherheiten bzw. $k = 1$ gerechnet. Ist eine Unsicherheit einer Eingangsgröße x_i mit $k > 1$ angegeben, muss daraus wieder die Standardunsicherheit $u(x_i) = \frac{U(x_i)}{k}$ berechnet werden.

1.33. Die **kombinierte Standardunsicherheit** $u_c(y)$ einer Größe y, welche aus gemessenen Größen x_i berechnet wird, berechnet sich mithilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes und der Sensitivitätskoeffizienten:

$$u_c(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot u(x_2)\right)^2 + \dots} \tag{1.20}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot u(x_i)\right)^2} \tag{1.21}$$

Zur Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit eignet sich ein tabellarisches Verfahren, welches beispielhaft in Abschnitt 1.3.5 gezeigt wird und aufgrund der Darstellung auch die Ermittlung zusätzlicher Eigenschaften (wie bspw. der wichtigsten Quellen für Unsicherheiten) ermöglicht.

Sonstige Notizen

- Wahrscheinlichkeitsfunktion
- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
  - wichtige Verteilung: GAUSSsche Normalverteilung
- Berechnung von Durchschnitten
- Durchschnitt $\overline{x}$ (arith. Mittel) und Standardabweichung

- Standardabweichung $s(x)$
  - Den Mittelwerten wird i. A. mehr vertraut, da die Standardabweichung der Mittelwerte kleiner ist als die der Einzelwerte.

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1.22}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2} \tag{1.23}$$

$$s(\overline{x}) \approx \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} \quad \text{(für große } n\text{)} \tag{1.24}$$

$s(\overline{x})$ ist für kleine n t-verteilt (STUDENT-Verteilung):

$$s(\overline{x}) = \frac{s(x_i) \cdot t}{\sqrt{n}} \quad \text{(für große } n\text{)} \tag{1.25}$$

Das t der STUDENT-Verteilung kann Tafelwerken entnommen oder berechnet werden.

Grundgesamtheit Menge aller Messungen

- Erwartungswert μ
- Varianz σ

Stichprobe

- Mittelwert $\overline{x}$ ... ist ein (der *beste*) *Schätzer* für den Erwartungswert
- Standardabweichung ... ist ein (der *beste*) Schätzer für die Varianz $\overline{s}$

1.3.4. Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM

GUM ist ein Leitfaden zur Bestimmung der Messunsicherheit nach festen Regeln:

(1) Kenntnisse über den Messprozess

(2) Modellieren der Messung (Ermittlung von Modellgleichungen)

(3) Unsicherheiten der Eingangsgrößen bestimmen und nach Typ A/B einteilen

(4) Kombination der Standardunsicherheiten gemäß Fehlerfortpflanzung (**??**)

(5) Erweiterte Messunsicherheit (Definition 1.32)

(6) Angabe und Bewertung des Messergebnisses

Bei den Kenntnissen über den Messprozess und der Modellierung ist zunächst eine Prozessbeschreibung gefordert sowie die Zusammenhänge zwischen der Ausgangsgröße und den zu messenden Größen sowie weiterer Einflussgrößen. Daraus werden dann die Modellgleichungen ermittelt.

Zu allen Einflussgrößen müssen anschließend mithilfe von Messungen, Datenblatt-Angaben oder Kalibrierscheinen Schätzwerte und Unsicherheiten bestimmt werden. Hier findet nun die Unterscheidung zwischen Typ-A-Unsicherheiten und Typ-B-Unsicherheiten statt.

> **1.34.** Eine **Typ-A-Unsicherheit** ist eine zufällige Messabweichung. Diese ergibt sich schon allein dadurch, dass der Messprozess nicht ganz exakt ist und trifft daher normalerweise auf jede zu messende Größe zu.

Typ-A-Unsicherheiten sind üblicherweise normalverteilt. Aufgrund von Schwankungen bspw. bei der Einstellung der Messanordnung auf die zu messende Größe unterscheidet sich das Messergebnis minimal vom eigentlichen Wert – mal mehr, mal weniger. Indem möglichst viele Messungen durchgeführt werden, kann ein Mittelwert mit einer sehr geringen Standardabweichung und damit auch geringer Standardunsicherheit berechnet werden.

> **1.35.** Eine **Typ-B-Unsicherheit** ist eine Unsicherheitsangabe, die nicht aus einer Messung entsteht und üblicherweise ein fester Wert.

Typ-B-Unsicherheiten sind grundsätzlich erst einmal nicht durch mehrere Messungen veränderbar. Sie ergeben sich aus Angaben in Datenblättern, Patenten und Kalibrierscheinen sowie durch Begrenzungen in Auflösungen von Anzeigen. Zu guter letzt ergeben sie sich aber auch aus Erfahrungswerten, bspw. wenn bekannt ist, dass ein Messgerät bestimmte Abweichungen hat, aber auch durch Unsicherheiten bei Umgebungsbedingungen (bspw. bei der Messung von temperaturabhängigen Größen wie der Längenmessung).

Nach der Bestimmung der Schätzwerte und Unsicherheiten lassen sich nun mithilfe der Modellgleichung das Ergebnis berechnen sowie mithilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes die kombinierte Standardunsicherheit des Ergebnisses berechnen. Hier bietet sich das bereits erwähnte tabellarische Verfahren an, welches in Abschnitt 1.3.5 gezeigt wird. Danach wird die Standardunsicherheit noch mit dem gewünschten Erweiterungsfaktor k (üblicherweise $k = 2$) multipliziert, um die Messunsicherheit zu erhalten.

Abschließend folgt die Angabe des vollständigen Ergebnisses sowie die Bewertung dessen mithilfe der berechneten Unsicherheiten. Hier bietet es sich auch an, die Qualität des Ergebnisses anhand der Größe der Messunsicherheit zu bewerten sowie wesentliche Quellen für Unsicherheiten zu nennen, um bspw. Ansätze für Verbesserungen im Messprozess zu bestimmen.

1.3.5. Ein Beispiel zur Messunsicherheit

Dies ist ein Beispiel zur Messungsicherheit gemäß dem Leitfaden zur Berechnung der Messunsicherheit (GUM). In diesem Beispiel wird ein elektrischer Widerstand und seine

Heizleistung P betrachtet.

Das Modell ergibt sich wie folgt:

$$P = R \cdot I^2 \tag{1.26}$$

Aus dem Datenblatt lässt sich entnehmen:

$$R = 1000\,\Omega \qquad U(R) = 0.2\,\% \quad (k = 2) \tag{1.27}$$

Hierbei handelt es sich um eine Typ-B-Unsicherheit.

Gemessen wird:

$$I = 10\,mA \qquad u(I) = 0.1\,mA \quad (k = 1) \tag{1.28}$$

Hierbei handelt es sich um eine Typ-A-Unsicherheit.

Daraus kann die Heizleistung berechnet werden:

$$P = R \cdot I^2 \tag{1.29}$$

$$= 1000\,\Omega \cdot (0.01\,mA)^2 \tag{1.30}$$

$$= 0.1\,W \tag{1.31}$$

Gemäß Fehlerfortpflanzungsgesetz lässt sich nun $u(P)$ berechnen:

$$u(P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial R} \cdot u(R)\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I} \cdot u(I)\right)^2} \tag{1.32}$$

Zwischenergebnisse:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = I^2 \tag{1.33}$$

$$= 10^{-4}\,A^2 \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial P}{\partial I} = 2 \cdot R \cdot I \tag{1.35}$$

$$= 20\,V \tag{1.36}$$

Gerade bei größeren Formeln zur Berechnung bietet sich die Berechnung der Unsicherheit mithilfe einer Tabelle an, geht aber auch für kleinere Formeln. Tabelle 1.2 zeigt, wie die Standardunsicherheit schrittweise für das hier gezeigte Beispiel berechnet werden kann. Am Ende ergibt sich also $u(P) = 2.002\,mW$. Diese Standardunsicherheit muss nun noch

Tabelle 1.2.: Tabelle zur schrittweisen Berechnung der Standardunsicherheit

Größe		s_i	u_i	$s_i \cdot u_i$
Widerstand	R	$10^4\,A^2$	$1\,\Omega$	$0.1\,mW$
Strom	I	$20\,V$	$10^4\,A$	$2\,mW$
$\sqrt{\sum (s_i \cdot u_i)^2}$	$u(P)$			$2.002\,mW$

erweitert werden ($U(P) = k \cdot u(P)$). Zum Schluss kann das Endergebnis angegeben und bewertet werden:

$$P = 0.1\,mW \qquad\qquad U(P) = 4\,mW \quad (k = 2) \tag{1.37}$$

Wenn man sich die relativen Gewichtungen der Messunsicherheitsbeiträge anschaut, erkennt man, dass der Großteil der Messunsicherheit vom gemessenen Strom kommt. Dies ist dann die Größe, deren Unsicherheit man am ehesten verbessern muss, um eine geringere Messunsicherheit zu erhalten. Gerade bei vielen Eingangsgrößen bietet sich die gezeigte Tabelle 1.2 an, um das Ergebnis hinsichtlich der Quellen für Messunsicherheit zu bewerten.

1.4. Lineare Kennlinien in der Messtechnik

1.4.1. Kennlinienverläufe

1.36. Die **Kennlinie** einer Messung ist die Funktion $f(x)$, die die Eingangsgröße auf die Ausgangsgröße abbildet.

Im Idealfall ist die Kennlinie einer Messung eine lineare Funktion. Diese lässt sich durch zwei Punkte auf der Kennlinie eindeutig bestimmen.

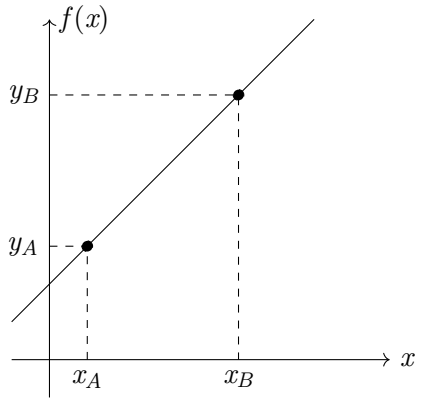

Abbildung 1.1.: Beispielhafte lineare Kennlinie

Nichtlineare Kennlinien (bspw. quadratische, kubische, logarithmische, exponentielle Kennlinien) benötigt man mehr als zwei Punkte. Eine lineare Kennlinie ist hingegen immer über den Anstieg m und den Nullpunkt n gegeben:

$$f(x) = mx + n \tag{1.38}$$

Aus den Punkten (x_A, y_A) und (x_B, y_B) (o. B. d. A. $x_B > x_A$) lassen sich m und n eindeutig bestimmen. m ist der Anstieg der Geraden, also genau die erste Ableitung, die

bei Gerade gleich dem Differenzenquotienten zweier Punkte auf der Geraden ist:

$$y = mx + n \tag{1.39}$$

$$m = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{1.40}$$

$$= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{1.41}$$

In die Gleichung lässt sich dann ein beliebiger Punkt auf der Geraden einsetzen, um daraus n zu bereichnen. Beispielhaft sei hier (x_A, y_A) eingesetzt:

$$y = m(x - x_A) + y_A \tag{1.42}$$

$$= mx + \underbrace{(-mx_A + y_A)}_{=n} \tag{1.43}$$

$$n = y_A - mx_A \tag{1.44}$$

1.4.2. Invertierbarkeit

1.37. Eine Kennlinie ist **invertierbar**, wenn zu jedem y mit $y = f(x)$ die Eingangsgröße x eindeutig bestimmt werden kann. Die Funktion f ist also injektiv.

Nicht alle nichtlinearen Kennlinien sind invertierbar. Zu einem Ausgang kann es dann mehrere mögliche Eingänge geben. Dies ist problematisch, wenn in der Messtechnik das gemessene Signal auf die physikalische Eingangsgröße zurückgerechnet werden soll – dafür müsste nämlich die Funktion invertierbar sein.

Betrachtet man ein beliebiges Struktur- und Wandlerschema eines Sensors und nimmt an, dass alle Übertragungsfunktionen $f_1, \ldots, f_k$ der Glieder linear sind, gilt:

$$x_2 = f_1(x_1) = m_1 x_1 + n_1 \tag{1.45}$$

$$x_3 = f_2(x_2) = m_2 x_2 + n_2 \tag{1.46}$$

$$\vdots \tag{1.47}$$

$$x_{k+1} = f_k(x_k) = m_k x_k + n_k \tag{1.48}$$

Am Ende interessant im Struktur- und Wandlerschema ist die Beziehung zwischen der Eingangsgröße x_1 und der Ausgangsgröße x_{k+1}. Diese lässt sich einfach durch Verkettung der Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ berechnen:

$$x_{k+1} = F(x_1) \tag{1.49}$$

$$= (f_k \circ \ldots \circ f_1)(x_1) \tag{1.50}$$

$$= f_k(\ldots(f_2(f_1(x_1)))) \tag{1.51}$$

Für $k = 3$ ergäbe dies:

$$x_4 = f_3\left(f_2\left(f_1\left(x_1\right)\right)\right) \tag{1.52}$$

$$= m_3\left(m_2\left(m_1 x_1 + n_1\right) + n_2\right) + n_3 \tag{1.53}$$

$$= \underbrace{m_3 m_2 m_1}_{\text{Sensitivität } M} \cdot x_1 + \underbrace{m_3 m_2 n_1 + m_2 n_2 + m_3}_{\text{Nullpunkt } N} \tag{1.54}$$

$$x_4 = F\left(x_1\right) = M x_1 + N \tag{1.55}$$

Diese Funktion lässt sich nun ganz einfach durch Auflösen nach x_1 invertieren. Dies geht wieder für beliebige k gleich:

$$x_1 = F^{-1}\left(x_{k+1}\right) \tag{1.56}$$

$$= \frac{x_{k+1} - N}{M} \tag{1.57}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{M}}_{=M^*} x_{k+1} - \underbrace{\frac{N}{M}}_{=N^*} \tag{1.58}$$

Die invertierte Funktion F^{-1} ist offensichtlich auch wieder eine lineare Funktion mit Sensitivität M^* und Nullpunkt N^*.

Sind alle Sensorkennlinien $f_1, \ldots, f_k$ linear, lässt sich die Gesamtkennlinie F also ganz einfach invertieren und liefert erneut eine lineare Kennlinie. Haut auch nur ein Sensorelement f_i eine nichtlineare Kennlinie, ist dies nicht mehr unbedingt der Fall und entsprechend kann es auch sein, dass F nicht invertierbar ist.

1.5. Vergleichskalibrierung

Angenommen wir haben ein Thermometer, welches kalibriert werden soll. Das Thermometer wird zusammen mit einem Referenzthermometer auf die gleiche Temperatur gebracht. Nun können verschiedene Messpunkte angefahren und die Referenztemperatur T_R mit der Temperatur des Prüflings T_P verglichen werden.

Bei der **Vergleichskalibrierung** wird also eine Kennlinie zwischen einer Referenz und einem Prüfling aufgezeichnet. Idealerweise hat eine solche P-R-Kennlinie den Nullpunkt bei $(0, 0)$ und eine Steigung (Empfindlichkeit) von exakt 1. Alternativ kann die Kennlinie für die Differenz $R - P$ aufgetragen werden, die dann idealerweise gleich $f(x) = 0$ ist.

Bei der Vergleichskalibrierung ist zu beachten, dass Abkling- und Schwingungsverhalten (bspw. die Anpassung des Thermometers an die Umgebungstemperatur, Schwingung eines Kraftsensors) berücksichtigt werden muss. Kalibrierpunkte können stufenförmig oder auch plateauartig angefahren werden. Letzteres hilft dabei, Kriecheffekte zu vermeiden.

Es ist bei der Vergleichskalibrierung sehr wichtig, über die Dynamik des Systems nachzudenken! Zur Kalibrierung muss abgewartet werden, bis ein statischer Bereich erreicht wurde. Für manche Kalibrierungen gibt es vorgeschriebene Normen, wie die Kalibrierung ablaufen muss.

2. Temperaturmesstechnik

2.1. Grundlagen

Einführungsbeispiel Wir haben eine Leitung, die heißen Wasserdampf produziert (bspw. in einem Kohlekraftwerk). Der Gesetzgeber schreibt eine Obergrenze von $600\,°C$ Temperatur im Rohr vor.

Man benötigt jetzt also einen Sensor für die Temperatur und einen Aktor, der die Zufuhr an Wasserdampf regelt (bspw. die Menge an Kohle, die zugeführt wird).

Einen Sensor kann man jetzt zwar an die Außenwand des Rohrs anbringen, aber dies ist keine gute Idee. In dem Rohr haben wir bereits einen Temperaturgradienten und außerhalb vom Rohr fällt die Temperatur schnell auf Raumtemperatur ab. Damit messen wir systematisch zu wenig (insb. kommt es noch einmal zu Schwankungen bspw. wenn die Tür geöffnet wird).

Man könnte jetzt prinzipiell den Sensor isolieren. Dann haben wir eine höhere Temperatur beim Sensor als außen. Aber auch dies ist noch nicht die für uns interessante Dampf-Temperatur.

Ein Thermometer lässt sich nicht wirklich nachträglich in die Leitung einbauen. Man kann jedoch (und dies wird tatsächlich gemacht) ein sog. *Schutzrohr* in die Leitung an einer vorgesehenen Stelle eingesetzt, in welches man einen Messeinsatz einsetzen kann. Damit kann man geschützt die Temperatur in der Mitte der Leitung messen. Allerdings werden auch das Schutzrohr und der Messeinsatz Wärme ableiten, weshalb die Temperatur weniger sein wird als im Rohr.

Wichtig Ein Thermometer misst immer seine eigene Temperatur! Ein *thermischer Kontakt* zwischen Mediumstemperatur und Sensorelement ist nötig!

Dynamik Was passiert, wenn im Zeitverlauf die Mediumstemperatur springt? Unser Messeinsatz hat eine Verzögerung. Statt eines Sprunges ändert sich die gemessene Temperatur stetig und nähert sich über die Zeit an die tatsächliche Temperatur an. Je größer die Isolation zwischen Medium und Messeinsatz, um so länger dauert die Anpassung. Ein guter Wärmeleitkoeffizient führt wiederum zu einer schnellen Anpassung der Temperatur.

Allgemein ist für die Dynamik ein dünnes Schutzrohr besser als ein dickes, während ein dickes Schutzrohr besser für die Stabilität ist. Hier muss also ein Kompromiss gefunden werden, bspw. indem die Spitze des Temperatursensors angespitzt/verjüngt ist. So ist an der Biegestelle der Sensor dicker und stabiler und an der Stelle, an der gemessen wird, der Sensor dünner und hat daher einen höheren Wärmeleitkoeffizienten.

Temperaturen darf man nicht addieren. Wenn man bspw. zwei Gemische mit Temperaturen T_1 und T_2 mischt, addieren sich die Temperaturen *nicht*. Man sagt, die Temperatur ist eine **intensive Größe** :

$$T_{neu} = \frac{T_1 + T_2}{2} \tag{2.1}$$

Im Gegensatz dazu wären **extensive Größen** bspw. Länge und Masse.

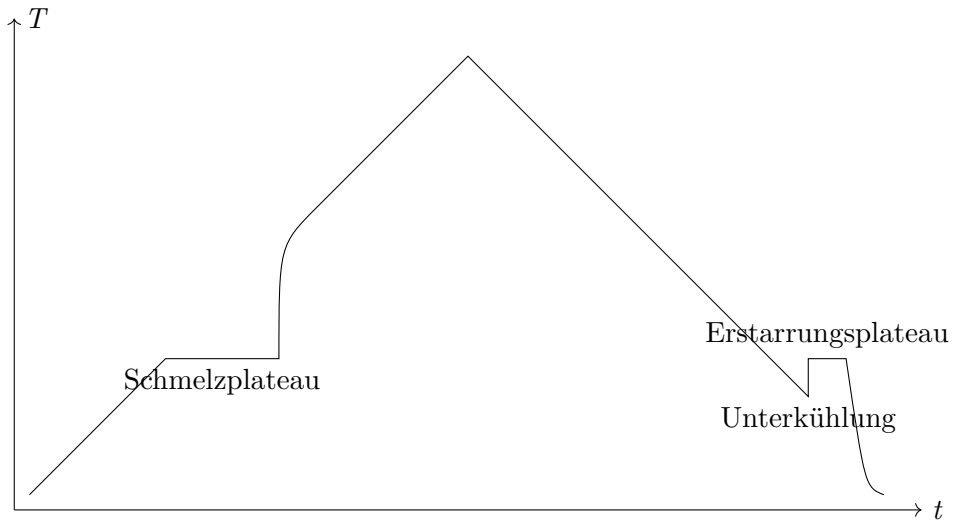

Abbildung 2.1.: Temperaturverlauf bei Schmelzvorgang und anschließendem Gefriervorgang

Schmelzplateaus wie in Abbildung 2.1 eignen sich gut, um Thermometer zu kalibrieren. Auf diese Weise wurde bspw. auch lange Zeit das Grad Celsius bestimmt.

2.1. Das **Kelvin** ist der 273.16 te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von Wasser.
(diese Definition galt bis 20.5.2019!)

Die alte Definition des Kelvin benutzt die Gleichung für das ideale Gas:

2.2.

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \tag{2.2}$$

Man kann die Temperatur nicht auf $0\,K$ absenken, aber man kann die alten Punkte für die Celsius-Definition ($0\,°C$ und $100\,°C$) nutzen, um auf $0\,K$ zu extrapolieren.

2.3. Der Aggregatzustand von Wasser ist abhängig von Temperatur und Druck. Der **Tripelpunkt** ist dabei der Punkt, an dem alle drei Aggregatzustände gleichzeitig vorhanden sind.

Der Tripelpunkt ist unabhängig vom Druck. Schematisch ist dies in Abbildung 2.2 erkennbar.

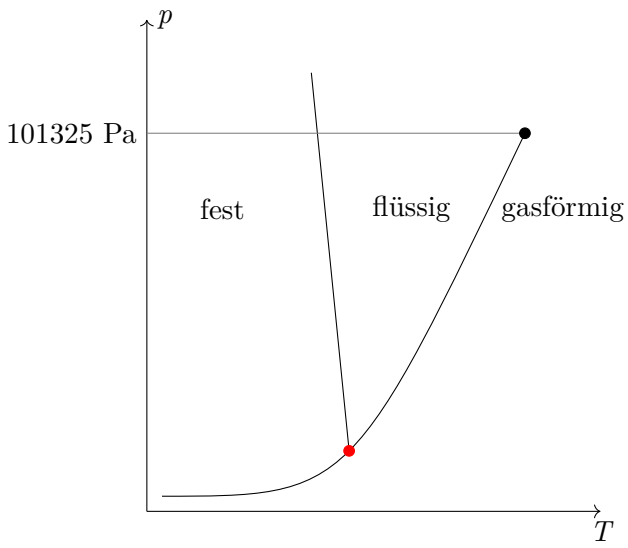

Abbildung 2.2.: Schematische Darstellung des Tripelpunktes von Wasser

Die Messung erfolgt in einer sog. *Tripelpunktzelle*. In dieser wird Wasser eingefüllt und die Zelle evakuiert. Als Ergebnis enthält die Zelle nur Wasserdampf. Nun wird ein Kühlstab eingeführt, um den Dampf zu kühlen. Dabei bildet sich jetzt ein Eismantel um den Kühlstab herum. In dem Moment sind jetzt flüssiges, gasförmiges und festes Wasser nebeneinander in der Zelle vorhanden und der Tripelpunkt wurde erreicht.

Messunsicherheiten Messunsicherheiten bewegen sich aktuell im Bereich weniger μK.

2.2. Temperaturskalen

Die Skala für die **thermodynamische Temperatur** wird über das Kelvin definiert.[1] Das Kelvin allein ist jedoch nicht ausreichend, da das Kelvin über eine *Änderung* der thermodynamischen Temperatur definiert ist (also existiert zunächst eigenlich nur eine Definition für die Einheit der Temperatur*änderung*). Um aus dieser Änderung einen Absolutwert zu machen, muss ein Fixpunkt definiert werden. Für die thermodynamische Temperatur wurde hierfür der **absolute Nullpunkt** festgelegt, welcher definitionsgemäß

[1] Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Absolute_Temperatur, 03.03.2022

erreicht ist, wenn die Teilchen eine thermische Energie von $0\,J$ aufweisen (d. h. wenn sie keine thermische Energie besitzen).

Problematisch an dieser Definition ist jedoch, dass die Messung der absoluten Temperatur mit Primärthermometern (d. h. Thermometern, die die Temperatur direkt messen statt einer anderen physikalischen Größe) sehr kompliziert und zeitaufwendig ist. Entsprechend kann auch kein Thermometer mit diesem Nullpunkt kalibriert werden. Abhilfe schafft hier die **ITS90-Skala**, welche diverse Fixpunkte samt der dazugehörigen Temperatur in Kelvin und Grad Celsius definiert.[2]

Tabelle 2.1.: Fixpunkte der ITS90-Skala

Fixpunkt	Temperatur (K)	Temperatur ($^\circ C$)
Tripelpunkt von Wasserstoff	$13,8033$	$-259,3467$
Tripelpunkt von Neon	$24,5561$	$-248,5939$
Tripelpunkt von Sauerstoff	$54,3584$	$-218,7916$
Tripelpunkt von Argon	$83,8058$	$-189,3442$
Tripelpunkt von Quecksilber	$234,3156$	$-38,8344$
Tripelpunkt von Wasser	$273,16$	$0,01$
Schmelzpunkt von Gallium	$302,9146$	$29,7646$
Erstarrungspunkt von Indium	$429,7485$	$156,5985$
Erstarrungspunkt von Zinn	$505,078$	$231,928$
Erstarrungspunkt von Zink	$692,677$	$419,527$
Erstarrungspunkt von Aluminium	$933,473$	$660,323$
Erstarrungspunkt von Silber	$1234,93$	$961,78$
Erstarrungspunkt von Gold	$1337,33$	$1064,18$
Erstarrungspunkt von Kupfer	$1357,77$	$1084,62$

Thermometer werden mit der ITS90-Skala kalibriert, indem die Fixpunkte angefahren werden. Zwischen den Fixpunkten werden die Temperaturen dann interpoliert.

2.3. Mechanische Ausdehnungsthermometer

Was kann sich ausdehnen?

- fest (z. B. Bimetallstreifen)
- flüssig
- gasförmig

Ziel: Umwandlung der Temperatur in etwas messbares. Hier: Ausdehnung mittels *Längenausdehnungskoeffizient*.

[2] Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/ITS-90, 03.03.2022

2.3.1. Feststoffe

Die Ausdehnung beträgt nur wenige $\frac{ppm}{K}$. Einige Stoffe (z. B. die Legierung „Invar“) haben einen Ausdehnungskoeffizienten von „fast“ $0\frac{ppm}{K}$.

Bimetall Für die Messung der Ausdehnung eigenen sich Bimetallstreifen. Hier sind zwei Metallstreifen mit unterschiedlichen Ausdehnungskoeffizienten aneinander befestigt.[3] Eine Änderung der Temperatur führt dabei zu einer Verbiegung des Streifens, da sich die Metalle unterschiedlich weit ausdehnen. Solche Streifen lassen sich auch direkt als Schalter benutzen, da eine zu starke Verbiegung (d. h. bei Überschreitung der Maximaltemperatur) dazu führt, dass der Stromkreis geöffnet wird.

Vor- und Nachteile:

(+) einfach und robust

(+) kann direkt als Schaltkontakt verwendet werden (z. B. Büge*lei*sen, Backofen, Kühlschrank)

(+) keine Hilfsenergie

(−) keine Fernablesung (daher nicht für Prozessregelung geeignet)

2.3.2. Flüssigkeits- und Gasthermometer

Dies sind die klassisch bekannten Thermometer mit einer Glaskugel am Boden und einer Glassäule über der Kugel. Die Kugel dient als Reservoir für eine Flüssigkeit, die je nach Temperatur in der Glassäule aufsteigt oder abfällt.

Die Temperatur kann als Höhe der Flüssigkeit in der Glassäule $h\,(T)$ abgelesen werden.

$$V_2 - V_1 = \alpha\, V_1\,(T_2 - T_1) \tag{2.3}$$

$$A\,(h_2 - h_1) = \alpha\, V_1\,(T_2 - T_1) \tag{2.4}$$

$$h_2 - h_1 = \underbrace{\frac{\alpha\, V_1}{A}}_{\text{Empfindlichkeit}} \cdot (T_2 - T_1) \tag{2.5}$$

α ist der *Volumenausdehnungskoeffizient* . Da dieser Koeffizient bei Wasser nicht konstant ist (Anomalie des Wassers), ist Wasser (nebst Gefrieren unter $0\,°C$) nicht als Thermometerflüssigkeit geeignet. Heutzutage werden gefärbte langkettige Alkohole benutzt.[4]

Der Nullpunkt T_1 kann grundsätzlich beliebig gewählt werden und ist von der Füllmenge der Flüssigkeit im Thermometer abhängig.

Da die Beziehung linear ist, kann ein Thermometer mithilfe von zwei Punkten kalibriert werden.

Vor- und Nachteile:

[3] Der Streifen kann auch in Form einer Spirale gebogen sein, um Platz zu sparen

[4] Als Ersatz für Quecksilber wird die Legierung *Galinstan* mit einem Schmelzpunkt von ca. $-19\,°C$ benutzt.

(+) lowtec

(+) lineare Kennlinie

(+) Empfindlichkeit wählbar (siehe Gleichung 2.5)

(+) keine Hilfsenergie

(−) keine Fernablesung

( ) entweder kaputt oder genau

2.4. Elektrische Thermometer

Wir benötigen jetzt einen Effekt, der die nichtelektrische Größe „Temperatur“ in etwas umwandelt, was wir elektrisch messen können (z. B. Spannung, Stromstärke).

Was ändert sich mit der Temperatur?

- Widerstand
- Thermospannung
- P-N-Übergänge[5]

2.4.1. Widerstandsthermometer

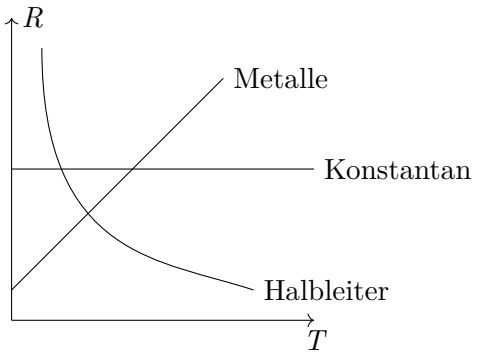

Abbildung 2.3.: T-R-Kennlinien verschiedener Stoffe, schematisch

In Metallen bildet sich eine Art Elektronengas. Je mehr sich das Metall bewegt, umso mehr wird der Strom „behindert“. In Halbleitern entstehen sog. „Elektronenlöcher“ (wo Elektronen fehlen). In diese Löcher können sich wiederum Elektronen hineinbewegen, wodurch an anderer Stelle Löcher entstehen. So kann Strom durch den Halbleiter fließen. Je höher die Temperatur, um so besser funktioniert diese Bewegung.

[5] Die U-I-Kennlinie einer Diode ändert sich mit der Temperatur. Dies ist eine sehr verbreitete Messtechnik und bspw. in jeder CPU/GPU verbaut.

Eine übliche Bauform ist jeweils ein gewickelter Draht, der dann einen hohen Widerstand hat. Um die Induktivität des Drahtes zu verringern, wird eine sog. „bifilare“ Wicklung um einen Grundkörper gemacht, um die umschlossene Fläche des Drahtes und damit elektromagnetische Einflüsse zu minimieren.

Eine andere Bauform sind die sog. „Flachmesswiderstände“. Hier wird ein Stück Keramiksubstrat mit einer dünnen Schicht aus Platin[6] bedampft. Mittels Photolithografie wird dann eine Struktur auf die Platte aufgeprägt, um eine möglichst lange Leiterstrecke auf der Platt aufzubringen. Da der Querschnitt dieses Leiters sehr gering ist, erhält man hier einen großen Widerstand auf sehr kleiner Grundfläche.

Für die Feinjustierung gibt es in der Leiterstrecke noch kleine „Abkürzungen“, die mit einem Laser weggefräst (durchtrennt) werden können, um den Widerstand zu erhöhen.

Die Kennlinie dafür ist

$$R(T) = R_0 \left(1 + \alpha T + \beta T^2\right). \tag{2.6}$$

Diese Kennlinie gilt für große Temperaturbereiche. Für ganz kleine Temperaturen gibt es noch einen Korrekturterm. α ist dabei recht groß und β sehr klein, wodurch ein annähernd linearer Verlauf entsteht (siehe auch Abbildung 2.4.[7] R_0, α und β sind materialabhängige Koeffizienten; R_0 ist zudem noch von der Geometrie des Leiters abhängig. Der Nullpunkt R_0 ist also material- und geometrieabhängig, während die Empfindlichkeit (α, β) nur materialabhängig ist. R_0 ist der Widerstand, der sich bei einer Temperatur von $0\,°C$ ergibt. Üblicherweise werden die Widerstände Pt n genannt, wobei n für den entsprechenden widerstand R_0 steht. Ein Pt 100-Widerstannd hat also $R_0 = 100\,\Omega$.

2.4. Die **Empfindlichkeit** gibt an, wie stark sich der Widerstand abhängig von der Temperatur ändert:

$$S(T) = \frac{\mathrm{d}R(T)}{\mathrm{d}T} \tag{2.7}$$

$$= R_0 (\alpha + 2\beta T) \tag{2.8}$$

Ein Pt 100-Widerstand hat eine Empfindlichkeit von ca. $400\frac{m\Omega}{K}$.

2.4.2. Messschaltungen

Allgemein wird unterschieden zwischen:

- 2-Leiter-Schaltung (Abbildung 2.5),
- 4-Leiter-Schaltung (Abbildung 2.6) und
- Brückenschaltung.(Abbildung 2.7)

Um einen Widerstand messen zu können, müssen eine Spannung angelegt werden und ein Strom fließen. Bei der 2- und 4-Leiter-Schaltung wird jeweils ein Strom eingespeist und eine Spannung gemessen.

[6] Im Gegensatz zu Kupfer oxidiert Platin nicht so schnell.

[7] Die Parameter sind festgelegt in der DIN EN 60751 : 2008.

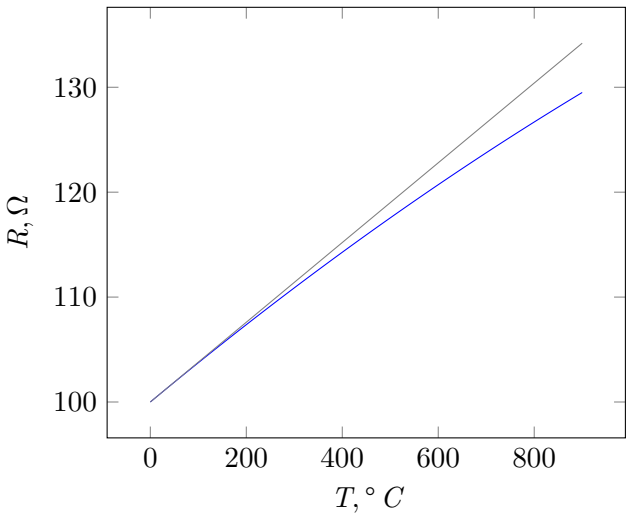

Abbildung 2.4.: Kennlinie eines Pt 100-Widerstands, $\alpha = 3.8 \cdot 10^{-3}\,K^{-1}$, $\beta = -5.8 \cdot 10^{-8}\,K^{-1}$ (blau) und Vergleichskennlinie mit $\alpha = 3.8 \cdot 10^{-3}\,K^{-1}$, $\beta = 0$

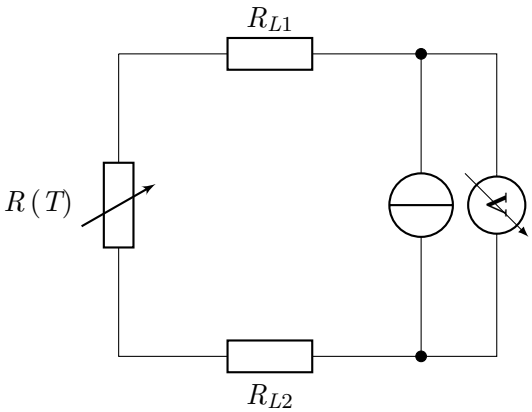

Abbildung 2.5.: 2-Leiter-Schaltung

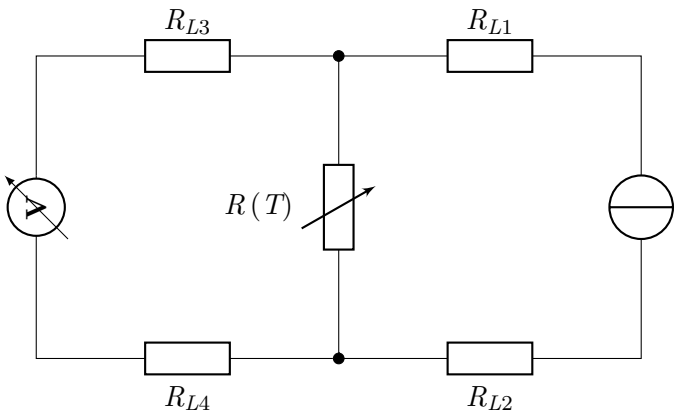

Abbildung 2.6.: 4-Leiter-Schaltung

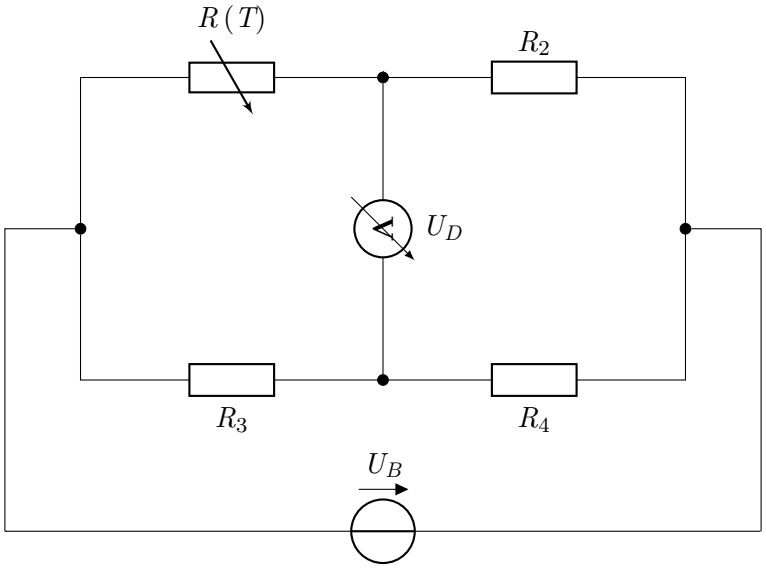

Abbildung 2.7.: Brückenschaltung für Temperaturmessung

2-Leiter-Schaltung Dabei wird ein Stromkreis aus Messwiderstand $R(T)$, zwei weiteren Widerständen R_{L1}, R_{L2} und einer Stromquelle gebildet. Parallel zur Stromquelle wird ein Voltmeter geschaltet.

Für die Widerstände in der 2-Leiter-Schaltung ergibt sich:

$$R_{mess} = R(T) + 2R_L \tag{2.9}$$

$$R_L = \frac{\rho(T) \cdot l}{A} \tag{2.10}$$

Die zwei zusätzlichen Widerstände sind also auch von der Temperatur abhängig und erzeugen Messfehler. Vorteil ist jedoch, dass diese Schaltung recht preisgünstig ist.

4-Leiter-Schaltung Während bei der 2-Leiter-Schaltung das Voltmeter parallel zur Stromquelle geschaltet ist, wird hierdas Voltmeter parallel zum Messwiderstand geschaltet und dabei noch zwei Zuleitungswiderstände R_{L3}, R_{L4} vor/hinter das Voltmeter geschaltet.

Diese Schaltung ist zwar aufwändiger und teurer als eine 2-Leiter-Schaltung, hat aber aufgrund des hohen Innenwiderstandes des Voltmeters kaum einen Stromfluss, weshalb R_{L3} und R_{L4} vernachlässigbar sind.

Brückenschaltung Eine Brückenschaltung basiert grundsätzlich zunächst aus 4 Widerständen, die in einem Ring verschaltet sind. Einer der Widerstände $R(T)$ ist der Messwiderstand, der temperaturabhängig ist. Alle anderen Widerstände $R_{2,3,4}$ sind konstant. Dies wird (weil nur ein Viertel der Widerstände veränderlich ist) **Viertel-Brücke**. Zwischen je zwei Widerständen wird je ein Ende der Spannungsquelle U_B angelegt. An den zwei noch übrigen Leitungen werden die Enden eines Voltmeters angelegt und U_D gemessen.

Für den Grundwiderstand R_0 ergibt sich:

$$R_2 = R_3 = R_4 = R_0 \tag{2.11}$$

Diese Schaltung ist die genaueste Schaltung zur Temperaturmessung und wird deshalb vorrangig in der Präzisionsmesstechnik eingesetzt. Dabei werden die drei R_0-Widerstände üblicherweise auf $0\,°C$ gekühlt, um den Grundwiderstand konstant zu halten. Durch Messung der Änderung ggü. R_0 wird dieser kompensiert und man kannnun sehr geringe Temperaturabweichungen sehr genau / in hoher Auflösung messen.

Schaltung für Halbleiter-Widerstandsthermometer Bei Halbleiter-Widerstandsthermometern (NTCs) reicht eine 2-Leiter-Schaltung aus. Bei kleinen Temperaturen sind die Grundwiderstände R_0 bereits sehr hoch (oft im Bereich $100\,k\Omega$ und sinken erst mit steigender Temperatur (wo die Zuleitungswiderstände sinken). Deshalb ist der Zuleitungswiderstand vernachlässigbar. Durch den steilen Abfall der Kennlinien von Halbleiter-Widerständen ergibt sich eine hohe Empfindlichkeit (siehe auch Abbildung 2.8). Der Temperaturbereich, in dem das Thermometer misst, ist jedoch stark eingeschränkt. Generell hängt die spezifische Kennlinie eines Halbleiter-Widerstands von der spezifischen

Dotierung ab und ist daher auch nicht genormt. Vorteil ist jedoch, dass diese Thermometer sehr preiswert sind. Deshalb sind diese auch sehr weit verbreitet, wenn man nicht im Bereich weniger mK messen muss und der Temperaturbereich eingeschränkt ist (bspw. im Haushalt).

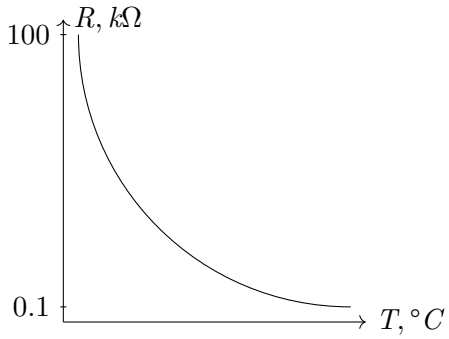

Abbildung 2.8.: Kennlinie eines NTCs (schematisch)

2.4.3. Thermoelemente

Thermoelemente gehören auch zu den elektrischen Thermometern.

Physikalisches Grundprinzip ist der sogenannte *Seebeck-Effekt*. Dieser sagt, dass in einer Schleife von zwei verschiedenen metallischen Leitern, die an zwei Enden verbunden sind (Abbildung 2.9, ein Stromfluss stattfindet, sofern sich die zwei Leiterenden auf unterschiedlichen Temperaturen befinden. Durch den Stromfluss bildet sich ein magnetisches Feld, welches erfasst werden kann.

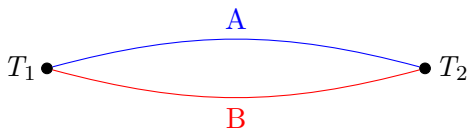

Abbildung 2.9.: Leiterschleife beim Seebeck-Effekt

Anwendung in der Messtechnik Statt das magnetische Feld zu messen, wird die Leiterschleife an einem Ende aufgetrennt und ein Voltmeter zwischengeschaltet (Abbildung 2.10). Als Vergleichsmesstemperatur T_V wird die Temperatur T_2 genutzt.

Für die Kennliniengleichung ergibt sich:

$$E = \int \underbrace{\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}}_{=S_{A/B}(T)} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}}_{\text{Temperaturgradient}} \mathrm{d}x \tag{2.12}$$

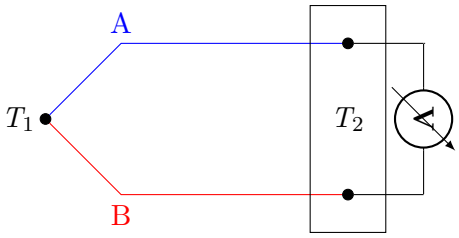

Abbildung 2.10.: Messschaltung für ein Thermoelement

Dabei sind $S_{A/B}(T)$ die **Seebeck-Koeffizienten** und materialabhängig.

Wenn $S_{A/B}(T)$ über die Länge kostant ist hängt die gemessene Thermospannung von der Temperaturdifferenz zwischen T_1 und T_V ab. Für den Idealfall ergibt sich:

$$E = (S_A - S_B) \cdot (T_1 - T_V) \tag{2.13}$$

Die Kennlinien bei $T_V = 0\,°C$ für Thermoelemente sind in der Norm DIN 60584 : 2014 genormt. Unterschieden werden drei Klassen von Thermoelementen:

- Nichtedelmetall-Thermoelemente (Typ T, E, J, K, N)
- Edelmeltall-Thermoelemente (Typ R, S, B)
- Hochtemperatur-Thermoelemente (Wolfram-Thenium-Legierungen, bis ca. $2500\,°C$)

Üblicherweise eingesetzt werden Thermoelemente als Mantel-Thermoelemente. Dabei ist das eigentliche Thermoelement in einen Metall-Mantel als Messeinsatz eingefasst, um das Thermoelement zu schützen. Am Ende ist ein Stecker mit den zwei Metall-Polen des Thermoelements, welcher dann an ein Messgerät angeschlossen muss, in dem dann die Vergleichsmesstemperatur T_V vorliegt und die Spannung gemessen muss.

Thermoelemente können mit ganz dünnen Drähten gebaut werden, wodurch die Temperaturanpassung schneller stattfindet. Damit ermöglichen Thermoelemente sehr schnelle Temperaturmessungen im Vergleich zu Widerstandsthermometern.

2.5. Vor- und Nachteile verschiedener Thermometer

Widerstandsthermometer

(+) Messbereich: $-250\,°C \ldots 800\,°C$

(+) elektrisch ablesbar

(+) preiswert

(+) elektrische Messtechnik sehr einfach

(+) DIN-Toleranzklassen: DIN A, DIN B, sichern Austauschbarkeit

(−) Messbereich „nur“ 800 °C

(−) Relativ kleine Empfindlichkeit

(−) Eigenerwärmung: $P = RI^2$

Drahtgewickelte Widerstände

(−) Groß und teuer

(+) Grundwiderstand max. 25 Ω

Flachmesswiderstände

(+) Klein und preiswert

(+) Lasertrimmen

(−) Grundwiderstand 100 Ω, 140 Ω, 10 $k\Omega$

Thermoelemente

(+) Sehr hohe Temperaturen messbar (z. B. W-Rhenium 5 % / W-Rhenium 10 % bis 2200 °C)

(−) Sehr geringe Spannungen

(+) Keine Eigenerwärmung

(−) Misst nur Temperaturdifferenzen

(+) Mit sehr dünnem Drähten sehr *schnelle* Messungen möglich

2.6. Strahlungsthermometer / Pyrometer

Alle bisher gezzeigten Thermometer benötigen thermischen Kontakt zum zu messenden Objekt, um die Temperatur messen zu können.

Bei einem Pyrometer wird ein Teil der Oberfläche eines zu messenden Objektes per Sammellinse auf einen Detektor gebracht. Dadurch kann der Detektor die Wärmestrahlung messen, die vom Objekt ausgesendet wird.[8] Mithilfe eines Filters können störende Wellenlängen gefiltert und mithilfe des Choppers (eine Art Blende) die Nullpunkt-Drift zu korrigieren.

Strahlungsthermometer werden bspw. in Wärmebildkameras eingesetzt, um Wärmebrücken in Häusern, Sicherungen mit schlechten Kontakten oder nachts Tiere in Wäldern zu finden.

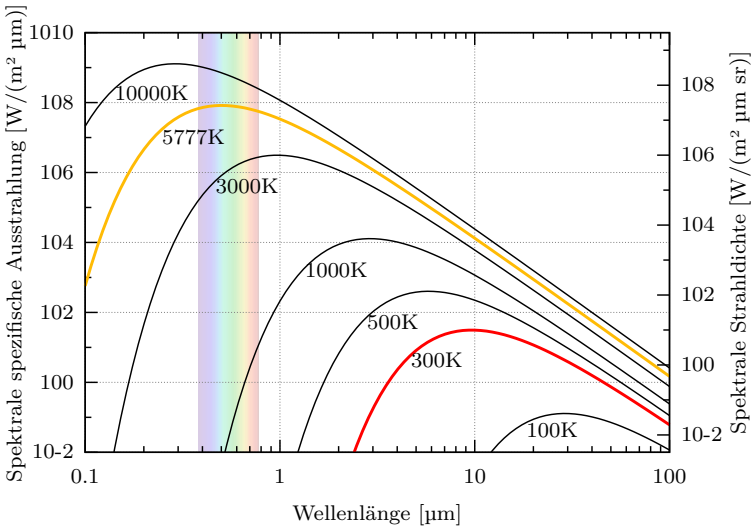

Abbildung 2.11.: PLANCKsches Strahlungsspektrum für verschiedene Temperaturen in doppelt-logarithmischer Auftragung. (Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Plancksches_Strahlungsgesetz, von Prog, CC-BY-SA 4.0)

Plancksches Strahlungsgesetz Ein Körper sendet je nach Temperatur Wärmestrahlung mit verschiedenen Wellenlängen und Intensitäten aus. Die Verteilung der Intensitäten nach der Wellenlänge ist je nach Temperatur unterschiedlich (siehe Abbildung 2.11). Mit steigender Temperatur steigt die Intensität der Wärmestrahlung und das Maximum λ_{max} der $\lambda - L_\lambda$-Kurve verschiebt sich.

Satz 2.1 (PLANCKsches Strahlungsgesetz)**.** *Für Intensität L_{λ_S} der Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers S mit der Wellenlänge λ bei Temperatur T gilt:*

$$L_{\lambda_S} = \frac{c_1}{\lambda^5 \cdot \pi \cdot \Omega_0} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1} \tag{2.14}$$

$$c_1 = 2\pi h c^2 \tag{2.15}$$

$$\approx \left(3.741832 \pm 20 \cdot 10^{-6}\right) \cdot 10^{-6}\ Wm^2 \tag{2.16}$$

$$\tag{2.17}$$

$$c_2 = \frac{hc}{k} \tag{2.18}$$

$$\approx \left(1.438786 \pm 45 \cdot 10^{-6}\right) \cdot 10^{-2}\ mK \tag{2.19}$$

Mit:

[8] In der Praxis wird natürlich nur ein gewisses Band von Wellenlängen erfasst. Dadurch sind die hier beschriebenen physikalischen Prinzipien nicht direkt anwendbar.

- *c – Lichtgeschwindigkeit*
- *h – PLANCKsches Wirkungsquantum*
- *k – BOLTZMANN-Konstante*
- *Ω_0 – Raumwinkel*[9] *der betrachteten Fläche*

Satz 2.2 (STEFAN-BOLTZMANN-Gesetz)**.** *Für die insgesamt abgestrahlte Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers S bei Temperatur T gilt:*

$$L_S = \int_0^\infty L_{\lambda,S} \mathrm{d}\lambda \tag{2.20}$$

$$= \frac{\sigma}{\pi\Omega_0} T^4 \tag{2.21}$$

Satz 2.3 (WIENsches Verschiebungsgesetz)**.** *Die Wellenlänge, bei der ein schwarzer Körper der absoluten Temperatur T die intensivste Strahlung abgibt, verhält sich umgekehrt proportional zur Temperatur:*

$$\lambda_{max} T = 2897.8\, K\mu m \tag{2.22}$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_{max} = 2897.8\, \mu m \cdot \frac{1}{T/K} \tag{2.23}$$

Abbildung 2.12.:

Satz 2.4 (KIRCHHOFFsches Strahlungsgesetz)**.** *Für den Zusammenhang zwischen Absorption und Emission eines realen Körpers ergibt sich im thermischen Gleichgewicht folgender Zusammenhang:*

$$\rho(\lambda, T) + \alpha(\lambda, T) + \tau(\lambda, T) = 1 \tag{2.24}$$

Für den Emissionsgrad *gilt:*

$$\varepsilon(\lambda, T) = \alpha(\lambda, T) \tag{2.25}$$

Der Emissionsgrad ist in der Realität immer $\varepsilon < 1$. Im Idealfall $\varepsilon = 1$ wird der Körper **schwarzer Strahler** genannt.

Um diesen Fall zu erreichen, kann man bspw. einen *Hohlraumstrahler* (siehe Abbildung 2.13) bauen. Lichtstrahlen, die in einen Hohlraumstrahler gesendet werden, verlassen den Strahler nie, weil sie ständig im Strahler reflektiert werden. Nur im hypothetischen Fall, dass der Lichtstrahl mit einem Reflexionswinkel von $0\,^\circ$ wieder aus dem Strahler reflektiert wird, wird dies nicht erreicht.

Strahlungsthermometer haben eine nichtlineare Kennlinie. Daher müssen für die Kalibrierung sehr viele Punkte erfasst werden.

[9] siehe auch Anhang B

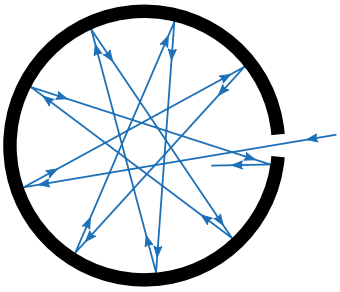

Abbildung 2.13.: Reflexion eines Lichtstrahls in einem Hohlraumstrahler, (Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Schwarzer_K%C3%B6rper, von AG Caesar, CC-BY-SA 4.0)

Vor- und Nachteile

(+) sehr hohe Temperaturen messbar

(+) entfernte Objekte und bewegte Objekte messbar

(−) ε muss bekannt sein

(−) höhere Messunsicherheiten

(+) 2D-Bildgebung, z. B. in Wärmebildkameras

3. Spannungs- und Dehnungsmesstechnik

Mechanische Spannungen lassen sich global (z. B. mit Kamera oder spannungsoptisch) oder lokal messen.

Vor- und Nachteile spannungsoptischer Messung:

(+) 2D-Live-Video

(−) Modell nötig (anderes Material, andere Größe)

Dehnungsmessstreifen Mit einem Dehnungsmessstreifen wird die Dehnung in die elektrische Größe R umgewandelt. Zieht man am Dehnungsmessstreifen, wird der Draht länger und dünner. Für den OHMschen Widerstand gilt:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \tag{3.1}$$

Steigt nun l, steigt der Widerstand; steigt A, steigt er auch. Der Widerstand ändert sich also mit der mechanischen Dehnung des Materials. Für einen Dehnungsmesstreifen mit Länge l, Durchmesser D und Querschnitt A gilt:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \underbrace{\frac{\Delta l}{l}}_{=:\varepsilon} - \frac{\Delta A}{A} \tag{3.2}$$

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 \tag{3.3}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = 2\frac{\Delta D}{D} \tag{3.4}$$

ε wird dabei als **Dehnung** bezeichnet.

3.1. Poissonzahl:

$$\frac{\Delta D}{D} = -\nu\varepsilon \tag{3.5}$$

wobei $\nu = 0.3$ für Metalle. ν wird dabei als **Querkontraktionszahl** bezeichnet.

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + \varepsilon + 2\nu\varepsilon \tag{3.6}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\Delta\rho}{\rho\varepsilon} + 1 + 2\nu\right)}_{=:k} \varepsilon \tag{3.7}$$

$$= k\varepsilon \tag{3.8}$$

Der Zusammenhang zwischen Dehnung und Widerstandsänderung ist also linear! Für Metalle gilt i. d. R. $k \approx 2$; für Halbleiter gilt $k \in [20, 80]$. k wird auch **k-Faktor** genannt.

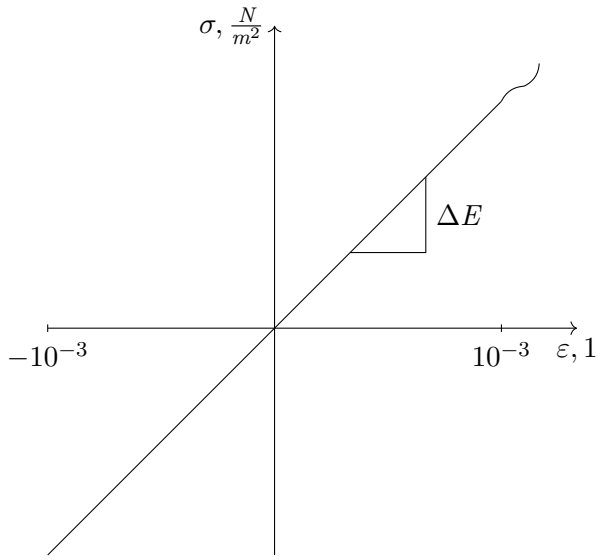

Abbildung 3.1.: Dehnungskennlinie eines Dehnungsmessstreifens

Bei $\varepsilon > 10^{-3}$ wird das Verhalten der Dehnungskennlinie nicht mehr linear bis zu dem Punkt, an dem der Dehnungsmessstreifen kaputt geht! Der Streifen soll möglichst im sogenannten *Hookeschen Bereich* bleiben.

Vor- und Nachteile:

(+) linearer Zusammenhang

(−) nur wenig Widerstandsänderung:

$$R_0 = 1000\,\Omega \tag{3.9}$$

$$\Longrightarrow\ 2 \cdot 10^{-3} \text{ relative Änderung } 1002\,\Omega \tag{3.10}$$

Um das Problem der geringen Widerstandsänderung zu lösen, wird eine *Brückenschaltung* benutzt:

Tabelle 3.1.: Widerstands- und Spannungsänderung bei DMS in einer Brückenschaltung

	$R(\varepsilon)$	$U_D(\varepsilon)$
$\varepsilon_{max} = 0.001$	$1002\,\Omega$	$10\,mV$
$\varepsilon = 0$	$1000\,\Omega$	$0\,mV$
$\varepsilon_{min} = -0.001$	$998\,\Omega$	$-10\,mV$

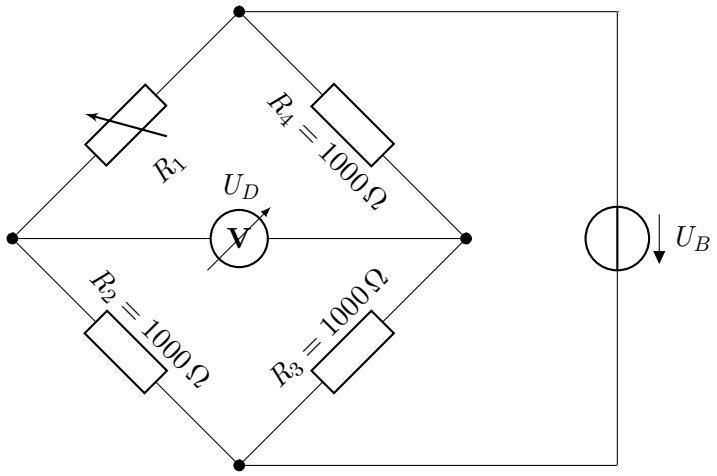

Abbildung 3.2.: Viertelbrücke für DMS-Messschaltung

In der Brückenschaltung gilt:

$$R_1 = R_{01}\,(1 + r_1) \tag{3.11}$$
$$r_2 = r_3 = r_4 = 0 \tag{3.12}$$
$$R_{01} = R_{02} = R_{03} = R_{04} = R \tag{3.13}$$

Dabei ist r_i jeweils die relative Widerstandsänderung des Widerstands i.

Beispielsweise können jetzt $U_B = 10\ V$ angelegt werden:

$$2000\,\Omega, 10\ V \implies R = \frac{U}{I} \tag{3.14}$$
$$\implies I = 5\,mA \tag{3.15}$$

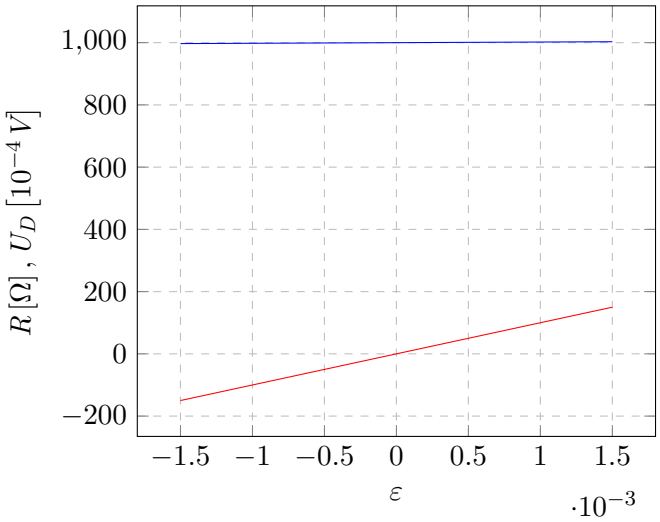

Abbildung 3.3.: Kennlinien für R und U_D ein einer Brückenschaltung

Wie sieht nun so ein Dehnungsmessstreifen aus? Üblicherweise besteht dieser aus einer Trägerfolie (*Kapton*), auf der der Draht mäanderförmig aufgebracht ist. Um den Widerstand möglichst konstant zu halten, wird als Material die Legierung *Konstantan* benutzt, welches eine sehr geringe Widerständsänderung mit der Temperatur hat. An den Umkehrstellen des Mäandermusters wird das Material etwas dicker aufgebracht. Dies wird gemacht, um auch die Ausdehnung in seitliche Richtung erfassen zu können (ansonsten würde der Draht zwar auseinandergebogen, aber nicht gedehent werden).

$$\varepsilon_x \qquad \frac{\Delta R}{R} \approx 0 \tag{3.16}$$
$$\varepsilon_y \qquad \frac{\Delta R}{R} = k\varepsilon_y \tag{3.17}$$

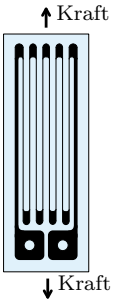

Abbildung 3.4.: Dehnungsmesstreifen (Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Dehnungsmessstreifen, von Martin Meise, CC BY-SA 3.0)

Andere Bauformen (vgl. Folien GMT S. 57) erlauben bspw. auch die gleichzeitige Messung der Dehnung in zwei oder drei Richtungen.

Bei Viertelbrücken hat die Messchaltung einen nichtlinearen Zusammenhang:

$$U_D = \frac{U_B}{4} \cdot \frac{r_1}{1 + \frac{r_1}{2}} \tag{3.18}$$

Stattdessen zwei Dehnungsmesstreifen in der Brückenschaltung angebracht werden, sodass $r_1 = -r_2$ (also ein DMS wird gestaucht, wenn der andere gedehnt wird). Dann ergibt sich:

$$U_D = \frac{U_B}{2} \cdot r_1 \tag{3.19}$$

Führt man diesen Gedanken weiter, kann man die Brückenschaltung zu einer *Vollbrücke* erweitern, bei der alle vier Widerstände DMS sind und für jeweils benachbarte Widerstände $r_i = -r_j$ gilt. Dann gilt für die gemessene Spannung:

$$U_D = U_B \cdot r_1 \tag{3.20}$$

Vor- und Nachteile der Brückenschaltung für DMS mit Vollbrücke:

(+) größte Empfindlichkeit

(+) linearer Zusammenahang: $U_D = U_B \frac{\Delta R}{R}$

(+) *temperaturkompensiert*[1]

Dehnungsmessstreifen in der Kraftmesstechnik DMS eignen sich bspw. zur Kraftmessung:

Auf der Ober- und Unterseite des Biegebalkens werden jeweils zwei DMS angebracht – möglichst in der Nähe der Befestigung, da dort die Dehnung/Stauchung am größten ist. Dadurch werden bei Kraftwirkung immer zwei DMS gestaucht und zwei gedehnt.

[1] Temperaturbedingte Widerstandsänderungen der DMS passieren immer gleichzeitig und gleichen sich gegenseitig aus. Dafür muss der Temperaturkoeffizient aller Messwiderstände gleich sein und alle Messwiderstände müssen die gleiche Temperatur aufweisen.

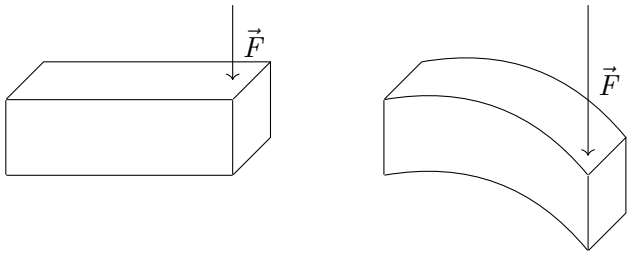

Abbildung 3.5.: Biegung des Materials bei einem Biegebalken

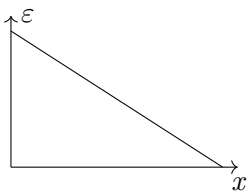

Abbildung 3.6.: Verlauf von ε am Biegebalken entlang der Länge x des Balkens (schematisch)

Die Umwandlung der Kraft F in die messbare Größe U_D erfolgt über diese Wege:

$$F \overset{\text{Biegung}}{\Longrightarrow} \varepsilon \overset{\text{DMS}}{\Longrightarrow} \frac{\Delta R}{R} \overset{\text{VB}}{\Longrightarrow} U_D \tag{3.21}$$

$$U_D = U_B \cdot \frac{\Delta R}{R} \tag{3.22}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = k\varepsilon \tag{3.23}$$

$$\varepsilon = CF \tag{3.24}$$

$$U_D = U_B \cdot k \cdot C \cdot F + U_0 \tag{3.25}$$

Dabei ist C die Federkonstante des Biegebalkens und sollte so gewählt werden, dass bei der maximalen zu erwartenden Kraftwirkung eine Dehnung von 10^{-3} aufgebracht wird.

Anwendung in der Wägetechnik Mit dem Zusammenhang $F = m \cdot g$ lässt sich diese Anordnung auch benutzen, um Waagen zu bauen:

$$U_D = \underbrace{U_D \cdot k \cdot C \cdot g}_{\text{Empfindlichkeit}} \cdot m + \underbrace{U_0}_{\text{Nullpunkt}} \tag{3.26}$$

Der Zusammenhang der Anordnung ist linear. Entsprechend kann die Messschaltung mithilfe von zwei bekanten Punkten (z. B. zwei Wägestücke) kalibriert werden.

Positionsabhängigkeit der Messanordnung Je nachdem, wo auf einer Waagschale das zu wiegende Stück aufgelegt wird, wird eine andere Dehnung und damit Masse gemessen. Es ist also notwendig, dass nur die Kraft in z-Richtung gemessen wird. Dies wird mithilfe eines *Parallellenkersystems* gemacht.

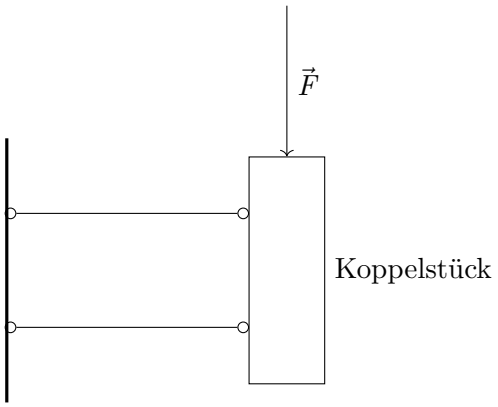

Abbildung 3.7.: Parallellenkersystem

Wichtig bei den Parallellenkern ist, dass diese gleich lang und parallel zueinander sind. Eine solche Anordnung sorgt dafür, dass das Koppelstück sich zwar auf einer runden Bahn bewegt, aber dabei immer senkrecht steht. Wird ein zu wiegendes Stück außen auf der Waagschale aufgelegt, wirkt auf dem oberen lenker eine Zugkraft, während auf dem unteren Lenker eine Druckkraft wird. Wird das Stück innen auf der Waagschale aufgelegt, wirkt umgekehrt oben eine Druckkraft und unten eine Zugkraft. Es gilt jedoch dabei für die Kraft in z-Richtung immer $F_z = m \cdot g$.

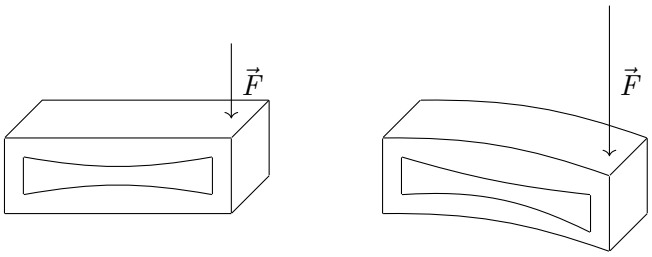

Abbildung 3.8.: Knochenverformungsmesser

Knochenverformungsmesser In der Mitte wird ein knochenförmiges (oder auch rechteckähnliches) Stück aus dem Körper herausgefräst. Dieser Aufbau ist eine Kombination aus Verformungskröper und Parallellenkerkrafteinleitungssystem. Insgesamt ergibt dies einen *DMS-Verformungskörper-Kraftmesser*. Eine solche Anordnung erlaubt eine Auflö-

sung in 100 000 Schritten. Beispielsweise kann eine 1 kg Waage in 10 mg-Schritten auflösen. Allerdings ist die Anordnung nach unten begrenzt (bis 1 mg).

Vor- und Nachteile:

(+) einfach und robust

(+) lineare Kennlinie (wegen Vollbrücke), temperaturkompensiert

(+) Messbereich einfach wählbar (Geometrie, Material)

(·) 100 000 Schritte möglich

(−) Nicht besser als 1 mg Ablesbarkeit[2]

Weitere Anwendungsfälle und Messanordnungen Je nach Aufbringung der Messstreifen und Aufbau des Verformungskörpers eignen sich DMS auch für die Messung von Druck, Drehmoment, Scherung.

Aufbringung von DMS am Material Der DMS wird mit Kleber auf einem Bauteil angebracht. Während der Dehnung gibt es jedoch Kriechverhalten – sowhl des Klebers als auch des Materials. Das Kriechverhalten des Materials muss also durch Wahl eines geeigneten Klebers und DMS kompensiert werden.

Zudem muss die Messanordnung auch vor Feuchtigkeit geschützt werden, um ein Aufquillen des Klebers (und damit eine scheinbare Dehnung) zu verhindern. Über der Messanordnung wird also eine Feuchteschutzschicht angebracht, die möglichst flexibel ist, aber vor Feuchtigkeit schützt. Idealerweise sollte der Feuchteschutz auch vor mechanischer Beschädigung schützen. Von Herstellern gibt es dafür üblicherweise spezielle Abdeckmittel (z. B. Alufolie und Knetmasse, Nitrilgummi, Polyurethan-Lack).

6D Kraft- und Momentenmesser

$$(F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_x)^\top = \vec{F} \tag{3.27}$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_8 \end{pmatrix} = A \cdot \vec{F} \tag{3.28}$$

$$\Longrightarrow \vec{F} = A^{-1} R \tag{3.29}$$

Elektromagnetische Kraftkompensation (EMK) Mithilfe der elektronischen Kraftkompensation lassen sich auch Waagen bauen. Dabei wird mithilfe eines Reglers eine Spule angesteuert, die ein Magnetfeld erzeugt, um der Gewichtskraft F_g der Waage entgegenzuwirken und die Waage auf der gleichen Höhe zu halten. Je nachdem, wie viel

[2] Der Biegebalken besitzt in der Mitte eine neutrale Faser (d. h. diese Faser ändert bei Dehnung nicht ihre Länge, da sie nicht gedehnt und nicht gestaucht wird). Je näher die DMS an der neutralen Faser sind (dies ist bei sehr dünnen Biegebalken der Fall), umso schlechter funktioniert die Messanordnung.

Strom I notwendig ist, um die Waage auf der gleichen Höhe zu halten, lässt sich also die Kraft bestimmen. Dabei wirkt die LORENTZkraft vom Magnetfeld der Spule der Gewichtskraft F_g entgegen.

$$\text{LORENTZkraft: } F = B \cdot l \cdot I \tag{3.30}$$

$$\tag{3.31}$$

Diese Messanordnung erlaubt zwar sehr präzise Messungen, kann aber nur kleinere Krafte messen, da die Spulen nicht durch zu viel Strom überhitzen dürfen. Dies lässt sich bis jedoch auch mithilfe des Hebelgesetzes kompensieren.

Vor- und Nachteile:

(+) Ablesbarkeit $0.1\,\mu g$ möglich

(+) 60 000 000 Schritte Auflösung möglich

(−) Nur bis zu $20\,g$ direkt tragend

Zusatzmaterial

- https://www.hbm.com/de/9803/dehnungsmessstreifen-fuer-experimentelle-spannungsanalysen/

4. Längenmesstechnik

4.1. Grundlagen

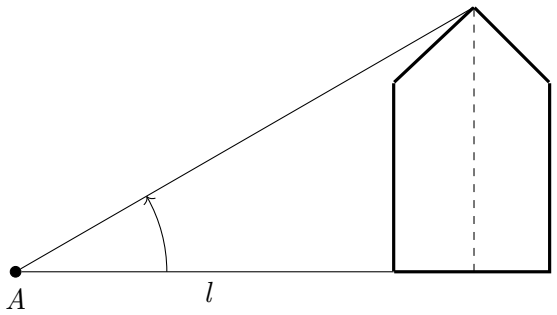

Abbildung 4.1.: Längenmessung bei einem Kirchturm (schematisch)

Wie können wir die Spitze eines Kirchturms vermessen? Wenn die Höhe der Kirchturmspitze gemessen werden soll, können wir eine Winkelmessung von unserem Betrachtungspunkt zur Kirchturmspitze durchführen. Zusätzlich müssen wir noch die Länge (Distanz) zur Kirche messen. Ist dies nicht möglich, können wir aber stattdessen auch eine zweite Winkelmessung durchführen. Dabei gehen wir ein paar Schritte weiter und führen eine erneute Winkelmessung durch. Zusätzlich müssen noch die Winkel zwischen den beiden Messpunkten gemessen werden. Damit kennen wir Länge und zwei Winkel des Dreiecks, dessen Spitze der Fuß der Kirche ist und können daher die Länge aller Seiten bestimmen. Damit ist dann auch die Bestimmung der Höhe der Kirche möglich.

Das am Boden liegende Dreieck kann mithilfe des Sinussatzes berechnet werden:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \tag{4.1}$$

Wie können wir damit den Erdumfang bestimmen? Dafür laufen wir von Dünkirchen nach Barcelona und *triangulieren*. Um die Länge zwischen den beiden Städten zu messen, wir die Strecke zwischen den Städten wiederum in Dreiecke (mithilfe gut ersichtlicher Punkte, bspw. Turmspitzen) zerlegt, um auch dort per Triangulation die Distanz zu bestimmen.

Damit hat man nun also den 40 Millionstel Teil des Erdumfangs bestimmt. Daraus ließ sich dann die Länge des Ur-Meters bestimmen.

Später wurde das Meter neu definiert, indem die Vakuumlichtgeschwigkeit festgelegt und das Meter daraus als Ergebnis einer Messung abgeleitet wurde.

Das Ur-Meter war ein X-förmiger Stab aus einer Platin-Iridium-Legierung. Auf diesem waren Markierungen angebracht.

Abbildung 4.2.: Kopie des Ur-Meters, Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Urmeter

Zusatzmaterial:

- https://en.wikipedia.org/wiki/Triangulation

4.2. Das Abbe-Komparator-Prinzip

Das Abbe-Komparator-Prinzip ist benannt nach Ernst Abbe.

Ein Messschieber wird heute noch zur Längenmessung benutzt. Dieser besteht aus einem festen Teil mit Skala und einem beweglichen Teil. Das Messtück wird zwischen den zwei Schenkeln des Messchiebers eingeklemmt. Damit lässt sich dann die Länge an der Skala ablesen.

Der bewegliche Teil kann jedoch gekippt sein, da dieser natürlich nicht mit genau 90° am Messchieber anliegt. Ist dieser **Kippwinkel** α sowie die Länge des Schenkels $L_{Schenkel}$ bekannt, lässt sich das Dreieck, welches die Kippung und damit den Messfehler f beschreibt, berechnen:

4.1. Abbe-Fehler 1. Ordnung (Sinusfehler):

$$f = L_{Schenkel} \cdot \sin\alpha \tag{4.2}$$

Für kleine α (α ist üblicherweise sehr klein) kann man auch per Taylorpolynom erster Ordnung die Gleichung mit der Näherung $\sin\alpha \approx \alpha$ linearisieren:

$$f = L_{Schenkel} \cdot \alpha \tag{4.3}$$

Die Annäherung basiert auf der Taylorreihe für $\sin\alpha$, bei der für die Linearisierung

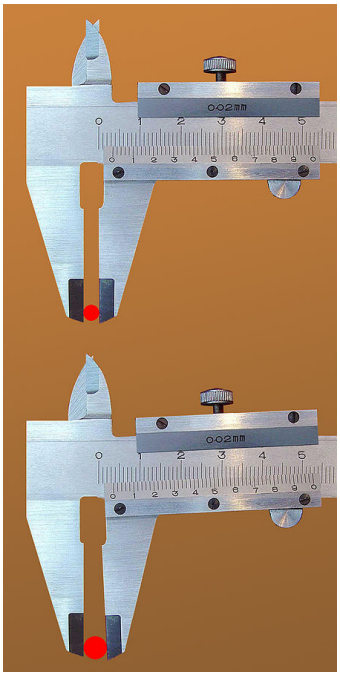

Abbildung 4.3.: Messung am Messschieber mit Kippfehler erster Ordnung. (Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Abbesches_Komparatorprinzip, von ArtMechanic, CC-BY-SA 3.0)

einfach die Terme höherer Ordnung weggelassen werden.

$$\sin\alpha = \alpha - \underbrace{\frac{a^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots}_{\text{Terme höherer Ordnung}} \tag{4.4}$$

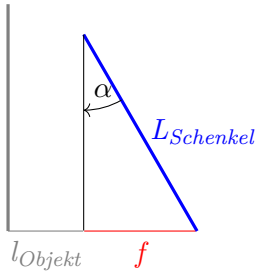

Abbildung 4.4.: Sinusfehler beim Messchieber (Die Schenkel des Messschiebers sind dick gezeichnet)

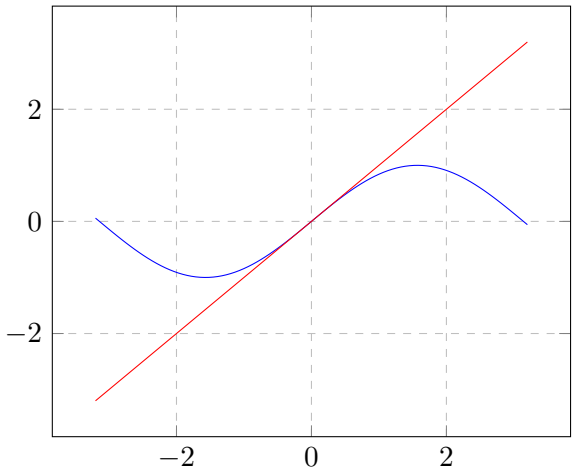

Abbildung 4.5.: Sinusfunktion (blau) und Annäherung durch Linearisierung (rot)

4.2. Abbe-Komparator-Prinzip: Wenn Messobjekt und Maßverkörperung *fluchtend* hintereinander angeordnet sind, werden Fehler erster Ordnung vermieden.

Da das Abbe-Komparator-Prinzip nicht beim Messschieber eingehalten wird, weist dieser auch Messfehler erster Ordnung auf. Bereits eine Verkippung von mehr als 5 Winkelsekunden kann zu mehreren μm Messfehler führen.

Bei einem ABBE-Komparator werden Messobjekt und Maßverkörperung hintereinander fluchtend auf eine Führung gelegt. Für beide Grenzen des Messobjektes wird zunächst die Kante im Einstellmikroskop angepeilt. Danach wird im Ablesemikroskop der Längenwert der Maßverkörperung abgelesen. Macht man dies für beide Grenzen des Messobjektes, lässt sich die Länge bestimmen.

Was ist jedoch, wenn Messobjekt/Maßverkörperung zwar fluchten, aber in einer anderen Richtung zueinander verdreht sind? Hier entstehen *Fehler zweiter Ordnung*.

4.3. Abbe-Fehler 2. Ordnung (Kosinusfehler):

$$f = L_{Schenkel} \cdot (1 - \cos\alpha) \tag{4.5}$$

TAYLORreihe für $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \underbrace{\frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots}_{\text{Terme höherer Ordnung}} \tag{4.6}$$

Für kleine α:

$$\approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \tag{4.7}$$

Dann ergibt sich für den Fehler zweiter Ordnung:

$$f = L_{Schenkel} \cdot \frac{\alpha^2}{2} \tag{4.8}$$

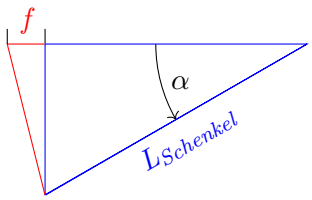

Abbildung 4.6.: Messfehler beim ABBE-Komparator

Der Fehler zweiter Ordnung ist für kleine α, welche auch in der Realität zu erwarten sind[1] deutlich geringer als der Fehler erster Ordnung, wie man leicht in Abbildung 4.8 erkennen kann. Bei Messungen sollte man immer prüfen, ob das ABBE-Komparator-Prinzip eingehalten wird.

4.3. Michelson-Interferometer

Längenmessung ist auch mithilfe eines Interferometers wie bei der experimentellen Widerlegung der Existenz eines Äthers möglich.

[1] Normalerweise sind bei heutigen Messgeräten die Verkippungen (also α) so gering, dass man sie mit bloßem Auge nicht erkennen kann!

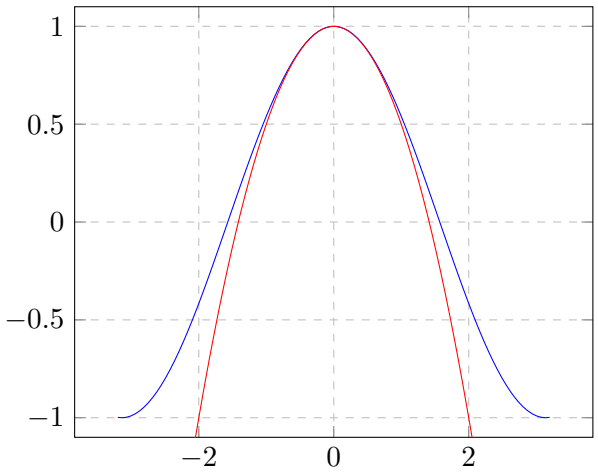

Abbildung 4.7.: Annäherung an $\cos\alpha$ (blau) mithilfe der TAYLORentwicklung (rot)

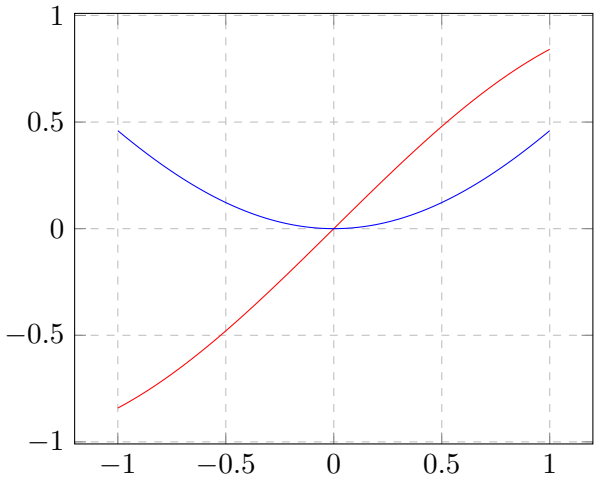

Abbildung 4.8.: Vergleich zwischen Sinusfehler (rot) und Kosinusfehler (blau) für $L = 1$

Dazu wird ein Laserstrahl auf einen halbdurchlässigen Spiegel mit einem Winkel von 45 ° gerichtet. Das durchgelassene Licht wird an einem normalen, fest installierten Spiegel reflektiert und läuft zurück zum halbdurchlässigen Spiegel. Das reflektierte Licht wird am halbdurchlässigen Spiegel wieder zur Hälfte reflektiert und zur Hälfte durchgelassen. Analog wird das Licht vom beweglichen Spiegel reflektiert und wieder am halbdurchlässigen Spiegel zur Hälfte durchgelassen. Je nachdem, wie der bewegliche Spiegel eingestellt ist, kommt jetzt jetzt zu Phasenversatz am Schirm und damit Interferenz. Je nach Länge ist diese jetzt entweder konstruktiv oder destruktiv. Bewegt man den Spiegel, sieht man Hell-Dunkel-Übergänge.

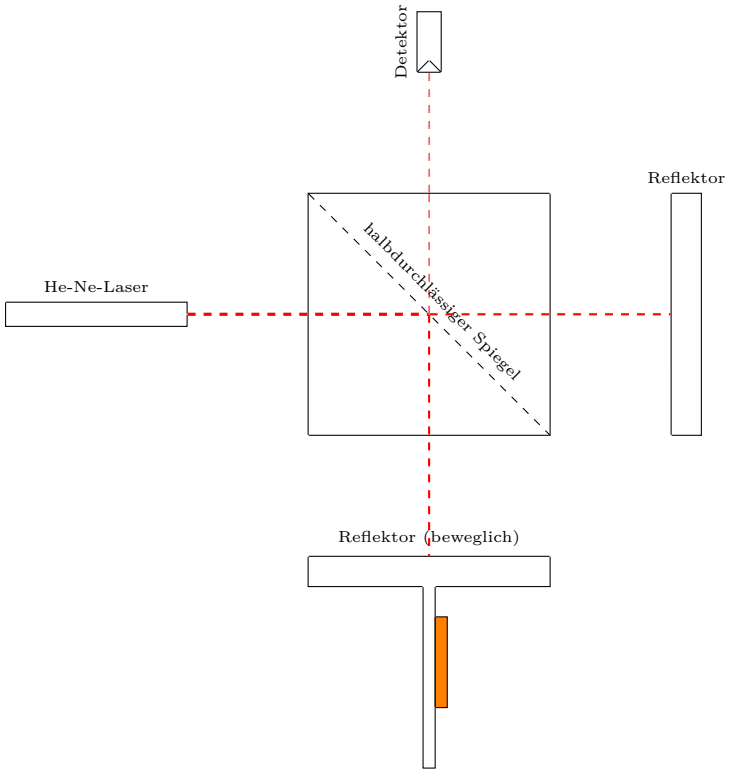

Abbildung 4.9.: Laserinterferomenter, schematisch

Ist die Wellenlänge nun bekannt, lässt sich durch Zählung n der Hell-Dunkel-Übergänge berechnen:

$$x = n \cdot \lambda \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{Interferometerfaktor} \tag{4.9}$$

Da die Wellenlänge sehr klein ist, lassen sich hiermit sehr präzise Messungen durchführen. Der Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt sich dadurch, dass die Längenänderung Δd des beweglichen Spiegels dazu führt, dass das Licht am beweglichen Spiegel einmal in Hin- und

einmal in Rückrichtung einen zusätzlichen Weg Δd zurücklegt. Um einen Hell-Dunkel-Hell-Übergang (also eine Periode) am Sensor zu erreichen, muss der Lichtstrahl eine Phasenänderung $\Delta\phi = \lambda$ erfahren. Da sich die Phase jedoch aufgrund der doppelten Wegänderung auch doppelt so schnell ändert wie der Abstand des beweglichen Spiegels ($\Delta\phi = 2 \cdot \Delta d$), ist auch $\Delta\phi = 2 \cdot \Delta d = \lambda$ und die benötigte Wegänderung, um eine Periode am Sensor zu erfahren ist $\Delta d = \frac{\lambda}{2}$.

Als Alternative zum klassichen Plan-Spiegel können auch *Retro-Reflektoren*, wie sie bspw. in Katzenaugen an Fahrrädern oder Warnwesten enthalten sind, benutzt werden. Diese reflektieren Licht immer genau in die Richtung, aus der es herkam.

Die Mathematik des Interferometers ω ist die Frequenz, ϕ_1 und ϕ_2 Phasen der beiden Messpunkte.

$$I_1 = A_1 \cdot \cos(\omega t + \phi_1) \tag{4.10}$$

$$I_2 = A_2 \cdot \cos(\omega t + \phi_2) \tag{4.11}$$

Annahme: $A_1 = A_2 =: A$

$$I_{ges} = I_1 + I_2 \tag{4.12}$$

$$= A\left(\cos(\omega t + \phi_1) + \cos(\omega t + \phi_2)\right) \tag{4.13}$$

Additionstheorem:

$$= \underbrace{2A\cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)}_{\text{neue Amplitude}} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \tag{4.14}$$

Die Helligkeit des Lichts wird durch die neue Amplitude bestimmt. Sind die Phasen $\phi_1 = \phi_2$, ist die Amplitude 0 und die Lichtstrahlen eliminieren sich gegenseitig (d. h. es wird dunkel). Je nach Versatz steigt die Amplitude und es wird hell.

Fehler erster Ordnung Hält die Messanordung das Abbe-Komparator-Prinzip ein? Da das Messstück und die Maßverkörperung in einer Flucht liegen, wird das Prinzip eingehalten. Also gibt es auch hier nur einen Fehler zweiter Ordnung.

Nutzung des Moiré-Effekts Was ist nun, wenn der Winkel zwischen den beiden Reflektoren nicht genau 90 ° ist? In diesem Fall sind die Strahlen leicht verkippt. Damit entsteht nun durch den *Moiré-Effekt* ein Muster auf dem Schirm. Dieses Muster ist gerade für eine kleine Verkippung sehr breit (mehrere Millimeter und erlaubt eine leichtere Zählung der Hell-Dunkel-Übergänge.

Messschaltung Die Messung ist bspw. mit einem A/D-Wandler möglich. So lassen sich auch Bruchteile von Hell-Dunkel-Übergängen messen und damit präzisere Messungen durchführen.

Messunsicherheiten Betrachte zunächst die Interferometer-Gleichung und den Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Frequenz:

$$x = n \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad\qquad c = \lambda f \tag{4.15}$$

n wird durch Zählung (also digital) bestimmt. Damit ergibt sich eine Auflösung von $\frac{\lambda}{2}$, was bei den sehr kurzen Wellenlängen von gebräuchlichen Lasern (bspw. He-Ne-Laser, $\frac{\lambda}{2} = 316\,nm$) bereits sehr präzise ist. c ist eine festgelegte Konstante. Die Frequenz f lässt sich mit sehr geringen Messunsicherheiten messen.

Vor- und Nachteile

(+) Fundamentalmethode, also keine Kalibrierung notwendig

(+) Sehr hohe Auflösung, mithilfe von A/D-Wandlern auch noch größere Auflösungen (z. B. $5\,pm$) möglich.

(−) komplizierter Aufbau

(−) teuer

(−) Brechzahlabhängigkeit

( ) Inkrementalverfahren

Anwendung in der Praxis Mithilfe zweier Satelliten, die eine Interferometermessung durchführen, lässt sich der Dichtegradient der Erde bestimmen, indem die Satelliten um die Erde fliegen und ständig an verschiedenen Positionen ihren Abstand zueinander messen. Wird über eine Stelle mit anderer Dichte (z.B. eine Erzader) geflogen, ändert sich kurzzeitig der Abstand der beiden Satelliten.

Wird der bewegliche Spiegel fest installiert, lassen sich auch Messungen von Gravitationswellen durchführen, da diese auch den Abstand der Spiegel kurzzeitig zueinander ändern.

Messunsicherheit

- unstabilisierte He-Ne-Laser: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-8}$
- stabilisierte He-Ne-Laser: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-11...12}$
- Laserdiode: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 10^{-6}$

Zusatzmaterial

- Folien „LMT“
- Aufbau und Funktionsweise eines Lasers: Anhang C

4.4. Längen- und Winkelmessung mit Inkrementalverfahren und Absolutwertgebern

Wir können einen Glasmaßstab mit Strichen bedrucken und optisch mithilfe einer Kamera die Stiche ablesen (ähnlich wie bei einem einfachen Lineal). Dazu muss der Maßstab von einer Seite mit einer Lichtquelle beleuchtet werden und auf der jeweils anderen Seite muss eine Fotodiode den Hell-Dunkel-Übergang messen. Da sich dadurch jedoch nicht die Richtung bestimmen lässt, ist eine zweite Fotodiode notwendig. Damit lässt sich erkennen, ob der Stab vorwärts oder rückwärts bewegt wird.

Der Abstand τ der Skalenstriche des Glasmaßstabs soll für eine geringe Unsicherheit möglichst klein sein, aber darf nicht so klein sein, dass es in der Nähe der Wellenlänge liegt. Eine Alternative ist die Nutzung eines Gegenrasters, mit dem auch bei größerem τ noch feinere Messungen durchgeführt werden können. Das Gegenabtastgitter besitzt die gleiche Teilung τ wie der Maßstab, aber hat zwei zueinander phasenverschobene Raster. Der Aufbau ist aber aufgrund von Beugungseffekten trotzdem auf ca. $\tau = 512\,nm$ begrenzt.

Eine wichtige Eigenschaft ist hier, dass wir inkremental zählen. Wir zählen also, wie viele Striche wir während einer Bewegung gesehen haben. Wird das Gerät ausgeschaltet, wird der Zähler zurückgesetzt und die Messergebnisse sind verloren. Um eine Messung durchzuführen muss immer der Zählerstand am Anfang des Messstücks und am Ende des Messtücks betrachtet werden. Erst daraus (also aus zwei Messungen) lässt sich eine Länge berechnen.

Vor- und Nachteile

(+) einfach und preiswert

(+) τ sehr klein möglich (z. B. $512\,nm$)

(+) Interpolation möglich

(+) τ wählbar

(+) geht auch rotatorisch (z. B. für Winkelmessung)

(+) geht auch absolut (wenn Zahlen auf dem Maßstab kodiert werden

(−) Inkrementalverfahren

(−) Temperaturabhängig (Wärmeausdehnung)

(−) Kalibrierung notwendig

Drehgeber[2] Benutzt man statt gerade Maßstäbe Scheiben, lassen sich auf diese Weise auch Winkel messen, da hier die Länge l der zurückgelegten Strecke auf der Scheibe mit Radius r bereits einer Winkeländerung $\Delta\phi = \frac{l}{r}$ im Bogenmaß entspricht. Kennt man also die Strecke, die für einen Zählimpuls zurückgelegt wird, kann man diese Strecke leicht in einen Winkel umrechnen.

Bei Drehgebern gibt es verschiedene Möglichkeiten, die absolute Position der Drehscheibe zu bestimmen. Werden ohnehin viele Umdrehungen zurückgelegt, kann an einer Stelle ein sogenannter *Nullimpuls* erzeugt werden. Dies kann man bspw. machen, indem an dieser Stelle eine Lücke lässt, wodurch gar kein Impuls erzeugt wird oder ein zusätzlicher Sensor immer genau dann einen Impuls ausgibt, wenn diese Nullstelle erreicht wird (bspw. indem nur dort in der Glasscheibe eine lichtdurchlässige Stelle ist). Erkennt die Zählschaltung den Nullimpuls, wird der Zähler auf die Nullstellung zurückgesetzt und ab diesem Punkt kann die absolute Position des Zählrades durch Impulszählung ermittelt werden.

Drehgeber lassen sich auch mit Absolutwertgebern bauen. Hier wird anstelle von wiederkehrenden Impulsfolgen eine Zahl binär auf der Glasscheibe kodiert. Dieser Aufbau erfordert jedoch deutlich mehr Sensoren als ein Inkrementalgeber. Als Kodierungen können sowohl die klassische Binärkodierung von Zahlen als auch speziellere Codes wie der Gray-Code (beschrieben in Anhang E) benutzt werden. So kann für jede Position der Drehscheibe eine eindeutige Kodierung auf der Scheibe aufgebracht werden, die einem eindeutigen Zahlwert entspricht. Dieser Zahlwert kann dann der absoluten Position der Drehscheibe fest zugeordnet werden. Damit kann jederzeit und ohne Initialisierung eines Zählers die absolute Position der Drehscheibe sowie auch die Drehrichtung bei Bewegung ermittelt werden.

Multiturn-Encoder Um neben der absoluten Position des Drehgebers auch die Anzahl Umdrehungen zu bestimmen, werden sogenannte *Multiturn-Encoder* eingesetzt. Diese sind neben Angabe der absoluten Position auch in der Lage, die Anzahl Umdrehungen zu messen. Die Anzahl Umdrehungen kann man mit einer Schaltung bereits mit normalen Absolutwertgebern messen, indem bei jedem Sprung („Rollover“) des Absolutwertes (sprich, einem Übergang von $0\,^\circ$ zu $360\,^\circ$ oder umgekehrt) ein Umdrehungs-Zähler inkrementiert oder dekrementiert wird. Zudem kann neben dem Absolutwert auf der Drehscheibe eine Markierung eingebracht werden, ähnlich dem Nullimpuls beim Inkrementalverfahren. Jedes Mal, wenn dieser Impuls ausgelöst wird, ist eine Umdrehung durchgeführt worden. Mithilfe des Absolutwertes lässt sich dabei auch erkennen, ob die Umdrehung in positive oder negative Richtung erfolgt ist. So lässt sich entscheiden, ob der Umdrehungs-Zähler inkrementiert oder dekrementiert werden muss.

Induktive Geber[3] *Induktionsgeber* oder *induktive Geber* sind ein Mittel zur Impulsübermittlung für Inkrementalverfahren. Im induktiven Geber wird bei der Bewegung eine Änderung eines Magnetfelds hervorgerufen, wodurch eine Spannung in einer Spule

[2] Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Drehgeber, 03.03.2022
[3] Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Induktionsgeber, 03.03.2022

induziert wird. So wird also anstelle einer Photodiode eine Spule zur Signalerzeugung benutzt.

Im Gehäuse des Gebers ist die Spule mit Eisenkern und an dessen Ende ein Dauermagnet angebracht. Direkt neben der Anordnung aus Spule und Eisenkern befindet sich das Inkrementenrad, ein eisernes (oder anderweitig ferromagnetisches) Zahnrad. Zeigt ein Zahn in Richtung des Eisenkerns, so besteht zwischen Zahn und Kern nur ein sehr kleiner Luftspalt und der magnetische Fluss wird stärker. Wird das Zahnrad ein bisschen weiter gedreht, zeigt ein Spalt zwischen zwei Zähnen in Richtung des Eisenkerns. Dadurch wird der Luftspalt zwischen Eisenkern und Rad größer und der magnetische Fluss wird schwächer.

Diese Änderung des magnetischen Flusses führt dazu, dass sich das Magnetfeld in der Spule ändert und damit zu einer induzierten Spannung. Da bei der Bewegung immer wieder das Magnetfeld stärker und schwächer wird, wird eine Wechselspannung induziert. Durch Zählung der Spitzen in der Wechselspannung lässt sich somit die zurückgelegte Strecke des induktiven Gebers bestimmen und damit analog zum o. g. optischen Verfahren die Länge bzw. der Winkel messen.

Zusatzmaterial

- https://de.wikipedia.org/wiki/Inkrementalgeber
- https://de.wikipedia.org/wiki/Induktionsgeber
- https://de.wikipedia.org/wiki/Inkrementenrad
- https://www.kfztech.de/kfztechnik/elo/sensoren/induktivgeber.htm
- https://www.celeramotion.com/zettlex/multiturn-encoder/
- Foliensatz „MST“

4.5. Messen kleiner Längen

Für viele Aufgaben sind kleine Wegmessbereiche ausreichend. Das Michelson-Interferometer ist für die Längenmessung in der Technik allerdings aufgrund des komplizierten und teuren Aufbaus ungeeignet. Stattdessen eigenen sich verschiedene physikalische Methoden, um die Größe „Länge“ in eine elektrische Größe (z. B. Spannung) umzuwandeln:

- induktiv
- optisch
- kapazitiv

4.5.1. Kapazitive Längenmessung

Für die kapazitive Messung wird ein Plattenkondensator benutzt. Dabei gilt:

$$C = \frac{\varepsilon A}{s} \tag{4.16}$$

Also ist die Kapazität vom Plattenabstand s (also einer Länge) abhängig, jedoch nicht linear! Alternativ lassen sich auch Differenzen zwischen zwei Kapazitäten berechnen, indem zwei Kondensatoren direkt hintereinander geschaltet sind (zwei Platten mit Anschluss außen, eine Platte in der Mitte). Dies hat wiederum einen linearen Verlauf.

Alternativ lässt sich auch die Fläche A ändern, indem die Platten zueinander verschoben werden. Dadurch ändert sich die Fläche, bei der sich die Platten überlappen, und damit auch die Kapazität. Die Kennlinie ist hier wiederum in bestimmten Intervallen linear (da, wo ihre Ableitung stetig differenzierbar ist).

Als dritte Variante lässt sich ein Dielektrikum je nach Länge um einen gewissen Bereich in den Kondensator einschieben, um die Kapazität zu ändern.

Die Kapazität wird mithilfe einer Wechselspannung durch Messung der Impedanz (und daraus Bestimmung des kapazitiven Widerstandes) bestimmt. Die Messfrequenz ist also durch die Frequenz der Wechselspannung begrenzt.

Vor- und Nachteile

(+) *pm* Auflösung

(+) 2D-Messung möglich

(+) Differenzanordnung möglich

(+) fertige Auswerteschaltungen verfügbar

(−) Trägerfrequenzverfahren: $f_{mess} < \frac{1}{10} f_{Traeger}$

(−) nichtlineare Kennlinie

5. Trägheitsmesstechnik

Ziel der Trägheitsmesstechnik ist die Messung der Beschleunigung. Beschleunigung ist eine vektorielle Größe, d. h. die Beschleunigung muss in alle Richtungen $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ betrachtet werden.

Ein anderer Anwendungsfall ist die Messung von Drehraten (Winkelbeschleunigung) $\ddot{\phi}, \ddot{\psi}, \ddot{\theta}$.

5.1. Prinzipieller Aufbau eines DMS-Beschleunigungssensors

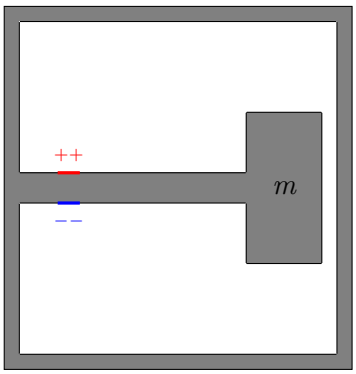

Abbildung 5.1.: DMS-Beschleunigungssensor

Gegeben sei ein Modell, welches um x_A in Richtung von x_E bewegt wird. Dadurch wird das Modell beschleunigt.

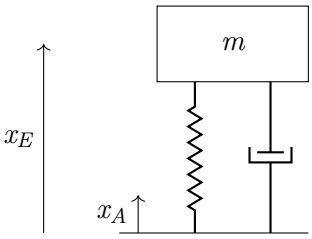

Abbildung 5.2.: Modell zur Beschleunigungsmessung

Der Prozess lässt sich als Differentialgleichung modellieren:

$$\underbrace{m \cdot \ddot{x_A}(t)}_{\text{Trägheit}} + \underbrace{k \cdot \dot{x}(t)}_{\text{Dämpfung}} + \underbrace{c \cdot x(t)}_{\text{Federkraft}} = m \cdot \ddot{x_E}(t) \tag{5.1}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Lösen lässt sich dies bspw. im LAPLACE-Bereich. Die Gleichung muss also nun transformiert werden.

$$\ddot{x_A}(t) \rightarrow s^2 X(X_A(s)) \tag{5.2}$$
$$\dot{x_A}(t) \rightarrow s X_A(s) \tag{5.3}$$
$$x_A(t) \rightarrow X_A(s) \tag{5.4}$$
$$\ddot{x_E}(t) \rightarrow s^2 X_E(s) \tag{5.5}$$

$$\mathcal{L}\{m \cdot \ddot{x_A}(t) + k \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t)\} = \mathcal{L}\{m \cdot \ddot{x_E}(t)\} \tag{5.6}$$
$$ms^2 X_A(s) + ksX_A(s) + cX_A(s) = ms^2 X_E(s) \tag{5.7}$$
$$\frac{X_A(s)}{s^2 X_E(s)} = \frac{m}{ms^2 + ks + c} \tag{5.8}$$

Nun lassen sich wieder die Polstellen der Übertragungsfunktion für $k = 0$ (also für ein ungedämpftes System) bestimmen. Dies ergibt dann die Eigenfrequenz (ω_0):

$$s^2 = \frac{c}{m} \qquad \Longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{5.9}$$

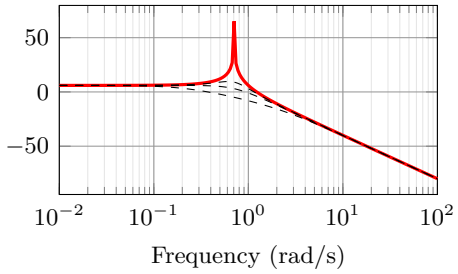

Abbildung 5.3.: Amplitudengang der Übertragungsfunktion Beschleunigung ($k = 0$ rot)

Im Amplitudengang lässt sich feststellen, dass die Amplitude in der nähe der Eigenfrequenz immer stärker wird. Wird Dämpfung eingebaut, lässt sich dieses Aufschaukeln zwar kompensieren, senkt aber die Amplitude ab. Nur unterhalb der Eigenfrequenz ist die Amplitude konstant und daher als Messbereich geeignet. Idealerweise nutzen wir also eine Messanordnung mit geringer Masse und hoher Federkonstante.

Für Beschleunigung und Weg müssen unterschiedliche Übertragungsfunktionen betrachtet werden:

$$\text{Beschleunigung: } \frac{X_A(s)}{s^2 X_E(s)} = \frac{m}{ms^2 + ks + c} \qquad \text{Weg: } \frac{X_A(s)}{X_E(s)} = \frac{s^2 m}{ms^2 + ks + c} \tag{5.10}$$

Jedoch ist für beide die Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ (für $k = 0$).

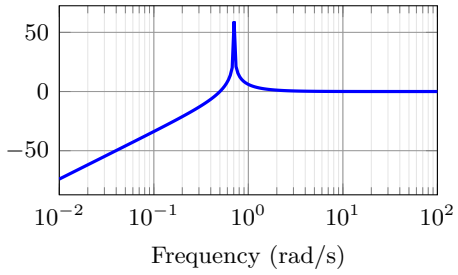

Abbildung 5.4.: Amplitudengang der Übertragungsfunktion Weg

Nun kann man den Amplitudengang für beide Übertragungsfunktionen vergleichen. Wie man erkennen kann, liegt der Messbereich für Beschleunigungsmessung unterhalb von ω_0, während der Messbereich für Wegmessung oberhalb von ω_0 liegt. Während für die Beschleunigungsmessung ω_0 möglichst hoch (die Masse möglichst gering, die Federsteifigkeit möglichst hoch) sein soll, muss für die Wegmessung ω_0 möglichst klein (die Masse möglichst hoch, die Federsteifigkeit möglichst klein) sein.

Analoge Erdbebenmessungen Früher wurden bereits solche Messanordnungen für die Messung von Erdbeben (Schwingungen der Erde) genutzt. Ein Behälter mit schweren Steinen (eine hohe Masse) wurde an ein langes Pendel (geringe Federsteifigkeit) gehängt. Am Ende des Pendels war dann ein Stift, der auf ein Blatt Papier gezeichnet hat, welches über Zeit bewegt wurde. Während eines Bebens bewegt sich dann die Erde, während der Stift am Pendel aufgrund der großen Masse annähernd stehen geblieben ist. Dadurch malt der Stift die Verschiebung als Linie auf dem Blatt Papier auf. Betreibt man drei solcher Messstationen, lassen sich mithilfe der Triangulation sogar bestimmen, wo Erdbeben stattgefunden haben.

Heutige Bauformen Heutzutage realisiert man solche Sensoren als mikromechanische Bauelemente in Silizium.

(+) hohe Stückzahlen

(+) geringe Baugröße

Die Nutzung von drei Sensoren erlaubt dann die Messung eines dreidimensionalen Beschleunigungsvektors.

Verwendung

- Beschleunigungsmessung
- Bestimmung der Richtung des g-Vektors (Bestimmung, in welche Richtung $\vec{F_G}$ wirkt)
- Trägheitsnavigation (Bestimmung der Geschwindigkeit/Position durch Integration der Beschleunigung)

Drehratensensoren Ein Problem bei manchen dieser Verwendungen ist noch, dass die Orientierung im Raum sich ändern kann und dadurch Messergebnisse verfälscht. Um dies zu lösen, werden *Drehratensensoren* benutzt. Solche Sensoren werden ständig mit einer Frequenz angeregt. Findet keine Drehung statt, bewegt sich der Sensor mit konstanter Amplitude. Bei einer Drehung wirkt die Coriolis-Kraft auf den Sensor und lenkt den Sensor seitlich aus, was sich wiederum messen lässt. Dadurch lässt sich die Drehrate für eine Achse bestimmen. Mit drei Sensoren kann man auch hier wieder die Drehraten um drei Achsen bestimmen.

Eine Alternative stellt auch die Messung des Erdmagnetfelds mit Hall-Sensoren in allen drei Richtungen B_x, B_y, B_z für die Messung der absoluten Orientierung auf der Erde dar.

Zusatzmaterial

- https://www.youtube.com/watch?v=6_yhOORMpc8 – Funktionsprinzip eines Drehratensensors für ESP®
- https://www.bosch-sensortec.com/

6. Durchflussmesstechnik

Der *Durchfluss* ist eine wichtige Größe in der Prozessmesstechnik. Ziel ist die Bestimmung eines Massen- oder Volumenstroms.

6.1. Volumenstrom:

$$\dot{V}(t) = \frac{\Delta V}{t} \tag{6.1}$$

6.2. Massenstrom:

$$\dot{m}(t) = \frac{\Delta m}{t} \tag{6.2}$$

$$= \rho \cdot \dot{V} \tag{6.3}$$

Beispiele für diese Messtechnik im Alltag:

- Wasseruhr
- Gasuhr
- Tankstelle

In der Industrie gibt es natürlich deutlich mehr Anwendungsgebiete. Überall, wo Stoffe durchgemischt werden, muss der Durchfluss bestimmt werden.

6.1. Fundamentalverfahren

Wie für andere Prozessgrößen gibt es auch für den Durchfluss Fundamentalverfahren zur Messung.

6.3. Fundamentalverfahren sind Verfahren zur Rückführung der Messgröße.

Verschiedene Fundamentalverfahren für die Messung des Durchflusses sind:

- **Piston- oder Kolbenverfahren** für Gase und Flüssigkeiten. Dabei wird ein Kolben in eine Leitung mit einem Fluid mit einer bestimmten Geschwindigkeit gedrückt. Dann gilt:

$$v \cdot A = \dot{V} \tag{6.4}$$

$$\frac{s}{t} \cdot A = \dot{V} \tag{6.5}$$

Abbildung 6.1.: Aufbau zum Kolbenverfahren

- **Gravimetrisch** für Massendurchfluss (Festkörper, Flüssigkeiten). Unter einem Rohr wird ein Wägesystem installiert. Der Stoff wird durch das Rohr auf die Waage geleitet. Durch Messung der Änderung der Masse kann der Massendurchfluss bestimmt werden:

$$\dot{m} = \frac{m}{t} \tag{6.6}$$

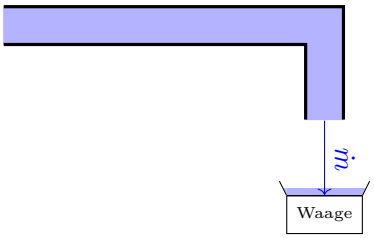

Abbildung 6.2.: Messanordnung zur gravimetrischen Durchflussmessung

Dies sind die Verfahren, mit denen industrielle Durchflussmessgeräte kalibriert werden. Man nimmt dabei immer die gleiche Menge eines Stoffes und schaut, was das Fundamentalverfahren anzeigt. Dabei wird das industrielle Messgerät in die Leitung eingebaut und geschaut, was währenddessen das industrielle Messgerät anzeigt.

6.2. Wirkdruckverfahren

6.4. Bei **Wirkdruckverfahren** findet die Bestimmung des Durchflusses mithilfe einer Druckmessung statt. Die Druckdifferenz Δp wird als Maß für $\dot{V}$ benutzt.

6.2.1. Wirkdruckverfahren mit Blende oder Venturirohr

Typischerweise wird in den Leiter, in dem der Durchfluss gemessen werden soll, eine Blende mit einem Flansch eingesetzt. Vor und hinter der Blende sind dann Druckentnahmestellen. Durch Messung der Druckdifferenz vor und hinter der Blende erhält man ein Maß für den Durchfluss. Auch geeignet sind *Venturirohre*

Charakteristisch für diese Verfahren, ist ein bleibender Druckverlust hinter der Blende.

6.5. Kontinuitätsgleichung für ein Venturirohr:

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \tag{6.7}$$

Diese Gleichung gilt nur, wenn die Strömung gleichmäßig ist!

6.6. Bernoulli-Gleichung: In einem Gebiet, das von den selben Strömungslinien begrenzt ist, ist die Summe von statischem und dynamischem Druck im Idealfall konstant.

$$\underbrace{p_1}_{\text{statisch}} + \underbrace{\frac{v_1^2}{2}\rho_1}_{\text{dynamisch}} = p_2 + \frac{v_2^2}{2}\rho_2 \tag{6.8}$$

Diese Gleichung gilt nur, wenn die Strömung gleichmäßig ist!

Dann gilt für den Wirkdruck:

$$\Delta p = p_2 - p_1 \tag{6.9}$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho \tag{6.10}$$

$$\Longrightarrow \quad v_1^2 = \left(\Delta p + \frac{v_2^2}{2}\rho\right) \cdot \frac{2}{\rho} \tag{6.11}$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 \tag{6.12}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho \cdot \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)}} \tag{6.13}$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{V}_1 = v_1 \cdot A_1 \tag{6.14}$$

Δp lässt sich mithilfe eines *U-Rohr-Manometers* oder *Staurohrmanometers* messen.

Vor- und Nachteile:

(+) einfach

(+) genormt

(−) längere Einlaufstrecken notwendig, um möglichst gerade Strömungslinien zu erhalten.

(−) Druckverlust

(−) Verschleiß/Formänderung durch mechanischen Abrieb und dadurch falsche Messergebnise

(−) keine lineare Kennlinie

(−) keine hohe Genauigkeit

6.2.2. Staurohr-Verfahren

Ein weiteres Verfahren ist das *Staurohr-Verfahren* mit einem *PRANDTLschem Staurohr*.

$$p_{dyn} = p_{ges} - p_{stat} = \Delta p \tag{6.15}$$

$$\text{mit } p_{dyn} = \frac{v^2}{2}\rho \tag{6.16}$$

$$\implies v = \sqrt{\frac{2}{\rho}\Delta p} \tag{6.17}$$

$$\implies \dot{V} = p \cdot v \tag{6.18}$$

Vor- und Nachteile

(+) Punktförmige Messung. Damit ist auch die Geschwindigkeitsverteilung in der Rohrleitung bestimmbar.

(+) Geringe Strömungsbeeinflussung

(+) Keine so großen Ein- und Auslaufstrecken notwendig

(−) Messung des mittleren Volumenstroms benötigt Netzmessung statt nur einer Punktmessung[1]

6.2.3. Zähler

Ovalradzähler Im Zähler wird ein konstantes Volumen befüllt. Dabei drehen sich die zwei Ovale. Wenn sich die Ovale weiter drehen, wird Flüssigkeit zum Ausgang des Zählers transportiert. Dabei entspricht dann jede Umdrehung einer festen Menge an transportiertem Volumen. Die Zahl der Umdrehungen ist dann ein direktes Maß für $\dot{V}$.

Es gibt auch noch andere dieser sog. **unmittelbaren Zähler**, bspw. *Ringkolbenzähler*.

[1] Die Messpunkte für eine Netzmessung sind genormt.

Mittelbare Zähler Bei mittelbaren Zähler ist das Volumen nicht bekannt. Die Zahl der Umdrehungen muss dann ausgewertet werden. Es ist also eine Kalibrierung notwendig. Ein Beispiel für einen solchen Zähler ist ein *Flügelradzähler*.

6.2.4. Schwebekörper-Durchflussmessung

In der Rohrleitung ist ein *Schwebekörper* mit bestimmten Abmessungen eingesetzt. Die Form und Abmessungen des Schwebekörpers bestimmen den Messbereich. Die physikalische Grundlage ist hier ein Kräftegleichgewicht zwischen der Gewichtskraft F_G und der Auftriebskraft F_A sowie der Reibung F_s:

$$F_G = F_A + F_s \tag{6.19}$$

$$F_G = m \cdot g \tag{6.20}$$

$$= V_s \cdot \rho_s \cdot g \tag{6.21}$$

$$F_A = V_s \cdot \rho_{Medium} \cdot g \tag{6.22}$$

$$F_s = c_W \cdot A_s \cdot \frac{\rho_M \cdot v^2}{2} \tag{6.23}$$

Dies lässt sich nach v auflösen:

$$\Longrightarrow \; v = \sqrt{\frac{2 \cdot V_s \cdot g \cdot (\rho_s - \rho_M)}{c_w \cdot A_s \cdot \rho_M}} \tag{6.24}$$

Anmerkung:

- c_W ist ein Reibungs-Beiwert, der von dem Material und der Oberflächen-Beschaffenheit des Schwebekörpers abhängt und nicht bekannt ist. Das Gerät muss also immer kalibriert werden.
- A_s ist die mittlere Querschnittsfläche des Schwebekörpers, *nicht* die Oberfläche.

Schwebekörper werden auch heute noch zur Durchflussmessung in der Industrie benutzt. Dabei lässt sich durch Nutzung eines magnetischen Schwebekörpers und Messung der Bewegung im Magnetfeld die Messung elektrisch durchführen.

Vor- und Nachteile

(+) einfaches, mechanisches Verfahren

(+) unempfindlich, wenig Wartung

(+) keine Hilfsenergie notwendig

(−) keine elektrische Weiterverarbeitung der Messwerte (wenn, dann nur mit großem Aufwand)

(−) Messbereich über Geometrie bestimmt

6.3. Induktive Durchflussmessung

In diesem Aufbau wird eine Spule mit einem Eisenkern um das Rohr gelegt, sodass das Magnetfeld durch das Rohr geht. An der Rohrwand sind zwei Elektroden angebracht, zwischen denen eine Spannung gemessen wird. Beim Durchfluss werden Ionen im Medium durch das Magnetfeld in Richtung der Elektroden bewegt. Je mehr Durchfluss, umso mehr Ionen bewegen sich zu den Elektroden. Die Spannung ist proportional zur magnetischen Flussdichte B und der Geschwindigkeit v des Mediums.

$$U \sim B \cdot v \tag{6.25}$$

Zu beachten ist, dass das Magnetfeld ein Wechselfeld sein muss (d. h. eine Wechselspannung muss angelegt werden). Ansonsten würden sich die Ionen an den Elektroden anlagern und damit die Elektroden nach und nach zerstören.

Vor- und Nachteile

(+) linearer Zusammenhang zwischen U und v

(+) keine direkte Beeinflussung der Strömung durch die Messanordnung.

(+) kein Druckverlust

(+) kleine Ein- und Auslaufstrecken

(+) sehr genaues Verfahren

(+) Betrieb in beide Strömungsrichtungen möglich

(+) elektrisch weiterverarbeitbares Signal

(−) leitfähiges Medium (z. B. wässrige Lösung) notwendig

(−) teurer als die anderen Verfahren

6.4. Weitere Verfahren

6.4.1. Ultraschall-Durchflussmessung

Beim Ultraschall-Verfahren werden ein Sender und ein Empfänger auf der Leitung aufgebracht. Die Schalwellen vom Sender breiten sich im Rohr aus, reflektieren und werden vom Empfänger empfangen. Der Empfänger fungiert auch als Sender und sendet Schallwellen entgegen der Strömungsrichtungen. Die Schallwellen, die der Empfänger sendet, sind aufgrund der Strömung langsamer als die des Senders. Die Laufzeitdifferenz zwischen den beiden Laufzeiten ist dann ein Maß für die Strömungsgeschwindigkeit.

$$t = \frac{l}{c} \tag{6.26}$$

Anmerkungen:

- c ist die stoffspezifische Schallgeschwindigkeit und erfordert eine Kalibrierung der Messanordnung.
- Das Schallsignal läuft einmal mit und einmal gegen die Strömungsrichtung und dabei bildet sich eine Laufzeitdifferenz

Da dieser Messaufbau komplett außerhalb der Rohrleitung angebracht werden kann, eignet er sich besonders gut für Anwendungsfälle, in denen keine Verschmutzung des Stoffes auftreten darf (z. B. in der Medizintechnik).

Vor- und Nachteile

(+) linearer Zusammenhang

(+) keine Strömungsbeeinflussung

(+) nachträgliche Installation der Messtechnik möglich

(+) wartungsarm

(+) sehr genau (weil auf Zeitmessung[2] zurückführbar)

(−) Medium und Rohrleitung müssen akustisch durchlässig sein

(−) Ablagerungen und Abtragungen in der Rohrleitungen ändern die Länge l und verfälschen damit das Messergebnis

6.4.2. Thermische Durchflussmessung

Hier sei auf das Videomaterial auf der Website von Endress und Hauser GmbH verwiesen.

Wenn ein Thermometer im Prozess verbaut ist, wird dieses durch den Messstrom beheizt und durch die Strömung wieder abgekühlt (die Wärme wird an den Stoff abgeführt – je größer der Durchfluss, umso schneller die Wärmeableitung). Was sonst bei der Temperaturmessung zu einer Messabweichung führt, wird hier also genutzt, um die Strömungsgeschwindigkeit zu bestimmen.

$$v = f(\Delta\theta) \tag{6.27}$$

$$= f(\Delta R) \tag{6.28}$$

Je größer die Strömungsgeschwindigkeit ist, umso kleiner wird $\Delta\theta$.

Ähnliche Ansätze sind, zwei Thermometer einzusetzen und nur eines zu beheizen oder zwei Thermometer an der Außenwand mit Abstand anzubringen und dazwischen ein Heizelement anzubringen, sodass Wärme durch die Strömung zu einem der Thermometer transportiert wird.

[2] Die Zeit ist die Größe aus dem SI-Einheitensystem mit der kleinsten Messunsicherheit.

Vor- und Nachteile

(+) hohe Messgenauigkeit und Messdynamik (besonders bei Hitzdraht)

(+) Messung von Durchfluss und Temperatur

(+) keine beweglichen Teile

(+) wartungsarm

Zusatzmaterial

- Foliensatz MST
- Online-Material von Endress und Hauser GmbH
- https://de.wikipedia.org/wiki/Venturi-D%C3%BCse

7. Druckmesstechnik

Druck ist eine wesentliche Prozessmessgröße. Bspw. hängen Materialeigenschaften von Gasen u. A. vom Luftdruck ab (z. B. Anwendung in Präzisionsmesstechnik: $\lambda_{Laser} = f(T, p, \text{Feuchte})$). Andere Anwendungsgebiete sind bspw. in der Meteorologie, Materialüberwachung (bspw. Verhinderung vom Bersten) oder natürlich im Alltag bspw. zum Messen des Reifendrucks.

7.1. Mathematischer Zusammenhang

7.1. Der **Druck** hat das Formelzeichen p und ist abhängig von der Kraft F und der Fläche A, auf die diese Kraft wirkt:

$$p = \frac{F}{A} \tag{7.1}$$

Einheiten für den Druck sind $mbar$, Pa, $Torr$ ($mmHg$), etc.

Der Druck kann viele andere physikalische Größen beeinflussen. Bspw. wird der Siedepunkt von Wasser (vgl. Abbildung 2.2) vom Druck beeinflusst.

7.2. Der **Normaldruck** ist festgelegt:

$$p_N = 1013,25\, hPa \tag{7.2}$$

7.2. U-Rohr-Manometer

Das U-Rohr-Manometer ist eine Fundamentalmethode in der Druckmessung. An beiden Enden eines U-Rohrs wirken Drücke p_1 und p_2. Dazwischen ist eine Sperrflüssigkeit (meist Quecksilber). Je nachdem, wie groß die Drücke sind, verschiebt sich die Höhe h der Quecksilbersäule im U-Rohr. Diese Änderung Δh lässt sich in eine Druckänderung Δp umrechnen:

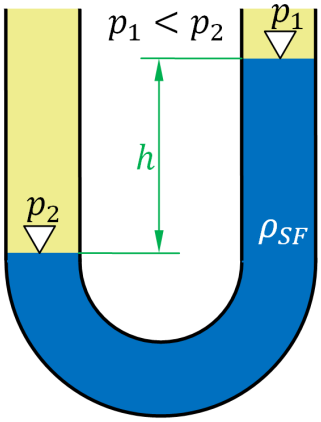

Abbildung 7.1.: U-Rohr-Manometer (ausgelenkt), Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/U-Rohr-Manometer, Badsaiyaman, GFDL 1.2 / CC-BY-SA 3.0

$$F_p = F_g \tag{7.3}$$
$$\Delta p \cdot A = m \cdot g \tag{7.4}$$
$$= \rho \cdot V \cdot g \tag{7.5}$$
$$= \rho \cdot A \cdot \Delta h \cdot g \tag{7.6}$$
$$\iff \Delta p = \rho \cdot \Delta h \cdot g \tag{7.7}$$

ρ ist die Dichte der Sperrflüssigkeit, g ist die ortsabhängige (!) Fallbeschleunigung, muss also auf die Höhe bezogen werden. Dies ist allerdings vereinfacht. Eigentlich muss ρ aus der Dichte der Sperrflüssigkeit und der Dichte der Luft im Rohr berechnet werden. Da die Dichte von Luft jedoch sehr gering ist, ist diese vernachlässigbar.

Zur Messung muss nur noch einer der beiden Drücke konstant den Normaldruck p_N haben. Die andere Seite des Rohrs ist offen, damit der Umgebungsdruck auf das Rohr wirken kann.

Warum wird aber nun ausgerechnet giftige Quecksilber als Sperrflüssigkeit benutzt? Dazu muss man die Dichte von Quecksilber mit anderen dichten, bspw. von Wasser vergleichen:

$$\rho_{Hg} = 13\,000\,\frac{kg}{m^3} \qquad \rho_{H_2O} = 1\,000\,\frac{kg}{m^3} \tag{7.8}$$

Beispielsweise sei eine Druckänderung $\Delta p = 0.5\,bar$ mit Fallbeschleunigung $g = 9.81\frac{m}{s^2}$ gegeben. Man kann nun die resultierende Höhenänderung berechnen:

$$\Delta p = \rho g \Delta h \tag{7.9}$$
$$\implies \Delta h = \frac{\Delta p}{\rho g} \tag{7.10}$$

Setzt man nun jeweils die Dichte von Quecksilber und Wasser ein, ergibt sich die Höhenänderung beim Einsatz der jeweiligen Sperrflüssigkeit:

$$\Delta h_{Hg} = 0.4\,m \qquad \Delta h_{H_2O} = 5.1\,m \tag{7.11}$$

Bei einer Sperrflüssigkeit mit geringerer Dichte ergibt sich also eine deutlich größere Höhenänderung und damit der Bedarf für ein entsprechend großes U-Rohr-Manometer. Praktisch eignen sich also nur Sperrflüssigkeiten mit sehr hoher Dichte, also vor allem Quecksilber.

Vor- und Nachteile

(+) Fundamentalverfahren

(+) einfacher Aufbau

(−) offen und quecksilberhaltig, senkrechter Transport notwendig

(−) zerbrechlich

7.3. Elektrische Drucksensoren

In der Technik sind vor eher elektrische Drucksensoren im Einsatz. Diese sind teilweise auch auf Halbleiterbasis (Piezoelemente).

7.3.1. Druckmessung mit Dehnmessstreifen

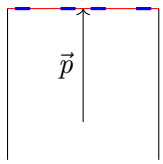

Abbildung 7.2.: DMS-Drucksensor (rot: Membran, blau: DMS)

Dabei wird eine Membran an der Wand eines Zylinders befestigt. Wirkt nun im Zylinder ein Druck auf die Membran, wird diese gewölbt. Dadurch ist wieder eine Dehnung bspw. mit Dehnmessstreifen messbar. Werden die DMS auf der Außenseite der Membran aufgebracht, lässt sich außen eine Stauchung messen, während innen eie Dehnung messbar ist. Somit kann man wieder mit 4 DMS eine Brückenschaltung betreiben.

7.4. Mechanische Druckmessgeräte

- U-Rohr-/Schrägrohrmanometer
- Dosenbarometer (Verformung einer Feder entsprechend des Drucks), $\Delta p \rightarrow \Delta h$ (abhängig vom Querschnitt der Feder)

7.5. Kolbenmanometer

Ein Kolben drückt auf eine Rohrleitung, an der ein Drucksensor angebracht ist. Sind Fläche und Masse des Kolbens bekannt, lässt sich der in der Leitung wirkende Druck berechnen. Die Messunsicherheit ist hier jedoch davon abhängig, wie die Fläche berechnet wird, da der Rohrdurchmesser und der Kolbendurchmesser (u. A. auch zur Vermeidung von Reibungseffekten) nicht ganz gleich sind.

7.6. Kalibrierung von Drucksensoren

Zur Kalibrierung kann entweder eine Vergleichskalibrierung oder eine Fundamentalmethode benutzt werden.

Zur Vergleichskalibrierung werden einfach alle Prüflinge an eine gemeinsame Rohrleitung mit einem Referenzgerät angeschlossen und verschiedene Druckpunkte angefahren. Mithilfe des Referenzgerätes lässt sich dann die Kennlinie der Prüflinge aufstellen.

A. Praktikum Mess- und Sensortechnik

- Praktika PMS 1–3 K2021–K2023
- Praktika PMS 4–6 K3050 (hinter K-Hs-2)
- Praktikum mit Maske
- nicht mit Erkältungssymptomen kommen
- für jeden Versuch gibt es eine Extra-Einweisung, bevor man loslegen darf
- https://www.tu-ilmenau.de/pms unter Praktika (verlinkt dann ins Intranet)
- Versuche müssen vorbereitet werden (steht in der Anleitung) und werden in einem Quiz während des Praktikums abgefragt
- Pro Gruppe ein Protokoll
- Deckblatt muss pro Praktikumsgruppe ausgefüllt und mitgebracht werden
- Darstellung des Lösungsweges mit Formeln und Skizzen
- Eigenen Laptop mitbringen

B. Raumwinkel

B.1. Der **Raumwinkel** Ω ist definitiert als Flächeninhalt A einer Teilfläche F der Kugeloberfläche einer Einheitskugel ($r = 1$). Für beliebige Kugeln muss durch r^2 dividiert werden:

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \tag{B.1}$$

Die Teilfläche kann von beliebiger Umrissform sein. Vektoriell ergibt sich:

$$\Omega = \iint_F \frac{\hat{\vec{n}} \cdot \mathrm{d}\vec{A}}{r^2} \tag{B.2}$$

Angegeben wird der Raumwinkel in der Einheit *Steradiant*.

(Quelle: Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Raumwinkel, 30.11.2021)

C. Laser als Lichtquelle

Licht entsteht durch *spontane Emission*. Wenn ein Elektron im Atom von einer Schale auf eine niedrigere wechselt, wird ein Phonton ausgesendet. Dies passiert, weil der Atomkern aufgrund der Wärme Energie an die Elektronen aussendet. Dieses ausgesendete Licht kann (muss aber nicht) im sichtbaren Bereich sein. Je höher die Energie ΔE ist, umso größer ist die Frequenz:

$$f_{Licht} \sim \Delta E \tag{C.1}$$

In der Praxis sind beispielsweise Helium-Neon-Laser (kurz: He-Ne-Laser) benutzt.

Im Gegensatz zur spontanen Emission wird im Laser *induzierte Emission* benutzt. Ist ein Elektron kurz davor, die Schale zu wechseln und ein Photon mit passender Frequenz fliegt in diesem Moment am Elektron vorbei, springt das Elektron sofort und es wird ein Photon ausgesendet. Diese zwei Photonen, die jetzt vorhanden sind, besitzen die gleiche Frequenz, gleiche Phase und gleiche Richtung. Dadurch haben wir Lichtverstärkung durch induzierte Emission. So setzt sich letztlich auch der Name „Laser“ zusammen: *L*ight *A*mplification by *S*timulated *E*mission of *R*adiation.

In einem He-Ne-Laser gibt es einen Behälter, in dem He-Ne-Gas elektrisch angeregt wird. Dadurch kommt es zur *Besetzungsinversion*, d. h. Atome werden angeregt, dass Elektronen auf eine höhere Schale zu wechseln.

An beiden Enden des Behälters wird ein je Spiegel angebracht. Der vordere Spiegel wird 99 % gemacht und der hintere Spiegel 100 %, sodass Licht nur durch den vorderen Spiegel entweichen kann. Dennoch muss ein Großteil des Lichts reflektiert werden, um sich immer weiter verstärken zu können. Dieser Aufbau wird als *Resonator* bezeichnet.

Funktion des Resonators

- Längerer Weg
- Nur die senkrechten Strahlen „überleben“ (nur wenige *mrad* Strahldivergenz). Schräg ausgesendetes Licht verschwindet im Gehäuse des Lasers und nur die komplett senkrechten Strahlen werden ständig verstärkt und ausgeleitet.
- Stehende Welle im Resonator. Wird die Lichtwelle am Spiegel reflektiert, findet ein Phasensprung statt. Zwischen den Spiegeln können nur ganzzahlige Vielfache der Wellenlänge sein. Wenn sich der Abstand der beiden Spiegel ändert, ändert sich die Wellenlänge geringfügig. Dadurch gibt es auch eine gewisse Filterwirkung im Resonator.

Nur bestimmte Wellenlängen werden mit hoher Intensität durchgelassen. Nur *ein* Vielfaches der Wellenlänge wird tatsächlich mit hoher Intensität durch den Resonator verstärkt. Bei Temperaturänderung und dadurch Längenänderung des Resonators verschiebt sich die Intensitätskurve und ein anderes Vielfaches der Wellenlänge wird nun tatsächlich verstärkt.

Entsprechend überlebt immer nur eine Wellenlänge und das Spektrum ist sehr schmal.

- Die FOURIERtransformierte eines Rechtecks ist ein Spektrum, wie es bei Beugung einer Lichtwelle an einem Spalt entsteht. Die GAUSS-Funktion ist die Invariante der FOURIER-Tranformation.

  Beim Laser gibt es ein solches GAUSS-förmiges Strahlprofil.

D. Magnetfeldmessung

Die Magnetfeldmessung oder *B-Feld-Messung* wird üblicherweisse mit *Hall-Sensoren* durchgeführt.

In einem stromdurchflossenen Leiter ist ein Ohmscher Widerstand $R = \frac{U}{I}$. Wirkt nun ein Magnetfeld $\vec{B}$ senkrecht auf den Leiter, lenkt dieses die Elektronen im Leiter senkrecht zum Strom und Feld ab. Dies lässt sich durch Messung der Spannung (U_H) bestimmen. Der dabei gemessene Widerstand wird als **Hall-Widerstand** bezeichnet und ist proportional zum Magnetfeld:

$$R_H = \frac{U_H}{I} \qquad\qquad R \sim B \tag{D.1}$$

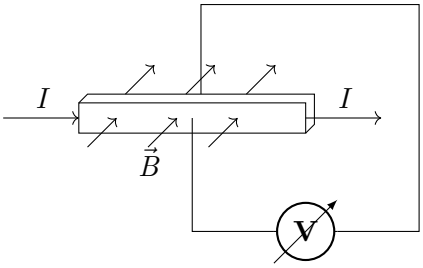

Abbildung D.1.: Messanordnung eines Hall-Sensors

E. Gray-Kodierung

Die Gray-Kodierung ist eine spezielle Art und Weise, Zahlen binär zu kodieren. Diese Kodierung ist speziell für den Fall gedacht, bei dem der Wert nur um 1 inkrementiert oder dekrementiert werden soll, bspw. in Drehschreiben für Absolutwertgeber.

Eine Gray-Kodierung ist immer auf eine bestimmte Anzahl Bits limitiert. Alle möglichen Kombinationen von Bits werden so nacheinander aufgeschrieben, dass sich benachbarte Kombinationen immer nur in einem Bit unterscheiden. Dies ist beispielhaft in Tabelle E.1 gezeigt.

Um einen n-bit Gray-Code zu erstellen, kann ein graphisches Verfahren angewendet werden. Dazu schreibt man alle möglichen Bitfolgen (Kombinationen) als Knoten auf und zeichnet Kanten zwischen denjenigen Knoten, die sich in nur einem Bit voneinander unterscheiden. Um einen Gray-Code zu erhalten, muss man nun bei einem beliebigen Knoten beginnen und einen Kreis im Graphen finden, in dem alle Knoten enthalten sind. Abbildung E.1 zeigt dies beispielhaft für einen 3-bit Gray-Code. Man kann nun der Reihe nach entlang des Pfades jeden Knoten mit einer fortlaufenden Nummer versehen, die dann dem Dezimalwert entspricht, der mit der jeweiligen Bitfolge kodiert wurde.

Zu beachten ist, dass meist mehrere mögliche Gray-Kodierungen existieren[1]. Die gezeigte Kodierung ist eine von mehreren Möglichkeiten.

Tabelle E.1.: 3-bit Gray-Code

Wert	b_2	b_1	b_0
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	1
3	0	1	0
4	1	1	0
5	1	1	1
6	1	0	1
7	1	0	0

Gray-Codes bieten sich für Inkrementalverfahren und andere Verfahren mit Abtastung von einer mechanischen Skala insofern an, als dass Prellverhalten und Ungenauigkeiten auf der Skala nur zu Schwankungen um ± 1 führen können anstatt zu sprunghaften Wertänderungen.

[1] Es ergeben sich schon bei nur einem möglichen Kreis verschiedene Gray-Kodierungen, je nachdem bei welchem Knoten man startet. Jedoch sind meist auch mehrere verschiedene zulässige Kreise im Graphen.

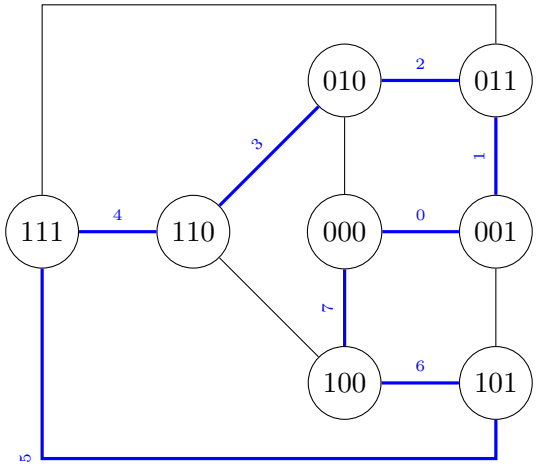

Abbildung E.1.: Darstellung eines 3-bit GRAY-Codes als Graph. Die Nummern an den Kanten beschreiben die Reihenfolge, in der diese eingezeichnet wurden.

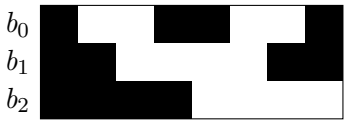

Abbildung E.2.: Muster für eine 3-bit Gray-Kodierung gemäß Tabelle E.1 (schwarze Flächen entsprechen 0, weiße Flächen entsprechen 1)

Betrachte bspw. eine Kodierung, bei der 001 und 010 direkt benachbart sind, wie in Abbildung E.3 gezeigt. Beim Übergang des Sensors von der 001-Kodierung zur 010-Kodierung, kann bei Verschiebung der drei Sensoren bereits eine falsche Kodierung abgelesen werden. Jeder Sensor könnte innerhalb des roten Rechtecks an seiner Stelle den Wert an jeder möglichen Position ablesen. Selbst bei der idealen Aufbringung der Kodierung im ersten Fall kann dies zu Fehlern führen (bspw. könnte 011 gelesen werden). Im zweiten Fall, in dem die Aufbringung nicht ganz genau ist, würde selbst bei perfekter Ausrichtung der Sensoren beim Übergang von 001 zu 010 immer die Folge 001–011–010 gelesen werden.

Solche Wertänderungen können im schlimmsten Fall dazu führen, dass der Detektor die falsche Bewegungsrichtung erkennt und dadurch Fehlverhalten auslöst! Bei GRAY-Codes kann man dies bereits verhindern, indem die Erkennung von Richtungsänderungen erst durch eine Wertänderung um ± 2 passiert.

Damit ist die GRAY-Kodierung eine gut geeignete Methode für Abtastung von Werten auf Code-Scheiben/Stäben.

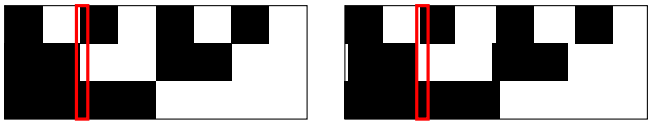

Abbildung E.3.: Ideale und ungenaue Aufbringung einer Binärkodierung und fehlerhafte Erkennung

Stichwortverzeichnis

k-Faktor, 35
Abbe-Komparator-Prinzip, 46
2-Leiter-Schaltung, 27
4-Leiter-Schaltung, 27

absoluter Nullpunkt, 20
Absolutwertgeber
    Multiturn, 53
Ampere, 8
Ausdehnungskoeffizient
    Länge, 21
    Volumen, 22

B-Feld-Messung, 76
Bernoulli-Gleichung, 62
Besetzungsinversion, 74
Binärkodierung
    Gray, 77
Boltzmann-Konstante, 32
Brückenschaltung, 35
    Viertel-Brücke, 27
    Vollbrücke, 38

Candela, 9

Dehnung, 34
Dehnungsmesstreifen
    Beschleunigungssensor, 56
Dimension
    Größe, 4
DMS-Verformungskörper-Kraftmesser, 40
Drehratensensor, 59
Druck, 68
Durchfluss, 60
Durchflussmessung
    gravimetrisch, 61

Emissionsgrad, 32
Empfindlichkeit
    Messmittel, 7
    Widerstandsthermometer, 24
Encoder
    Multiturn, 53
Erwartungswert, 12
Erweiterungsfaktor
    Unsicherheit, 10
Etalon, 5
extensive Größe, 19

Flügelradzähler, 64
Fourier-Transformation, 75
Fundamentalverfahren, 60

Gasgleichung, 19
Gauss-Verteilung, 11
gravimetrische Durchflussmessung, 61
Gray-Code, 77
Grundgesamtheit, 12
Größe
    extensiv, 19
    intensiv, 19
    physikalisch, 4
Größenart, 4

Halbleiter-Widerstandsthermometer, 27
Hall-Sensor, 76
Hall-Widerstand, 76
Hohlraumstrahler, 32
Hookescher Bereich, 35

Induktionsgeber, 53
induktive Geber, 53
induzierte Emission, 74
intensive Größe, 19
Interferometer, 47

Interferometerfaktor, 49
invertierbar
    Kennlinie, 16
ITS90-Skala, 21

Kalibrieren, 6
Kapton, 37
Kelvin, 8, 19
Kennlinie, 15
    Widerstandsthermometer, 24
Kilogramm, 8
Kippwinkel, 44
Kirchhoffsches Strahlungsgesetz, 32
Kolbenverfahren, 61
Konstantan, 37
Kontakt
    thermisch, 18
Kontinuitätsgleichung
    Venturirohr, 62
Kosinusfehler, 47

Lichtgeschwindigkeit
    Vakuum, 8
Lorentzkraft, 42
Längenausdehnungskoeffizient, 21

Magnetfeldmessung, 76
Manometer
    Staurohr, 62
    U-Rohr, 62
Massenstrom, 60
Maßverköperung, 5
Messabweichung, 6
Messbereich, 6
Messergebnis, 6
    vollständig, 6
Messfehler
    1. Ordnung, 44
    2. Ordnung, 47
    Abbe, 44, 47
    erster Ordnung, 46
    Kosinus, 47
    Sinus, 44
    zweiter Ordnung, 47
Messfühler, 5
Messgerät, 5
Messmittel, 5
Messschaltung, 24
Messung, 4
Messunsicherheit, 10
    erweitert, 10
    Typ A, 13
    Typ B, 13
Messwandler, 5
Messwert, 6
Messwertaufnehmer, 5
Messwertgeber, 5
Messzelle, 5
Meter, 8
Metrologie, 4
Mittelwert, 9
Moiré-Effekt, 50
Mol, 8
Multiturn-Encoder, 53

Normal
    Messmittel, 5
Normaldruck, 68
Normalverteilung, 11
NTC, 27
Nullimpuls, 53
Nullpunkt
    Temperatur, 20

Ovalradzähler, 63

Parallellenkersystem, 40
Physikalische Größe, 4
Pistonverfahren, 61
Plancksches Strahlungsgesetz, 31
Plancksches Wirkungsquantum, 32
Poissonzahl, 34
Primärnormal
    Messmittel, 5

Querkontraktionszahl, 34

Raumwinkel, 73
Referenznormal
    Messmittel, 5

Resonator, 74
Ringkolbenzähler, 63

schwarzer Strahler, 32
Schwebekörper, 64
Schätzer, 12
sec:fehlerfortpflanzung, 10
Seebeck-Effekt, 28
Seebeck-Koeffizient, 29
Sekunde, 7
Sekundärnormal
    Messmittel, 5
Sensitivität
    Messmittel, 7
Sensitivitätskoeffizient, 11
Sensor, 5
SI-Basiseinheit, 7
Signal, 7
Sinusfehler, 44
spontane Emission, 74
Standard
    Messmittel, 5
Standardabweichung, 9, 12
Standardmessunsicherheit, 10
Standardunsicherheit
    kombiniert, 11
Staurohr
    Prandtlsches, 63
Staurohr-Verfahren, 63
Stefan-Boltzmann-Gesetz, 32
Stichprobe, 12
Strahler
    schwarz, 32
Student-Verteilung, 12

Temperatur
    thermodynamisch, 20
temperaturkompensiert, 38
Temperaturskala
    ITS90, 21
    thermodynamisch, 20
thermischer Kontakt, 18
Thermoelement, 28
transducer, 5
Tripelpunkt, 20

Unsicherheit, 10
    erweitert, 10

Varianz, 12
Venturirohr, 62
Vergleichskalibrierung, 17
Vergleichsmesstemperatur
    Thermoelement, 28
Volumenausdehnungskoeffizient, 22
Volumenstrom, 60

Wahrscheinlichkeitsdichte, 11
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, 11
Wahrscheinlichkeitsfunktion, 11
Wert
    Größe, 4
Widerstand
    Hall, 76
Widerstandsthermometer
    Halbleiter, 27
Wiensches Verschiebungsgesetz, 32
Wirkdruckverfahren, 61

Zähler
    Flügelradzähler, 64
    mittelbar, 64
    Ovalradzähler, 63
    Ringkolbenzähler, 63
    unmittelbar, 63